

10

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

Afdeeling **NATUURKUNDE**.

DERDE REEKS.

VIJFDE DEEL.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1889.

GEDRUKT BIJ DE ROEVER KRÖBER—BAKELS.

INHOUD

VAN HET

VIJFDE DEEL

DER

DERDE REEKS.

PROCESSEN-VERBAAL

DER

GEWONE VERGADERINGEN.

VERSLAGEN.

MEDEDEELINGEN.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 28 Januari 1888.



Tegenwoordig de Heeren: BUYS BALLOT, Voorzitter, VAN DIESEN, MICHAËLIS, SCHOLS, WEBER, VAN DE SANDE BAKHUYZEN, TREUB, ENGELMANN, HOEK, HOFFMANN, PEKELHARING, DIBBITS, MARTIN, MAC GILLAVRY, ZAAIJER, RAUWENHOFF, VAN 'T HOFF, FORSTER, VAN DORP, BEIJERINCK, A. C. OUDEMANS JR., FRANCHIMONT, LORENTZ, PLACE, BAEHR, BIERENS DE HAAN, HUBRECHT, VAN DER WAALS, DONDERS, SCHOUTE, STOKVIS, ZEEMAN, BOSSCHA, GRINWIS, J. A. C. OUDEMANS, KORTEWEG, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, VAN RIEMSDIJK en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris; van de Letterkundige Afdeeling de Heer: CAMPBELL.

— Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1°. A. J. ENSCHEDEE, Bibliothecaris der Stads-Bibliotheek te Haarlem, 4 Januari 1888; 2°. G. J. W. BREMER, Secretaris van het Bataafsch Genootschap der proefondervindelijke Wijsbegeerte te Rotterdam, 1 Januari 1888; 3°. H. TONCKENS jr., Voorzitter der koloniale Bibliotheek te Paramaribo, 1 December 1888; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van boekgeschenken van de navolgenden:

1°. het Ministerie van Binnenlandsche Zaken te 's Gravenhage, 2, 5 Januari 1888; 2°. W. H. M Christie, Directeur van het royal Observatory te Greenwich, 1887; 3°. F. J. de Freitas, Secretaris van het Museu nacional te Rio de Janeiro, 21 Maart 1887; 4°. J. F. Bride, Bibliothecaris der public Library te Melbourne, 9 December 1887; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behooren: 1°. een schrijven van den Minister van Waterstaat, Handel en Nijverheid (2 Januari 1888), ter begeleiding: *a.* van een afschrift van het Koninklijk Besluit d.d. 27 Nov. 1887, n°. 25, waarbij de Commissie tot het overbrengen naar Nederland van den Standaardmeter van hare taak is ontheven; *b.* van een exemplaar van het *Staatsblad* n°. 168, waarin het Koninklijk Besluit van 3 Oct. 1887 tot aanwijzing van de Nederlandsche Standaarden der maten en gewichten, en tot regeling van hunne bewaring is opgenomen; *c.* afschrift van het Koninklijk Besluit van 25 Nov. 1887 n°. 28, houdende benoeming der Commissie, bedoeld in art. 3, al. 2 van het sub 2 genoemd Koninklijk Besluit.

De Minister deelt verder mede, dat de platina Standaard van het kilogram, overeenkomstig het advies der Afd. van 5 Mei 1887 n°. 20, aan den Hoogleeraar Dr. J. A. C. Oudemans te Utrecht in gebruik gegeven, door dien Hoogleeraar in handen zal worden gesteld van bovengenoemde Commissie van Toezicht.

Eindelijk wenscht de Minister te vernemen: »of de Akademie er prijs op stelt dat de platina Mètre, vermeld in art. 1 van het Koninklijk Besluit van 12 April 1839 (*Staatsblad* n°. 13), die krachtens art. 6 van het Koninklijk Besluit van 3 Oct. 1887 (*Staatsblad* n°. 168) voor wetenschappelijke doeleinden bewaard blijft, onder hare bewaring blijft".

De Voorzitter stelt voor, den Minister op de laatste alinea

te antwoorden, dat de Afdeeling er geen prijs op stelt met de bewaring van den platina Meter, vermeld in art. 1 van het Koninklijk Besluit van 12 April 1839 (*Staatsblad* n⁰. 13) belast te blijven, nu de onlangs tot Standaard verheven platina-iridium Meter aan de Polytechnische School te Delft ter bewaring werd afgestaan. Aldus wordt besloten.

2⁰. eene uitnoodiging van den Rector der Universiteit van Bologna, aan de Akademie gezonden om zich bij het achtste eeuwfeest, dat op 12 Juni gevierd zal worden, te doen vertegenwoordigen.

Daar op dit oogenblik geen der leden zich bereid verklaart, die vertegenwoordiging te aanvaarden, wordt besloten de gelegenheid daartoe tot 15 Febr. a s. open te houden, als wanneer de Secretaris der Letterkundige Afdeeling zich bereid heeft verklaard een Latijnsch antwoord op de in het Latijn geschreven uitnoodiging op te stellen.

— De Heer Bosscha leest, uit naam der Commissie voor de bliksemafleiders op 's Rijks Museum van schilderijen, het antwoord voor, aan den Minister van Binnenlandsche Zaken te geven op Z.Exs. brief van 10 Aug. ll. n⁰. 1739 Afd. Kunsten en Wetenschappen, waarin om nadere inlichtingen aangaande een periodiek onderzoek naar de deugdelijkheid der bliksemafleiders verzocht werd. Het antwoord wordt goedgekeurd en zal ter kennisse van den Minister gebracht worden.

— De Heeren Korteweg en Schoute brengen verslag uit over eene verhandeling des heeren Dr. G. Schouten, en stellen voor die in de werken der Akademie op te nemen. Aldus wordt besloten. Een paar opmerkingen, door de Commissie gemaakt en die wellicht eenigen invloed op de redactie van enkele plaatsen in het handschrift zouden kunnen hebben, zullen ter kennisse van den Schrijver gebracht worden, vóór tot het drukken der verhandeling wordt overgegaan.

— De Heer Hoffmann houdt een voordracht over den

oorsprong en de beteekenis der zoogenaamde vrije kernen en van den voedingsdooier bij de Beenvisschen. Spreker zet daarbij uiteen, hoe de verklaring van het aanwezig zijn der vrije kernen, in de volgens vaste wetten plaats hebbende aequatoriale splijting van het ei gezocht moet worden; hoe verder in het ei vermeerdering der kernen niet alleen plaats heeft door mitose, maar ook door eene buitengewone fragmentatie, en hoe eindelijk, naar aanleiding van zijne onderzoekingen, de aanleg van het bloed en van het bloedvatenstelsel niet in den mesoblast gezocht moet worden. Over de beteekenis der fragmentatie, die meer als de uitdrukking eener degeneratie der kernen door de meeste onderzoekers wordt aangezien, en den oorsprong van het bloed uit den mesoblast, ontspint zich eene korte discussie, waaraan de Heeren MAC GILLAVRY en HUBRECHT deelnemen.

— De Heer TREUB geeft daarna een, door afbeeldingen en enkele voorwerpen toegelicht, verhaal van zijn bezoek aan Krakatau op 19 Juni 1886. Dat bezoek had vooral ten doel de nieuwe flora van Krakatau te leeren kennen. Sedert de uitbarsting van den vulkaan aldaar is een nieuw plantenkleed ontstaan, dat, daar de bodem met eene laag asch en puimsteen van 1—60 meter bedekt is, onmogelijk een overblijfsel eener vroegere vegetatie zijn kan, evenmin als het op dit onbewoonde en onbewoonbare eiland door menschen kan zijn voortgebracht. Deze nieuwe flora bestaat aan het strand uit de bekende vegetatie, die men op alle koraaleilanden aantreft, en die afkomstig is van door de zee aangespoelde zaden. Op de hoogte van Krakatau vindt men een geheel anderen plantengroei, en wel uitsluitend Varens. Elf verschillende soorten van die plantengroep werden daar door den Spreker gevonden, en de wijze waarop zij zich daar ontwikkeld hadden, nader bestudeerd. Het bleek, dat de sporen dier Varens, eenmaal ter plaatse aangeland, aan den voor plantengroei zoo ongeschikten bodem werden vastgehouden door Draadwieren, wier verslijmend omhulsel een groenachtig waas aan de witte asch, die het eiland bedekt, verleende.

Spreker formuleert de uitkomsten van zijn ter plaatse ingesteld onderzoek in deze 4 punten:

1⁰. dat men — op veel te eenzijdige manier — de *koraal-eilanden* als type heeft beschouwd bij het bepalen der wijze, waarop eilanden door planten worden bevolkt;

2⁰. dat men, door die eenzijdigheid, geheel heeft miskend de hoogst belangrijke rol, welke Vaatcryptogamen — en in het bijzonder Varens — bij het begroeid geraken van *vulkanische eilanden* spelen;

3⁰. dat ongetwijfeld Vaatcryptogamen — en weder meer in het bijzonder Varens — eene even belangrijke rol gespeeld hebben, en nog zullen spelen, als aanzienlijke uitgestrektheden van een vast land door vulkanische uitbarstingen werden of worden verwoest — ten minste in warme luchtstreken;

4⁰. dat, ten minste in warme luchtstreken en op een vulkanischen bodem, niet Lichenen, doch Algen den groei van Vaatplanten mogelijk maken en voorbereiden.

Met eenige opmerkingen omtrent soortgelijke vegetatiën op Ascension en Juan Fernandez wordt deze voorloopige mededeeling besloten.

— Daar er verder niets te verhandelen is, wordt de Vergadering gesloten.

RAPPORT

OVER DE

BEPROEVING DER BLIKSEMAFLEIDERS OP HET RIJKSMUSEUM TE AMSTERDAM.



Als vervolg op ons Rapport over de plaatsing en inrichting der bliksemafleiders op het Rijksmuseum te Amsterdam en ter beantwoording van den brief van den Minister van Staat, Minister van Binnenlandsche Zaken, dd. 10 Augustus ll. n^0. 1739, Afdeeling Kunsten en Wetenschappen, hebben wij de eer aan de Natuurkundige Afdeeling dezer Akademie het volgende voor te dragen.

De beproeving der bliksemafleiders van het Rijksmuseum moet, naar onze meening, geschieden op gezette tijden, naar vaste regelen, door een persoon: ervaren in het samenstellen en plaatsen dier toestellen en tevens bekwaam in het verrichten van eenvoudige natuurkundige metingen.

Eene keuring eenmaal 's jaars, in de maanden April of Mei, schijnt in den regel voldoende. Bestaat er vermoeden of zekerheid dat de afleiders of het gebouw door een bliksemslag zijn getroffen geworden, dan dient een onderzoek der getroffene deelen zoo spoedig mogelijk te volgen.

De jaarlijksche beproeving moet bestaan in eene schouwing van het geheele samenstel der afleiding van het gebouw en in eene weêrstandsbepaling van bepaalde deelen der geleiding.

Alvorens tot de schouwing over te gaan, moet de persoon, met de beproeving belast, zich aanmelden bij den Architekt, aan wien het onderhoud van het gebouw is opgedragen,

ten einde eene opgaaf te verkrijgen van alle verbouwingen, veranderingen en herstellingen, welke sedert de laatstvoorgaande beproeving aan het gebouw hebben plaats gehad. Bij de algemeene schouwing moet hij meer in het bijzonder nagaan, van welken invloed de genoemde werkzaamheden geweest zijn op de samenstelling en het veilig behoud der afleidingen.

De weêrstandsbepalingen hebben telken jare betrekking op een drietal afleiders, op uiteengelegene deelen van het gebouw te kiezen, in dier voege dat telkens in drie jaren alle afleiders van het gebouw zijn onderzocht geworden.

Die bepalingen bestaan in:

1°. eene weêrstandsmeting van de geleidende verbinding, die het gebouw oplevert tusschen een vast aangenomen centraal punt van het dak en den voet van elk der drie te onderzoeken afleiders;

2°. eene weêrstandsmeting van de geleiding tusschen de spits van elken afleider en een nabijgelegen punt van het metalen dak;

3°. eene weêrstandsbepaling van de aardgeleiding van elk der drie te onderzoeken afleiders.

De afleiding van de directeurswoning moet telken jare worden geschouwd en, op eene dergelijke wijze als hierboven werd voorgeschreven, door weêrstandsmeting worden beproefd.

Van elke beproeving of onderzoeking zal een schriftelijk verslag worden opgemaakt, hetwelk door tusschenkomst van den Architekt, die met het toezicht over het gebouw is belast, aan den Minister van Binnenlandsche Zaken wordt toegezonden.

De uitvoering van de weêrstandsbepalingen zal kunnen bevorderd worden door het aanbrengen van vaste geleidingen. Het schijnt wijders wenschelijk, de metingen telken jare te doen plaats hebben met behulp van dezelfde werktuigen en standaardweêrstanden, welke te dien einde in het gebouw bewaard blijven.

Naardien de bijzonderheden, die op een en ander betrekking hebben, voor een groot deel afhangen van plaatselijke omstandigheden en van hetgeen dienaangaande bij

de eerste beproeving de ondervinding zal leeren, meent de Commissie te moeten aanbevelen dat de persoon, die tot het verrichten der beproevingen zal worden aangewezen, met haar in overleg trede tot het ontvangen van meer bepaalde aanwijzingen en, zoo noodig, tot het ontwerpen van eene nadere instructie.

Haarlem, *Amsterdam*, *Leiden*.
20 Januari 1888.

J. BOSSCHA.
J. D. VAN DER WAALS.
H. A. LORENTZ.

VERSLAG

OVER DE

VERHANDELING DES HEEREN Dr. G. SCHOUTEN:

„DE REGEL VOOR DEN BAANVORM EN DE EIGENSCHAPPEN DER CENTRALE BEWEGING GRAPHISCH TOEGELICHT".

(Uitgebracht in de Vergadering van 28 Januari 1888).

In het jaar 1855 is door BENJAMIN PEIRCE in zijne »*Physical and celestial mechanics*" eene graphische methode ter bestudeering van centrale banen medegedeeld, welke meerdere aandacht blijkt te verdienen dan er tot heden aan gewijd schijnt te zijn.

Zet men op de abscissen-as van een rechthoekig coördinaten-stelsel het vierkant van de reciproke waarde van den voerstraal af, en gebruikt men als ordinaat de waarde van de potentiaalfunctie der centrale kracht met omgekeerd teeken, zoodat eene kromme (potentiaalkromme) ontstaat, wier gedaante afhankelijk is van de heerschende krachtenwet, dan kunnen verschillende grootheden, die op de centrale baan betrekking hebben, onmiddellijk uit de figuur afgelezen worden, nadat vooraf in die figuur eene rechte lijn getrokken is, die op bepaalde wijze met de te onderzoeken baan samenhangt. Deze rechte namelijk, die naar de zijde der positieve abscissen stijgende zal moeten zijn, behoort tot richtingscoëfficiënt te bezitten het dubbele vierkant der sectorsnelheid, terwijl de ordinaat van haar snijpunt met de ordinaten-as bepaald wordt door de energie in de baan met

tegengesteld teeken. Banen van gelijke sectorsnelheid worden dus voorgesteld door evenwijdige lijnen; die van gelijke energie door lijnen, gaande door éénzelfde punt der ordinaten-as, lager gelegen naarmate die energie grooter is.

Terwijl de snijpunten dezer rechte met de potentiaalkromme apo- en pericentra der baan aanwijzen, zijn alleen die gedeelten der rechte, waar zij zich *beneden* de potentiaalkromme bevindt, voor de centrale banen van beteekenis. Zij nu A (fig. 7 van de verhandeling van den Heer Schouten) een punt op zulk een gedeelte der rechte gelegen, bezittende y_1 tot ordinaat; C het punt der potentiaalkromme 'twelk dezelfde abscis en $y_2 > y_1$ tot ordinaat bezit; wordt voorts door D, het snijpunt der rechte met de ordinaten-as eene lijn $y = y_0$ getrokken; dan wordt de radiale snelheid in het met A overeenkomstige punt der centrale baan gemeten door $\sqrt{2(y_2 - y_1)}$, de totale snelheid door $\sqrt{2(y_2 - y_0)}$, de sinus van den hoek μ tusschen voerstraal en raaklijn door $\sqrt{\frac{y_1 - y_0}{y_2 - y_0}}$, ja zelfs de kromtestraal ϱ der centrale baan hangt op eenvoudige wijze met de figuur samen. Trekt men in C de raaklijn aan de potentiaalkromme en door het snijpunt dier raaklijn met de ordinaten-as eene lijn $y = y_3$, dan is:

$$\varrho \sin \mu = \frac{y_2 - y_0}{y_2 - y_3} \cdot r.$$

Het is van deze wijze van graphische voorstelling dat de Heer Schouten gebruik maakt om de vroeger door hem (*Versl. en Meded.* 3[de] Reeks, Deel III) en door den eerstondergeteekende (*Versl. en Meded.*, 2[de] Reeks, Deel XX) ontwikkelde eigenschappen der centrale banen en de regels ter bepaling van den baanvorm af te leiden, en het moet erkend worden dat, door de methode van Peirce toe te passen en uit te breiden op de wijze zooals zulks door den Heer Schouten is geschied, een bijzonder helder inzicht verkregen wordt in de vroeger gevonden stellingen. Zoo blijkt het dat in een stabiliteitsgebied de potentiaalkromme hare

holte naar beneden, in een instabiliteitsgebied naar boven keert, terwijl uit deze omstandigheid de kenmerkende eigenschappen van deze beide soorten van gebied geheel ongezocht voortvloeien. Eene raaklijn aan de kromme stelt namelijk in het eene geval slechts eene stabiele cirkelbaan, in het andere eene cirkelspiraalbaan, welke baanvorm aan PEIRCE onbekend schijnt geweest te zijn, met hare asymptotische instabiele cirkelbaan voor.

Op één enkel punt verschillen wij met den Heer SCHOUTEN van gevoelen. Het betreft het zeer bijzondere geval dat de eerste afgeleide van de kracht naar den afstand oneindig groot wordt en de snelheid juist de waarde en richting der cirkelsnelheid bezit. Volgens Dr. SCHOUTEN, en in afwijking met zijne vroeger uitgesproken meening (*Versl. en Meded.*, 3de Reeks, Deel III, p. 408; vergelijk ook 2de Reeks, Deel XX, p. 265) is dan toch de cirkelbaan onmogelijk, maar zal eene andere baan beschreven worden, die met de cirkelbaan eene aanraking van hoogere orde bezit. Wij meenen daarentegen dat hier twee banen mogelijk moeten worden geacht, zelfs somtijds, zooals blijken zal, een drietal.

Laat om dit toe te lichten:

$$F = F_0 + A(r - r_0)^{\varepsilon} + \text{ termen met hoogere machten van } (r - r_0)$$

$$\varepsilon < 1$$

de centrale kracht aangeven, dan zal aan de bewegingsvergelijkingen:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -F; \; 2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$$

voortdurend voldaan worden door:

$$r = r_0 \qquad \varphi = \omega t$$

mits:

$$r_0 \, \omega^2 = F_0$$

en het schijnt ons, dat daarom de cirkelbaan als eene mogelijke baan moet worden erkend. *Daarnaast* bestaat nu echter eene oplossing:

$$r = r_0 + \alpha\,(\pm\,t)^{\frac{2}{1-\varepsilon}} + \text{hoogere machten van } t$$

$$\varphi = \omega\,t + \beta\,(\pm\,t)^{\frac{3-\varepsilon}{1-\varepsilon}} + \text{hoogere machten van } t$$

alwaar α en β moeten voldoen aan de voorwaarden:

$$\frac{2\,\alpha\,(1+\varepsilon)}{(1-\varepsilon)^2} = -\,A\,\alpha^{\varepsilon}; \quad \pm\,\frac{2\,\alpha\,\omega}{1-\varepsilon} + \frac{(3-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)^2}\,\beta\,r_0 = 0$$

verkregen door op de laagste machten van t acht te slaan. Voor α vindt men hieruit, behalve $\alpha = 0$ welke oplossing weder tot de cirkelbeweging terugvoert en met de andere gelijk recht van bestaan bezit,

$$\alpha^{1-\varepsilon} = -\,\frac{A\,(1-\varepsilon)^2}{2\,(1+\varepsilon)}.$$

Daarbij zullen nu, aannemende dat ε een meetbaar gebroken is, verschillende gevallen te onderscheiden zijn, naar gelang teller en noemer even of oneven zijn. Zijn beiden bijv. oneven en is A positief, dan wordt deze oplossing onbestaanbaar en de cirkelbaan is de eenig mogelijke. Inderdaad bevindt zich dan aan weerskanten stabiliteitsgebied. Is A daarentegen negatief, dan zijn naast de cirkelbaan twee banen: eene binnen- en eene buitenwaartsche, mogelijk. In het algemeen, zal eene dergelijke baan steeds gevonden worden aan de zijde waar zich instabiliteitsgebied bevindt. Daarbij dient dan ook op het geval:

$$F = F_0 + A\,(r_0 - r)^{\varepsilon} + \dots$$

gelet te worden.

Wellicht vindt de schrijver in het bovenstaande aanlei-

ding tot eenige wijziging, want ook afgezien van de meer speculatieve zijde van het hier opgeworpen vraagstuk, schijnt ons zijne berekening eenige herziening te behoeven. In elk geval betreft het geheele punt van verschil eene bijzaak en bevelen wij gaarne zijne verhandeling ter opneming in de Verslagen en Mededeelingen aan.

D. J. KORTEWEG.
P. H. SCHOUTE.

DE REGEL VOOR DEN BAANVORM

EN DE

EIGENSCHAPPEN DER CENTRALE BEWEGING.

GRAPHISCH TOEGELICHT DOOR

Dr. G. SCHOUTEN.



I. Inleiding.

De uitkomsten gevonden in de verhandeling »Algemeene regel voor den baanvorm en duur der centrale beweging'' *) zijn hoofdzakelijk afgeleid uit de vergelijking:

$$\tfrac{1}{2} r'^2 = \tfrac{1}{2} r_0'^2 + \int_{r_0}^{r} \frac{C^2 - F r^3}{r^3} dr$$

door na te gaan, òf, en zoo ja, op welke afstanden tot het centrum de radiale snelheid nul wordt, m. a. w. door de wortels te bepalen van de vergelijking:

$$\tfrac{1}{2} r_0'^2 + \int_{r_0}^{r} \frac{C^2 - F r^3}{r^3} dr = 0.$$

In de volgende bladzijden zullen deze wortels *graphisch* geconstrueerd worden. De krommen, wier onderlinge snijpunten de wortels zullen geven, kunnen zoo gekozen wor-

*) *Verslagen en Mededeelingen der Koninkl. Akad. van Wetensch.*, Afd. Natuurk., 3de Reeks, Deel III.

den, dat een er van in een rechte lijn overgaat; de richting er van wordt bepaald door de *sectorsnelheid* der beweging (de vlakte n.l. door den voerstraal in de tijdseenheid beschreven), terwijl overigens hare ligging in het vlak enkel afhangt van de *energie*, waarmede de beweging plaats grijpt.

De andere kromme wordt bepaald door de krachtenwet alleen.

Is dus deze kromme op een rechthoekig coördinaten-stelsel geteekend, dan zal elke lijn in haar vlak getrokken in de punten, waar ze deze snijdt, de afstanden geven, waar de *peri-* en *apocentra* der baan gelegen zijn. De *sectorsnelheid*, waarmede de beweging in die baan plaats grijpt, zal bepaald worden door den hoek, dien de lijn met de abscissen-as maakt, terwijl de *energie* van 't bewegend punt gegeven wordt door het snijpunt der lijn met de ordinaten-as.

Een verplaatsing van de lijn in het vlak zal op graphische wijze het verband aanwijzen, dat er tusschen de *ligging en afmeting* der baan en de *sectorsnelheid en energie* van de beweging in die baan bestaat, en ons voeren tot een algemeenen regel voor den baanvorm, die overeenstemt met dien, welke gegeven is in § 51 van bovengenoemde verhandeling.

Verder zal de kromme blijken eigenschappen te bezitten, wier kennis in staat stelt een menigte eigenschappen der centrale beweging uit een figuur te lezen. Alle eigenschappen der banen zoowel in bovengenoemde verhandeling als in die van Prof. KORTEWEG »Over de banen beschreven onder den invloed eener centrale kracht'' *) voorkomende, vinden we op die wijze terug.

Omdat de graphische methode uit den aard der zaak niets leert omtrent den duur der beweging, en de kennis omtrent het al of niet eindig zijn van den duur toch een vereischte is om over de werkelijke beweging te kunnen oordeelen, zoo zullen we door de notatie (*A. R.* §) verwijzen naar

---

*) *Verslagen en Mededeelingen der Kon Akad. v. Wetens.*, Afd. Natuurk., 2de Reeks, Deel XX.

de § van den »Algemeene regel voor enz.", waar de berekening een beslissing geeft.

De eer van de gelukkige keuze voor de krommen, die in dit geval de wortels der vergelijking bepalen, komt toe aan B. Peirce. Althans in zijn werk *A system of Analytic Mechanics* past hij de graphische methode toe; en hoewel zijn onbekendheid met banen met asymptotische binnen- en buitencirkels een leemte veroorzaakt in zijne toepassing, zijn toch de uitkomsten door hem gevonden zoo verrassend eenvoudig, dat ze mij aanspoorden een poging aan te wenden om die leemte aan te vullen.

II. De potentiaalkromme en de sectorlijn.

1. Stellen we in de formule (6) van (*A. R.* § 2), nl.:

$$\tfrac{1}{2} r'^2 = \tfrac{1}{2} r_0'^2 + \int_{r_0}^{r} \frac{C^2 - F r^3}{r^3} dr:$$

$$\int - F\, dr = U,$$

$$\int - \frac{C^2}{r^3} dr = V,$$

dan gaat ze over in

$$\tfrac{1}{2} r'^2 = \tfrac{1}{2} r_0'^2 + V_0 - V + U - U_0,$$

of ook, omdat

$$\tfrac{1}{2} r_0'^2 + V_0 = \tfrac{1}{2} r_0'^2 + \frac{C^2}{2 r_0^2} = \tfrac{1}{2} v_0^2$$

is, in

$$\tfrac{1}{2} r'^2 = U - (V + U_0 - \tfrac{1}{2} v_0^2).$$

Omdat de eerste voorwaarde voor de mogelijkheid der beweging is, dat r'^2 geen negatieve waarden mag hebben,

zoo zal alleen beweging kunnen plaats grijpen op afstanden, voor welke

$$U \geqq V + U_0 - \tfrac{1}{2} v_0^2$$

is. Wordt nu U als ordinaat y genomen op een rechthoekig coördinaten-stelsel, waarvan r de abscis is, dan zal

$$y = U$$

de vergelijking eener kromme voorstellen, welker gedaante alleen afhangt van de krachtenwet, en die door PEIRCE *potentiaalkromme* is genoemd.

Wordt evenzoo $V + U_0 - \tfrac{1}{2} v_0^2$ als ordinaat uitgezet, dan stelt

$$y = V + U_0 - \tfrac{1}{2} v_0^2$$

de vergelijking eener tweede kromme voor, welker vorm alleen zal afhangen van de *sectorsnelheid* $\tfrac{1}{2} C$, en daarom *sectorkromme* genoemd zal worden.

Zijn beide krommen op hetzelfde coördinatenstelsel geteekend, dan zullen alle deelen der potentiaalkromme, wier ordinaten grooter zijn dan de overeenkomstige ordinaten der sectorkromme, of, zooals we dit in 't vervolg zullen uitdrukken, die *boven* de sectorkromme gelegen zijn, de afstanden aanwijzen, op welke de beweging alleen mogelijk is.

2. Daar $V = \dfrac{C^2}{2\, r^2}$ is, zal de sectorkromme in een rechte lijn overgaan, als niet r maar $\dfrac{1}{r^2}$ als abscis wordt uitgezet.

Kiezen we dus op het voorbeeld van PEIRCE $\dfrac{1}{r^2}$ tot abscis x, en drukken we ook U in x uit, dan stellen

$$y = U \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$y = \tfrac{1}{2} C^2 x + U_0 - \tfrac{1}{2} v_0^2 \ldots\ldots\ldots (2)$$

resp. de vergelijkingen voor van de *potentiaalkromme* en de *sectorlijn*.

3. Wordt aan de kracht F een nieuwe van den vorm

$\frac{\mu}{r^3}$ toegevoegd, dan wordt U vermeerderd met $\frac{\mu}{2\,r^2}$ of $\frac{1}{2}\,\mu\,x$. Laat men echter U onveranderd, maar vermindert men V met $\frac{1}{2}\,\mu\,x$, dan zal dit geen invloed op de waarde voor r'^2 hebben. Die vermindering van V zal C^2 in $C^2 - \mu$ veranderen, zoodat dus het vermeerderen van de centrale kracht met de waarde $\frac{\mu}{r^3}$ overeenkomt met een vermindering van C^2 met μ *).

4. Eigenschappen der potentiaalkromme.

De raaklijn aan de potentiaalkromme maakt met de abscissen-as een hoek, welks tangens $\frac{d\,y}{d\,x}$ gegeven wordt door

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,U}{d\,r} : \frac{d\,x}{d\,r} = \tfrac{1}{2}\,F\,r^3 \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Hieruit volgt:

De potentiaalkromme stijgt bij toenemende abscissen voor aantrekkende, daalt voor afstootende krachten †).

Waar dus de potentiaalkromme evenwijdig is aan de abscissen-as, is de kracht nul, waar ze er loodrecht op gericht is echter oneindig groot. Voor $F = \frac{\mu}{r^3}$ is de potentiaalkromme een rechte lijn.

5. Verder is

$$\frac{d^2\,y}{d\,x^2} = \frac{d\,\frac{1}{2}\,F\,r^3}{d\,r} : \frac{d\,x}{d\,r} = -\,\tfrac{1}{4}\,r^3\,\frac{d\,F\,r^3}{d\,r} \qquad \ldots\ldots \quad (4)$$

Hieruit volgt:

Die deelen der potentiaalkromme, welke hunne *bolle* zijde naar de ordinaten-as gekeerd hebben, geven de afstanden aan, voor welke $F\,r^3$ een wassende functie van r is; daar-

---

*) Hiermede is de stelling van A. R. § 4 bewezen. Bovenstaand bewijs komt voor bij PEIRCE, § 707.

†) PEIRCE, § 709.

entegen zullen die deelen der potentiaalkromme, welke hunne *holle* zijde naar de ordinaten-as keeren, de afstanden aangeven, voor welke Fr^3 een afnemende functie van r is. Elk buigpunt der potentiaalkromme geeft een afstand, voor welken Fr^3 een maximum- of minimumwaarde bereikt.

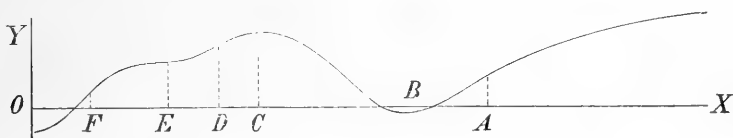
Deze eigenschappen laten zich op de volgende wijze in woorden brengen, als wij gebruik maken van de benamingen, die Prof. KORTEWEG in zijn Verhandeling gebruikt *):

In een afstootingsgebied is de potentiaalkromme dalende bij toenemende abscissen.

In een stabiliteitsgebied heeft de potentiaalkromme haar BOLLE, *in een instabiliteitsgebied haar* HOLLE *zijde naar de* POSITIEVE *ordinaten-as gekeerd. Elk buigpunt in een stijgend deel wijst de grens aan tusschen een stabiliteits- en instabiliteits-gebied.*

In een omgekeerde derdemachts-gebied is de potentiaalkromme een rechte lijn.

Is dus de potentiaalkromme geteekend, dan zal ze de verschillende soorten van gebied aangeven, waaruit het bewegingsveld bestaat.



Is bovenstaande kromme de potentiaalkromme voor zekere krachtenwet, dan zal rondom het centrum tot op een afstand, aangegeven door het punt A, een *stabiliteitsgebied* gelegen zijn. Daarop volgen in volgorde naar de oneindige ruimte een *instabileitsgebied* AB, een *afstootingsgebied* BC, een *stabiliteitsgebied* CD, een *instabiliteitsgebied* DE, een *stabiliteitsgebied* EF, en eindelijk een *instabiliteitsgebied* FO.

*) KORTEWEG § 3. Het gebied, waar de kracht *afstootende* werkt, heet een *afstootingsgebied;* waar ze *aantrekkende* is, een *stabiliteitsgebied* ingeval Fr^3 een *wassende,* een *instabiliteitsgebied* als Fr^3 een *afnemende* functie van r is. Is Fr^3 standvastig, dan heet het gebied een *omgekeerde derdemachts-gebied.*

6. De weg naar het centrum ligt voor 't punt open, als voor $r = 0$ of $x = \infty$

$$U \geqq V + U_0 - \tfrac{1}{2} v_0^2$$

is. Daar voor $r = 0$ $V = \int_0^\infty \frac{C^2}{r^3} dr$ en $U - U_0 = \int_0^{r_0} F dr$

is, gaat deze ongelijkheid nu over in

$$\tfrac{1}{2} v_0^2 + \int_0^r F dr \geqq \int_0^\infty \frac{C^2}{r^3} dr,$$

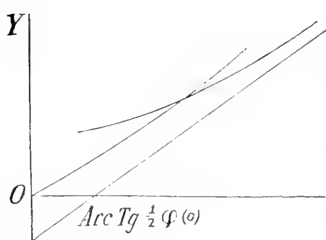
welke volgens de notaties van (A. R. § 44) op de volgende wijze kan geschreven worden:

$$A \geqq A_0.$$

Dit stemt volgens (A. R. § 51) met de berekening overeen. Volgens (A. R. § 52) zal de spiraalvormige tak, die naar het centrum voert, een *eindig* of *oneindig* aantal windingen hebben, naar gelang $\varphi(o)$ ($F r^3 = \varphi(r)$ stellende) *oneindig groot* of *eindig* is, d. w. z. naar gelang de potentiaalkromme voor oneindig groote abscissen de ordinaten-as tot grensrichting heeft of niet. Het laatste moet het geval wezen, als het centrum omgeven is van een *stabiliteits-gebied*, het eerste kan alleen 't geval wezen als om het centrum een *instabiliteitsgebied* ligt.

Gevolg. Omdat de potentiaalkromme voor alle afstanden, op welke de beweging plaats grijpt, *boven* of *op* de sectorlijn moet gelegen zijn, zoo zal noodzakelijk

$$C^2 \leqq \varphi(o)$$



zijn, als de baan zich tot in het centrum uitstrekt. Doch deze voorwaarde is, wat $C^2 = \varphi(0)$ betreft, niet voldoende. Wordt toch het centrum door een *instabiliteitsgebied* omringd, dan zal de potentiaalkromme een asymp-

toot hebben. Heeft nu de sectorlijn de richting van die asymptoot, maar ligt ze *boven* deze, dan zal ze de potentiaalkromme zeker snijden, zoodat de weg naar het centrum is afgesneden.

Dezelfde uitkomst is door berekening gevonden in (A. R. § 33—36), waar is aangetoond, dat voor $C^2 = \varphi(0)$ het centrum dan alleen bereikt wordt, als tegelijkertijd $A < A_0$ is.

7. De weg naar het oneindige ligt voor het punt open, als voor $r = \infty$ of $x = 0$:

$$U \geqq V + U_0 - \tfrac{1}{2} v_0^2$$

is. Nu is voor $r = \infty$ $V = 0$ en $U - U_0 = -\int_{r_0}^{\infty} F\,dr$, zoodat de ongelijkheid overgaat in

$$\tfrac{1}{2} v_0^2 - \int_{r_0}^{\infty} F\,dr \geqq 0,$$

of ook in

$$\tfrac{1}{2} v_0^2 + \int_0^{r_0} F\,dr \geqq \int_0^{\infty} F\,dr,$$

welke met behulp van de notaties in (A. R. § 44) als volgt geschreven kan worden:

$$A \geqq A_\infty .$$

Dit stemt overeen met de berekening (A. R. § 51).

Gevolg. Wordt het bewegingsveld begrensd door een *stabiliteitsgebied*, dan zal voor $A = A_\infty$ noodzakelijk



$$C^2 < \varphi(\infty)$$

moeten zijn, terwijl $C^2 \geqq \varphi(\infty)$ alle beweging op zeer grooten afstand van 't centrum uitsluit. Dit stemt overeen met (A. R. § 18). Is echter op oneindigen



afstand een *instabiliteitsgebied* gelegen, dan zal voor $A = A_\infty$ noodzakelijk:

$$C^2 \leqq \varphi(\infty)$$

moeten zijn, daar $C^2 > \varphi(\infty)$ de beweging op zeer grooten afstand uitsluit.

Dit stemt overeen met (A. R. § 43).

8. EIGENSCHAPPEN DER SECTORLIJN.

De sectorlijn maakt met de abscissen-as een hoek φ, welks tangens gelijk $\frac{1}{2} C^2$ is, terwijl ze de ordinaten-as snijdt in een punt, dat op een afstand $U_0 - \frac{1}{2} v_0^2$ van den coördinatenoorsprong ligt.

Hieruit volgt:

1. *Een verplaatsing van de sectorlijn evenwijdig aan zich zelve zal alle banen leeren kennen, die met dezelfde sectorsnelheid worden beschreven.*

Geschiedt de verplaatsing van de sectorlijn zóó, dat haar snijpunt met de ordinaten-as zich in de negatieve richting van deze verplaatst, dan zal de energie van de overeenkomstige beweging van 't punt toenemen.

2. *Een wenteling van de sectorlijn om een punt van de ordinaten-as zal alle banen doen kennen, welke met dezelfde energie beschreven worden.*

9. In elk punt, waar de sectorlijn de potentiaalkromme snijdt, is $r' = 0$, maar $\frac{1}{2} C^2 \gtrless \frac{1}{2} F r^3$, of ook, daar volgens (A. R. § 2, formule (4)) $\dfrac{C^2 - F r^3}{r^3} = r''$ is, $r'' \gtrless 0$.

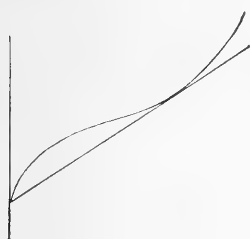
Zulk een snijpunt geeft dus een afstand aan, waar de baan een apo- of pericentrum heeft, daar de berekening heeft geleerd, dat zulk een afstand steeds door het bewegende punt wordt bereikt.

Wij vinden dus:

Elk snijpunt van de sectorlijn met de potentiaalkromme geeft een apo- of pericentrum van de baan; een APOCENTRUM, *als de potentiaalkromme zich* BOVEN, *een* PERICENTRUM, *als ze zich* ONDER *de sectorlijn voortzet.*

10. In elk punt, waar de sectorlijn de potentiaalkromme raakt, is niet alleen $r' = 0$ maar ook $r'' = 0$.

Ligt zulk eén raakpunt in een stabiliteitsgebied, dan kan de beweging op den afstand door het raakpunt aangegeven slechts cirkelvormig wezen.



Ligt het raakpunt echter in een instabiliteitsgebied, dan bestaat de *mogelijkheid*, dat het punt de cirkelbaan verlaat.

Teneinde dit nader te onderzoeken, stellen we de functie $C^2 - \varphi(r)$, welke voor $r = r_0$ gelijk nul is, onder de volgende gedaante:

$$C^2 - \varphi(r) = A\, r^3 \varrho (r - r_0)^{\varepsilon} + \text{termen met hoogere machten van } (r - r_0).$$

A stelt een constante voor en ϱ een functie van r, die zoowel op als even buiten de cirkelbaan eindige positieve waarden heeft. Verder is ε in zooverre willekeurig, dat ze grooter dan 0 moet zijn en voor $\varphi(r)$ dus ook voor F een bestaanbare waarde levert voor $r < r_0$.

Is ε b. v. een breuk met *oneven* teller en noemer, dan ligt de cirkelbaan in een stabiliteitsgebied voor $A < 0$, in een instabiliteitsgebied voor $A > 0$; is de teller echter *even*, de noemer dus oneven, dan vormt de cirkelbaan de grens tusschen een *stabiliteits-* en een *instabiliteitsgebied*, het laatste buitenwaarts voor $A > 0$, echter binnenwaarts voor $A < 0$.

In de gemaakte onderstelling voor $C^2 - \varphi(r)$ volgt uit

$$\tfrac{1}{2}\, r'^2 = \int_{r_0}^{r} \frac{C^2 - \varphi(r)}{r^3}\, dr:$$

$$\tfrac{1}{2}\, r'^2 = A_1\, \varrho_1\, (r - r_0)^{\varepsilon + 1} + \ldots$$

waaruit op nieuw blijkt dat voor $A < 0$ de beweging buiten de cirkelbaan onmogelijk is.

Verder is

$$r' = \pm \lambda (r-r_0)^{\frac{\varepsilon+1}{2}} + \dots \dots \dots \dots (a)$$

waar λ een veranderlijke factor is.

Wordt deze vergelijking geïntegreerd, dan komt er

$$t-t_0 = \lambda_1 (r-r_0)^{\frac{1-\varepsilon}{2}} + \dots \dots \dots \dots (b)$$

als ε ongelijk aan 1 is; echter

$$t-t_0 = \lambda_1 \, l \, (r-r_0) + \dots \dots \dots \dots (c)$$

voor $\varepsilon = 1$.

Hieruit blijkt, dat vóor $\varepsilon \geqq 1$ de eenig mogelijke oplossing is $r = r_0$; dat voor $\varepsilon < 1$ de onderstelling $r = r_0$ *uitgesloten* is. Deze is een *singuliere* oplossing van de bewegingsvergelijkingen, wat zoowel uit de algemeene oplossing (b) als uit de differentiaalvergelijking (a) blijkt.

Volgens (b) is $\frac{dr}{dt_0}$ op het teeken na gelijk aan $\frac{dr}{dt}$, zoodat

$$\frac{dr}{dt_0} = \mp \lambda (r-r_0)^{\frac{\varepsilon+1}{2}} + \dots$$

is. Omdat deze uitdrukking voor $\frac{dr}{dt_0}$ nul is voor $r = r_0$, zal de oplossing $r = r_0$ een *singuliere* wezen.

Evenzoo volgt uit (a):

$$\frac{dr'}{dr} = \frac{r''}{r'} = \pm \mu (r-r_0)^{\frac{\varepsilon-1}{2}} + \dots$$

zoodat $\frac{dr'}{dr}$ voor $r = r_0$ een oneindig groote waarde verkrijgt, als $\varepsilon < 1$ is, waaruit op nieuw blijkt, dat $r = r_0$ een *singuliere* oplossing is.

(Vergelijk Boole, *A Treatise on Differential Equations,* Chap VIII, art. 11).

In het laatste geval moet de baan, die het punt beschrijft, met de cirkelbaan een aanraking van hoogere orde hebben. Terwijl bij de *singuliere* oplossing $r = r_0$ alle afgeleiden $r^{(n)}$ van r naar den tijd nul zijn, zal dit niet het

geval kunnen zijn met alle afgeleiden, zooals die door differentiatie uit de bewegingsvergelijkingen voortvloeien, als daarin $r = r_0$ gesteld wordt. Is $r_0^{(n)}$ de eerste onder deze, die *niet* nul wordt, zal de aanraking van de $(n-1)^e$ orde wezen.

Omdat

$$r^{(n)} = \frac{d\,r^{(n-1)}}{d\,r} \cdot r'$$

is, zal de exponent van de laagste macht van $(r-r_0)$ bij elke volgende afgeleide met 1 verminderd doch met $\frac{\varepsilon+1}{2}$ vermeerderd, dus in 't geheel met $\frac{1-\varepsilon}{2}$ verminderd worden. Die exponent is bij $r^{('')}$ ε, dus bij $r^{(n)}$ $\varepsilon-(n-2)\frac{1-\varepsilon}{2}$ of $\frac{n}{2}\,\varepsilon - \frac{n-2}{2}$. Hieruit volgt:

$$r_0^{(n)} = \begin{matrix} 0 \\ \text{eindig} \\ \infty \end{matrix} \text{ voor } \varepsilon \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \frac{n-2}{n},$$

$$r_0^{(n+1)} = \begin{matrix} 0 \\ \text{eindig} \\ \infty \end{matrix} \text{ voor } \varepsilon \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \frac{n-1}{n+1},$$

zoodat de aanraking van de n^e orde zal wezen, als ε voldoet aan de ongelijkheid

$$\frac{n-2}{n} < \varepsilon \leqq \frac{n-1}{n+1},$$

welke ook op de volgende wijze kan geschreven worden:

$$n < \frac{2}{1-\varepsilon} \leqq n+1$$

waar $(1-\varepsilon)$ den graad van oneindigheid van $-\varphi'(r_0)$ voorstelt.

Is dus $-\varphi'(r_0) = \infty$, dan zal het punt de cirkelbaan onmiddellijk verlaten; of het zich buiten dan wel binnen deze zal gaan bewegen, blijft onbeslist; beide richtingen zijn even goed mogelijk, onverschillig van welke orde de aanraking zij. Vormt de cirkelbaan evenwel de grens tus-

schen een stabiliteits- en een instabiliteitsgebied, dan zal de beweging in het laatste plaats grijpen.

Anders is het, als het punt gedurende zijn beweging op de cirkelbaan komt in den toestand $r' = 0$ en $r'' = 0$. Dit zal het geval zijn, als de sectorsnelheid en energie van de beweging gelijk zijn aan dezelfde grootheden bij het begin der beweging op den cirkel. Is de aanraking van *even* orde, dan zal het punt de cirkelbaan *overschrijden*, is ze van *oneven* orde, dan zal het punt terugkeeren, na de cirkelbaan bereikt te hebben. De cirkelbaan is dan de *omhullende* van alle mogelijke banen, die het punt onder dezelfde krachtenwet kan beschrijven.

De gevonden uitkomsten laten zich in de volgende woorden samenvatten, als onder (C, r_0) een cirkelbaan verstaan wordt met den straal r_0, waar langs het bewegende punt voortbewogen wordt met de sectorsnelheid $\frac{1}{2}$ C.

Ligt de cirkelbaan (C, r_0) *in een stabiliteitsgebied, dan is ze de eenig mogelijke baan.*

Ligt ze in een instabiliteitsgebied, dan evenzoo als $-\varphi'(r_0)$ *een eindige waarde heeft. Is echter* $-\varphi'(r_0)$ *een oneindig groot van de orde* η, *dan zal de cirkelbaan niet beschreven worden. De baan van het punt zal met de cirkelbaan een aanraking hebben, waarvan de orde wordt aangegeven door het grootste geheele getal, dat kleiner is dan* $\frac{2}{\eta}$ *).

Voor elke cirkelbeweging vinden we:

De sectorsnelheid $\frac{1}{2}$ C, *waarmede de cirkelbeweging op eenigen afstand plaats grijpt, wordt bepaald door den hoek* $\varphi = Arc.\ Tg.\ \frac{1}{2} C^2$, *dien de raaklijn aan het overeenkomstige punt der potentiaalkromme met de abscissen-as maakt.*

11. De afstand van het raakpunt tot de lijn, die evenwijdig aan de abscissen-as getrokken wordt door het snijpunt van de raaklijn met de ordinaten-as, wordt gegeven door

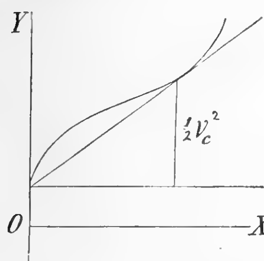
---

*) Deze uitkomst kwam ook voor in de verhandeling, zooals ik die voor de werken van de Kon. Akad. van Wetenschappen aanbood; evenwel was ze daar op een andere wijze afgeleid.

$$x \times \tfrac{1}{2} F r^3 = \tfrac{1}{2} F r = \tfrac{1}{2} v_c^2,$$

als v_c de snelheid der cirkelbeweging voorstelt.

Bijgevolg:

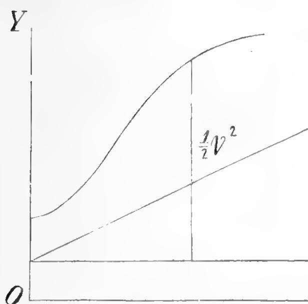


Het halve vierkant van de snelheid, waarmede de cirkelbeweging op zekeren afstand plaats grijpt, wordt gegeven door den afstand van het overeenkomstige punt der potentiaalkromme tot de lijn, die evenwijdig aan de abscissen-as getrokken wordt door het snijpunt van de ordinaten-as met de raaklijn aan de potentiaalkromme.

12. De afstand van een punt der potentiaalkromme tot de lijn, die evenwijdig aan de abscissen-as getrokken wordt door het snijpunt der sectorlijn met de ordinaten-as wordt bepaald door

$$U - (U_0 - \tfrac{1}{2} v_0^2) = \tfrac{1}{2} v_0^2 + \int_r^{r_0} F\,d\,r = \tfrac{1}{2} v^2 \text{ *)}.$$

Bijgevolg:



Het halve vierkant, waarmede de beweging op zekeren afstand plaats grijpt, wordt gegeven door den afstand van het overeenkomstige punt der potentiaalkromme tot de lijn, die evenwijdig aan de abscissen-as getrokken wordt door het snijpunt van sectorlijn en ordinaten-as.

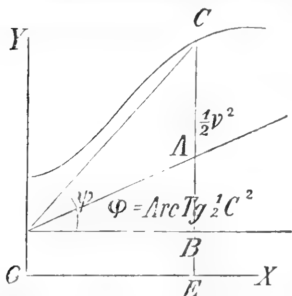
Tevens blijkt, dat *de inhoud van den driehoek, die door de ordinaat wordt afgesneden van den hoek, dien de sectorlijn met bovengenoemde lijn maakt, gelijk is aan*

$$\tfrac{1}{2} x \cdot \tfrac{1}{2} C^2 x = \frac{C^2}{4\,r^4} = \left(\tfrac{1}{2} \frac{d\,\theta}{d\,t}\right)^2 =$$

het vierkant van de halve hoeksnelheid, waarmede de voerstraal van het bewegende punt wentelt.

*) Peirce § 712.

13. *De hoek ψ, dien de verbindingslijn van een punt der potentiaalkromme met het snijpunt der sectorlijn en de ordinaten-as maakt met de abscissen-as, wordt bepaald door*



$$tg\ \psi = \frac{\frac{1}{2}\ v^2}{x} = \tfrac{1}{2}\ v^2\ r^2.$$

14. Is (r, s) de hoek, dien de voerstraal van 't bewegende punt met de raaklijn aan de baan maakt, dan volgt uit het beginsel der vlakten, nl. $v\, r\, sin\,(r, s) = C$:

$$sin^2\,(r, s) = \frac{C^2}{v^2\ r^2} = \frac{tg\ \varphi}{tg\ \psi}\ ^{*)}$$

als ψ de hoek is in § 13 genoemd, en $\varphi = Arc.\ Tg\ \frac{1}{2}\ C^2$ de hoek, dien de sectorlijn met de abscissen-as maakt.

15. Is ϱ de kromtestraal van de baan, dan volgt uit $\frac{v^2}{\varrho} = F\, sin\,(r, s)$:

$$\frac{\varrho\ sin\,(r, s)}{r} = \frac{v^2}{F\,r} = \frac{v^2}{v_c{}^2}\ ^{\dagger)}.$$

Bijgevolg: *de projectie van den kromtestraal der baan op den voerstraal staat tot dien voerstraal zelf als het vierkant der snelheid tot dat der cirkelsnelheid.*

III. Eigenschappen van de banen der centrale beweging.

16. Met behulp van de ontwikkelde eigenschappen van potentiaalkromme en sectorlijn worden de volgende eigenschappen der banen uit een figuur afgelezen.

---

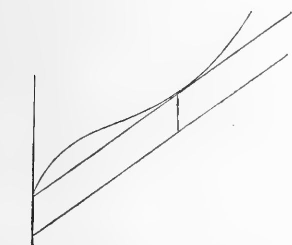
*) Peirce geeft $sin^2\,(r, s) = \frac{AB}{BC}$.

†) Peirce geeft in § 712 een eenigszins andere uitdrukking voor den kromtestraal.



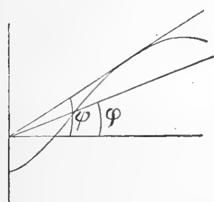
a. Elke cirkelbaan in een $\frac{\textit{stabiliteits-}}{\textit{instabiliteits-}}$ *gebied snijdt alle banen in dat gebied, die met dezelfde sectorsnelheid als deze maar met grootere energie beschreven worden.*

In het snijpunt is de radiale snelheid $\frac{\textit{maximum}}{\textit{minimum}}$. $\left(\text{A. R. } \frac{\S\ 12 \text{ en } \S\ 19}{\S\ 29}\right)$.

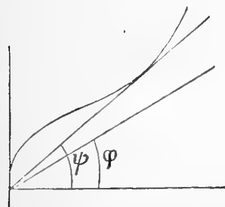


Volgt hieruit (A. R. § 19), dat alle banen, die met dezelfde sectorsnelheid beschreven worden volgens de krachtenwet μr^{-2}, gelijke parameters hebben, toegepast op de krachtenwet μr leert de eigenschap, dat alle ellipsen met dezelfde sectorsnelheid beschreven gelijken inhoud hebben. Zijn toch a en b de halve assen der ellips, dan is de radiale snelheid het grootst als de voerstraal $\sqrt{ab}$ lang is. De omloopstijden zijn dus ook gelijk.

b. Elke cirkelbaan in een $\frac{\textit{stabiliteits-}}{\textit{instabiliteits-}}$ *gebied snijdt alle banen in dat gebied, die met dezelfde energie als deze maar met kleinere sectorsnelheid beschreven worden. In het snijpunt is*



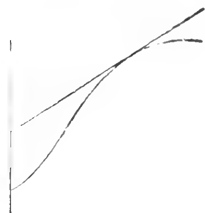
1. $v = v_c$.
2. $v\,r$ $\frac{\textit{maximum}}{\textit{minimum}}$.
3. $\sin\,(r, s)$ $\frac{\textit{minimum}}{\textit{maximum}}$.
4. *De projectie van den kromtestraal der baan op den voerstraal gelijk aan den voerstraal.*

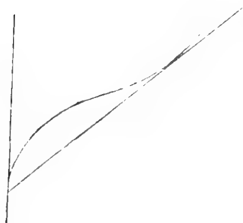


De stellingen onder 1, 2 en 3 komen overeen met de stellingen II en III van Prof. Korteweg, die daaruit afleidde, dat alle elliptische banen, die met dezelfde energie beschreven worden onder de werking van een kracht

μr^{-2}, gelijke groote assen hebben; worden ze echter beschreven onder de werking van de kracht μr, dan zal de diagonaal van den rechthoek op de assen beschreven bij elke ellips evenlang zijn.

De stelling onder 4 toegepast op de krachtenwet μr^{-2} geeft, dat het krommingsmiddelpunt van een punt eener ellips, dat gelegen is in een der uiteinden van de kleine as, het snijpunt is van deze as met de loodlijn, uit een der brandpunten opgericht op de lijn, die dat brandpunt met het beschouwde punt der ellips verbindt. Toegepast op de krachtenwet μr leert ze, dat het krommingsmiddelpunt van een punt in een der uiteinden van de gelijke geconjugeerde middellijnen gelegen gevonden wordt in het snijpunt van twee loodlijnen, de eene opgericht uit het middelpunt der ellips op de middellijn van 't punt, de andere uit het punt neergelaten op de geconjugeerde middellijn.





c. *In een stabiliteitsgebied kan de beweging nimmer cirkelvormig worden.*

In een instabiliteitsgebied zal elke cirkelbaan asymptotische binnen- of buitencirkel wezen voor alle banen in dat gebied, die met dezelfde energie en sectorsnelheid als deze beschreven worden *).

Uit de figuur blijkt, dat de cirkelbaan in een instabiliteitsgebied vanweerszijden kan genaderd worden, en de berekening in (A. R. § 28 en § 30) heeft doen zien, dat daartoe een oneindig groot tijdsverloop noodig is, behalve wanneer $\frac{d\,F\,r^3}{d\,r}$ op de cirkelbaan oneindig groot is, in welk geval het bewegende punt de cirkelbaan zal bereiken. Op dat oogenblik is $r' = 0$, $r'' = 0$, $sin\,(r, s) = 1$ en de kromtestraal van de baan gelijk aan den straal des cirkels, zoo-

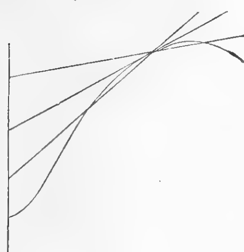
*) Zie voor $\frac{d\,F}{d\,r} = \infty$ op de cirkelbaan § 10.

dat deze de kromtecirkel van de baan is ter plaatse, waar het punt de cirkelbaan betreedt. Op dat oogenblik heeft dus het punt een beweging, die in alle opzichten gelijk is aan de cirkelbeweging, zoodat om die reden in (A. R. § 28) beweerd werd, dat het punt de cirkelbaan voortaan zal beschrijven *).

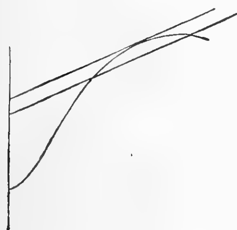
Verder moge nog de opmerking gemaakt worden, dat voor $\frac{d\,F r^3}{d\,r} = -\infty$ de potentiaalkromme in het overeenkomstige punt een oneindig groote kromming zal hebben.

Als nu bij een buigpunt de kromming nul is, *zal een cirkelbaan op de grens van een stabiliteits- en instabiliteitsgebied asymptotische cirkel wezen van alle banen in het instabiliteitsgebied, die met dezelfde sectorsnelheid en energie als de cirkelbaan beschreven worden* †).

d. Een geringe storing van een cirkelbeweging in een stabiliteitsgebied zal aanleiding geven tot een nieuwe beweging in een regelmatig gegolfde baan, wier peri- en apocentra zeer weinig verwijderd zullen liggen van de oorspronkelijke cirkelbaan (A. R. § 20).



Bestaat de storing alleen uit een *vermeerdering* / *vermindering* van de tangentiale snelheid, dan zullen de *peri-* / *apo-* centra der nieuwe baan op de oorspronkelijke cirkelbaan gelegen zijn.



Veroorzaakt de storing slechts een radiale snelheid, dan zal de nieuwe baan hare pericentra binnen, hare apocentra nagenoeg even ver buiten de oorspronkelijke cirkelbaan gelegen hebben.

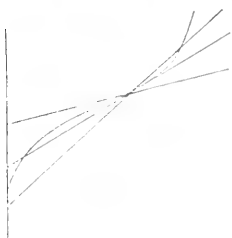
Veroorzaakt de storing zoowel een verandering van de tangentiale als een

*) Zie echter voor dit geval § 10.

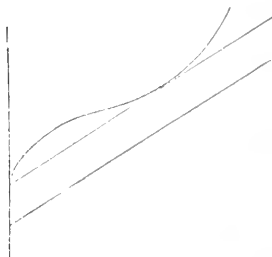
†) Korteweg, stelling VI, gevolg *a*.

radiale snelheid, dan zal de nieuwe baan de cirkelbaan regelmatig snijden.

e. Een geringe storing van een cirkelbeweging in een instabiliteitsgebied zal een nieuwe beweging geven in een baan, die zich òf naar den binnenkant, òf naar den buitenkant, òf naar beide kanten tot op eindigen afstand van de cirkelbaan zal verwijderen (A. R. § 24) *).



Geeft de storing alleen een *vermeerdering* / *vermindering* van de tangentiale snelheid, dan zal de nieuwe baan een *peri-* / *apo-* centrum op de cirkelbaan hebben, en overigens het gebied aan de *buiten-* / *binnen-* zijde verlaten, of zich tot het *oneindige* / *centrum* uitstrekken, als dit met het gebied het geval is.



Geeft de storing slechts een radiale snelheid, dan zal de nieuwe baan geen apo- of pericentrum in het instabiliteitsgebied kunnen hebben.



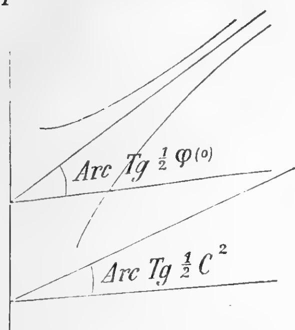
Is eindelijk de storing geheel willekeurig, dan zal de nieuwe baan behalve de vormen in de vorige gevallen nog een asymptotischen binnen- of buitencirkel kunnen hebben in plaats van een apo- of pericentrum.

f. Een storing van een cirkelbeweging op de grens van een stabiliteits- en instabiliteitsgebied zal een nieuwe beweging geven in een baan, die altijd een apo- of pericentrum heeft,

---

*) Deze en de vorige stelling komen overeen met stelling IV van Prof. KORTEWEG.

ook beiden kan hebben, of ook een van beiden met een asymptotischen cirkel.



g. Voor de spiraal, die naar het centrum voert geldt

$$lim\ sin\ (r,\ s) = \frac{C^2}{\varphi\ (0)}\ {}^{*)}$$
$$lim\ \varrho \quad = \quad 0.$$

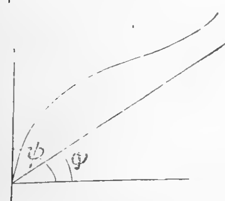
Met het oog op (A. R. § 52) vinden we:

Een spiraal, die met een *eindig* aantal windingen (dus voor $\varphi\ (0) = \infty$) naar het centrum voert, zal in de richting van den voerstraal in het centrum komen.

Een spiraal, die met een *oneindig* aantal windingen naar het centrum voert (dus voor $0 < \varphi\ (0) < \infty$), zal onder een scherpen hoek met den voerstraal in het centrum komen als $C^2 < \varphi\ (0)$ is, daarentegen onder een rechten hoek, als $C^2 = \varphi\ (0)$ is.

De tijdruimte, waarin het punt de spiraal naar het centrum doorloopt, is *eindig*, tenzij het centrum omringd wordt door een instabiliteitsgebied, $A = A_0$ (dus $\varphi'\ (0) = \varphi''\ (0) = 0$) is, en daarenboven ook $\varphi'''\ (0) = 0$ is, in welk geval het centrum asymptotisch genaderd zal worden (A. R. § 35).





h. De tak, die naar de oneindige ruimte voert, heeft de volgende eigenschappen:

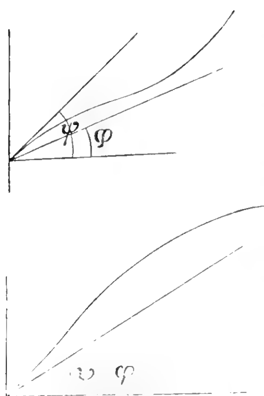
Is $A > A_\infty$, dus de tak hyperboolvormig (A. R. § 52), dan is $lim\ sin\ (r, s) = 0$.

Is $A = A_\infty$; dan is $lim\ sin\ (r,s) = \frac{C^2}{\varphi(\ \infty)}$.

Is dus $\varphi\ (\ \infty) = \infty$, de tak bijgevolg paraboolvormig (A. R. § 52), dan is $lim\ (r,s) = 0$.

Is echter $\varphi\ (\infty\ ) < \infty$, dus de tak een spiraal met oneindig veel windingen (A. R. § 52), dan voert deze onder een scherpen hoek met den voerstraal naar het

*) Korteweg, stellingen X^a, X^b, X^c, X^d.



oneindige. Alleen wanneer het bewegingsveld eindigt in een instabiliteitsgebied kan $C^2 = \varphi\,(\infty)$ zijn, in welk geval $lim\ sin\ (r, s) = 1$ is.

Tevens doen de figuren zien, dat zoowel de hyperbool- als de paraboolvormige takken naar het oneindige toe steeds steiler worden, evenals de spiraalvormige tak, die in een *stabiliteitsgebied* ligt; terwijl zulk een tak in een *instabiliteitsgebied* op grooteren afstand minder steil zal zijn dan op kleineren.

k. Worden alle raaklijnen, die een hoek $\varphi = Arc\ Tg\ \frac{1}{2}\ C^2$ met de abscissen-as maken, aan die deelen der potentiaalkromme getrokken, wier holle zijde naar de positieve ordinaten-as gekeerd is, dan zullen de raakpunten alle afstanden geven, waarop de cirkelbeweging met de sectorsnelheid $\frac{1}{2}\ C$ mogelijk is. Deze afstanden worden natuurlijk gegeven door de positieve wortels van de vergelijking $F r^3 - C^2 = 0$, die $\dfrac{d\,F r^3}{d\,r} < 0$ maken.



Is bovenstaande kromme lijn de potentiaalkromme voor zekere krachtenwet, dan zullen uit een punt, welks afstand tot het centrum door het punt A wordt aangegeven, twee banen met asymptotischen binnencirkel en geen enkele met asymptotischen buitencirkel kunnen afgezonden worden met een sectorsnelheid $\frac{1}{2}\ C$.

De figuur doet tevens zien, hoe de baan van het punt

gewijzigd wordt, als de energie der beweging bij standvastige sectorsnelheid langzamerhand toeneemt.

Is de energie het kleinst, dus de beweging loodrecht op den voerstraal van 't punt, dan ligt het pericentrum van de baan in *A*. Bij toenemende energie van de beweging zal het pericentrum allengs alle afstanden *A B* verkrijgen terwijl in *B* de eerste binnencirkel ligt; daarna zal het plotseling overspringen in *C*, zoodat op *B C* geen pericentrum kan gelegen zijn, en verder zich over *C D* verplaatsen, in *D* den tweeden asymptotischen cirkel naderen, om daarna weer over te springen tot *E*, van waaruit het zich allengs verder tot het centrum zal verplaatsen. De baan zal in alle gevallen met een hyperboolvormigen tak naar het oneindige voeren *).

Een beschouwing van de figuur geeft de volgende stelling:

Het aantal banen met asymptotischen $\begin{matrix}\textit{binnen-}\\ \textit{buiten-}\end{matrix}$ *cirkel, die met standvastige sectorsnelheid beschreven van uit een punt kunnen afgezonden worden, is gelijk aan het aantal cirkelbewegingen, die in een instabiliteitsgebied met dezelfde sectorsnelheid, maar in volgorde van het punt tot het* $\begin{matrix}\textit{centrum}\\ \textit{oneindige}\end{matrix}$ *geteld, met steeds grootere energie beschreven worden.*

Daar volgens (A. R. § 47, form. (14))

$$\int_r^{r_\varkappa} \frac{\varphi(r) - C^2}{r^3} \, dr$$

het bedrag voorstelt, waarmede de energie van de cirkelbeweging, die op den afstand $r_\varkappa$ met de sectorsnelheid $\frac{1}{2}\,C$ plaats grijpt, die van het punt overtreft, als het zich op den afstand r met dezelfde sectorsnelheid en loodrecht op zijn voerstraal beweegt, zal deze stelling het volgende analytische kenmerk geven:

---

*) Vergelijk § 4 van de verhandeling van Prof. Korteweg.

Bepaal van alle waarden, die de integraal

$$\int_{r_1}^{\rho} \frac{\varphi(r) - C^2}{r^3} dr$$

verkrijgt, als daarin voor ϱ *achtereenvolgens de wortels, gerangschikt in grootte van* r_1 *tot het* $\genfrac{}{}{0pt}{}{\textit{centrum}}{\textit{oneindige}}$*, van de vergelijking* $Fr^3 - C^2 = 0$ *genomen worden, welke* $\frac{d\,Fr^3}{dr} < 0$ *maken, diegenen, welke een klimmende reeks van positieve waarden vormen. Het aantal termen dezer reeks is gelijk aan het aantal banen met asymtotischen* $\genfrac{}{}{0pt}{}{\textit{binnen-}}{\textit{buiten-}}$ *cirkel, die van uit een punt op den afstand* r_1 *met de sectorsnelheid* $\frac{1}{2}C$ *kunnen afgezonden worden.*

l. Uit de figuur blijkt tevens, dat er banen mogelijk zijn, die zoowel een asymptotischen binnen- als buitencirkel hebben.

Elke lijn toch, die twee deelen der potentiaalkromme raakt, welke hunne holle zijde naar de positieve ordinatenas gekeerd hebben, terwijl het tusschen de raakpunten gelegen deel *geheel boven* de raaklijn is gelegen, zal in de raakpunten de afstanden geven, waarop de cirkelbanen gelegen zijn, die door het punt, dat zich tusschen deze in beweegt met een sectorsnelheid en energie gelijk aan die, waarmede elk dier cirkels doorloopen wordt, asymptotisch zullen genaderd worden.

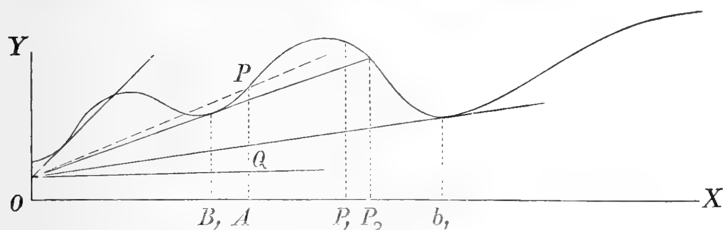
Het analytische kenmerk voor het bestaan van zulke banen bestaat hierin, dat in de integraal

$$\int_{r_1}^{\rho} \frac{Fr^3 - C^2}{r^3} dr$$

voor ϱ twee wortels, de een grooter en de andere kleiner dan r_1, van de vergelijking $Fr^3 - C^2 = 0$ gekozen kunnen worden, die $\frac{d\,Fr^3}{dr} < 0$ en tevens de waarde van de integraal positief en gelijk maken.

Het aantal paren van zulke wortels geeft het aantal banen, die uit een plaats op den afstand r van het centrum met de sectorsnelheid $\frac{1}{2}$ C kunnen afgezonden worden, en zoowel in de richting van het centrum als van het oneindige een cirkelbaan asymptotisch zullen naderen.

m. Worden van uit een punt der ordinaten-as onder een scherpen hoek met deze as alle lijnen getrokken, die de potentiaalkromme in deelen raakt, welke hun holle zijde naar de positieve ordinaten-as gekeerd hebben, dan zullen de raakpunten de afstanden aangeven, op welke de cirkelbewegingen met dezelfde energie plaats grijpen.



Stelt bovenstaande kromme lijn de potentiaalkromme voor een zekere krachtenwet voor, dan zullen van uit een plaats, aangegeven door A, een baan met een asymptotischen binnen- en een met een asymptotischen buitencirkel kunnen afgezonden worden met een snelheid $\sqrt{2\,P\,Q}$.

Ook hier zien we hoe de ligging en grootte van de baan gewijzigd wordt met de sectorsnelheid van de beweging. Is deze het grootst, dan heeft de baan in P_1 en peri-, in A zelf een apocentrum. Wordt de sectorsnelheid allengs kleiner, dan zal het pericentrum zich verplaatsen over den afstand $P\,P_2$, en het apocentrum gelijktijdig over den afstand $A\,B_1$, terwijl in B_1 de buitencirkel ligt, die asymptotisch genaderd wordt. Neemt de sectorsnelheid nog meer af, dan zal de baan geen apocentrum meer hebben; het pericentrum echter zal zich verplaatsen over den afstand $P_2\,b_1$, terwijl in b_1 de asymptotische binnencirkel gelegen is. Bij nog kleinere sectorsnelheid zal de baan ook geen pericentrum meer hebben.

Uit de figuur blijkt de waarheid van de volgende stelling.

Het aantal banen met asymptotischen $\begin{matrix}\textit{binnen-}\\ \textit{buiten-}\end{matrix}$ *cirkel, die met standvastige energie beschreven van uit een punt kunnen afgezonden worden, is gelijk aan het aantal cirkelbewegingen, die in een instabiliteitsgebied met dezelfde energie maar in volgorde van het punt tot het* $\begin{matrix}\textit{centrum}\\ \textit{oneindige}\end{matrix}$ *geteld, met steeds kleinere sectorsnelheid plaats grijpen.*

Omdat volgens *b* op de cirkelbanen, die in een instabiliteitsgebied plaats grijpen, het produkt $v\,r$ een minimumwaarde heeft voor alle banen, die met dezelfde energie als de cirkelbeweging beschreven worden, zoo vinden we het volgende analytische kenmerk:

Het aantal banen met asymptotischen $\begin{matrix}\textit{binnen-}\\ \textit{buiten-}\end{matrix}$ *cirkel, die van uit een afstand* r_1 *met de snelheid* v_1 *kunnen afgezonden worden, is gelijk aan het aantal onder de minimum-waarden, die* $v\,r$ *verkrijgt, welke kleiner dan* $v_1\,r_1$ *zijn, en geteld van den afstand* r_1 *tot het* $\begin{matrix}\textit{centrum}\\ \textit{oneindige}\end{matrix}$ *een dalende reeks van positieve waarden vormen* *).

Ook hier blijkt, dat elk paar *gelijke* minimum-waarden, die in beide reeksen voorkomen, wijst op een baan met asymptotischen *binnen-* en *buiten*cirkel.

m. Uit *k* volgt met in achtneming van § 6 en § 7 de volgende:

Regel voor den vorm der banen, die met standvastige sectorsnelheid $\frac{1}{2}$ C worden beschreven.

Bepaal de positieve wortels van de vergelijking $F r^3 - C^2 = 0$.

Deze wortels bepalen de afstanden, op welke de eenparige cirkelbeweging met de sectorsnelheid $\frac{1}{2}$ C *alleen mogelijk is* †).

Beschrijf in het vlak van beweging de cirkelbanen, op welke $\frac{d\,F r^3}{d\,r} < 0$ *is.*

---

*) Korteweg, stelling VII.

†) Zie voor $\frac{d\,F}{d\,r} = \infty$ op de cirkelbaan § 10.

Het punt zal geen dezer cirkelbanen kunnen overschrijden, als niet zijn totale arbeidsvermogen dat der betreffende cirkelbeweging overtreft. Is het er aan gelijk, dan nadert het dien cirkel asymptotisch, is het kleiner, dan keert het terug vóór den cirkel bereikt te hebben. Vindt het punt in de richting naar het centrum of het oneindige geen cirkelbaan op zijn weg, dan nog zal zijn baan niet tot het centrum of het oneindige voeren, als zijn totale arbeidsvermogen kleiner is, in het eerste geval, dan dat der kracht $C^2 r^{-3}$, *in het tweede geval, dan dat der beweegkracht* *).

n. Evenzoo volgt uit l met inachtneming van § 6 en § 7 een *regel voor den vorm der banen, die met dezelfde energie worden beschreven.*

Vervangt men de cirkelbanen, in den vorigen regel beschouwd, door de cirkelbanen, die met gelijke energie worden beschreven, en wier stralen gegeven worden door de wortels van de vergelijking

$$\tfrac{1}{2} F r + \int_{r_1}^{r} F\, d r = \tfrac{1}{2} v_1^2,$$

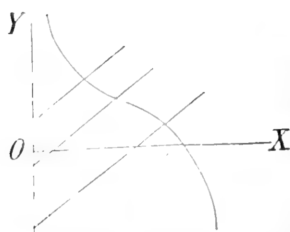
als v_1 de standvastige snelheid is, waarmede de beweging op den afstand r_1 plaats grijpt, dan zal geen van deze cirkelbanen door het punt overschreden worden, als de sectorsnelheid van zijn beweging grooter is dan die van de betreffende cirkelbeweging. Is die er aan gelijk, dan zal de cirkelbaan asymptotische cirkel wezen; is die kleiner, dan zal de cirkelbaan overschreden worden. Voor 't overige moet de regel gelijkluidend zijn met den vorigen.

---

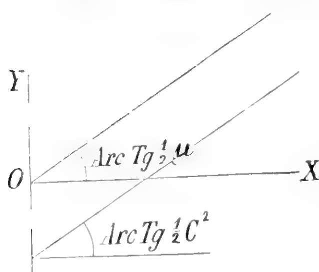
*) Zie § 10 voor 't geval, dat $\frac{dF}{dr}$ op de cirkelbaan ∞ is.

Deze regel komt overeen met (**A.** R. § 51).

IV. Toepassingen.



a. Is het geheele veld van beweging een *afstootingsgebied*, dus de potentiaalkromme dalende bij toenemende abscissen, dan heeft de baan altijd een pericentrum en hyperboolvormigen tak. Omdat $\varrho \sin(r, s)$ hier negatief is, zal de baan hare boll zijde naar het centrum gekeerd hebben. (A. R. § 9).

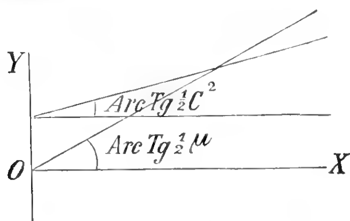


b. Is het geheele veld van beweging een *omgekeerde derdemachts-gebied*, dus de beweegkracht van den vorm μr^{-3} en de potentiaalkromme een rechte lijn, die met de abscissen-as een hoek gelijk $Arc.\ Tg\ \frac{1}{2}\mu$ maakt en door den coördinaten-oorsprong gaat, dan geeft de figuur:

Voor $C^2 = \mu$:

$A = A_0 = A_\infty$: Overal slechts eenparige cirkelbeweging.

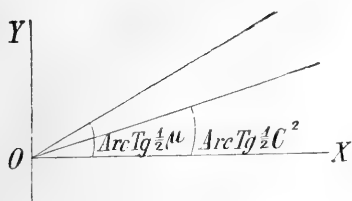
$A > A_0 = A_\infty$: ${}^\infty S_c - H_y$, de baan wordt naar het centrum heen steeds minder steil, en is in het centrum zelf loodrecht op den voerstraal. De radiale snelheid is standvastig.



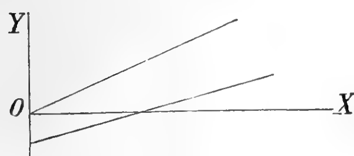
Voor $C^2 < \mu$:

$A < A_\infty = A_0$: ${}^\infty S_c - A$, de baan wordt van het apocentrum af steeds steiler; in het centrum is $\lim \sin(r, s) = \dfrac{C^2}{\mu}$.

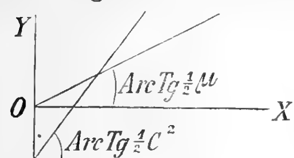
Verder is $v_c^2 - v^2$ standvastig, en de projectie van den kromtestraal der baan op den voerstraal steeds kleiner dan de voerstraal.



$A = A_\infty = A_0$: ${}^\infty S_c - {}^\infty S_\infty$, langs de geheele baan is $v_c = v$ en vr constant; de baan overal even steil, zoodat ze een logarithmische spiraal zal zijn. De kromtestraal van de baan is $\frac{\mu}{C^2} r$.



$A > A_\infty = A_0$: ${}^\infty S_c - H_y$, de baan wordt naar het centrum toe steeds minder steil, in het centrum is $lim\, sin\, (r, s) = \frac{C^2}{\mu}$. Verder is $v^2 - v_c^2 = v_\infty^2$, dus de projectie van den kromtestraal op den voerstraal steeds grooter dan de voerstraal.

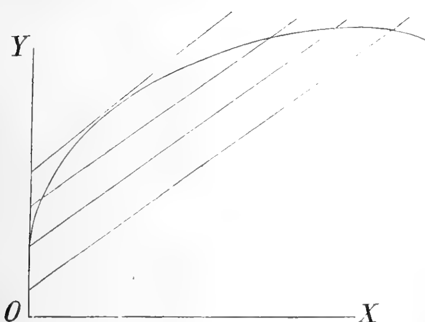


Is eindelijk $C^2 > \mu$, dan moet $A > A_\infty$ zijn, de baan is $P - H_y$.

De uitkomsten in (A. R. § 46, tabel B) komen met de hier gevondenen overeen.

c. Is het bewegingsveld een *stabiliteitsgebied*, dan heeft de potentiaalkromme overal hare bolle zijde naar de positieve ordinaten-as gekeerd.

De figuur geeft nu:



Voor $\varphi(\infty) > C^2 > \varphi(0)$:

$A < A_\infty$: $P - A$, de cirkel ingesloten.

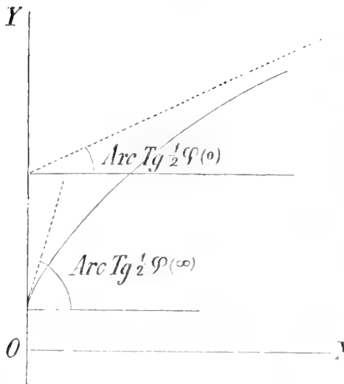
$A = A_\infty$: $P - {}^\infty S_\infty$ als $\varphi(\infty) < \infty$ is.

$P - P_{ar}$ als $\varphi(\infty) = \infty$ is.

De baan wordt van het pericentrum af steeds steiler; $lim\, sin\, (r, s)$ is voor $r = \infty$ gelijk aan $\frac{C^2}{\varphi(\infty)}$.

$A > A_\infty : P - H_y$.

Voor $C^2 \leqq \varphi(0)$:



$A < A_\infty : {}^\infty S_c - A$, de baan wordt van het apocentrum af tot op zekeren afstand steeds steiler, om daarna tot het centrum toe weer voortdurend minder steil te worden; in het centrum is *lim sin* $(r, s) = \dfrac{C^2}{\varphi(0)}$.

$A = A_\infty : {}^\infty S_c - {}^\infty S_\infty$ voor $\varphi(\infty) < \infty$, *lim sin*$(r, s) = \dfrac{C^2}{\varphi(\infty)}$ op oneindigen afstand; naar het centrum toe wordt de baan steeds minder steil, en nadert *sin* (r, s) tot $\dfrac{C^2}{\varphi(0)}$.

${}^\infty S_c - P_{ar}$ voor $\varphi(\infty) = \infty$.

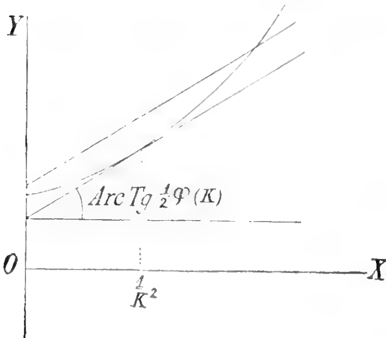
$A > A_\infty : {}^\infty S_c - H_y$.

Eindelijk voor $C^2 \geqq \varphi(\infty)$ moet $A > A_\infty$ zijn, en is de baan $P - H_y$.

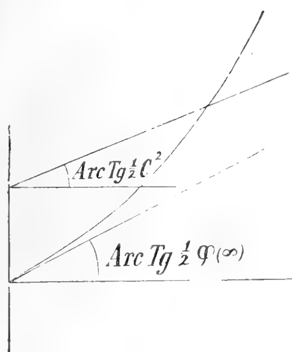
De uitkomsten (A. R. § 46, tabel C) komen met de bogevondenen overeen. Vergelijk ook PEIRCE § 708.

d. Is het geheele bewegingsveld een *instabiliteitsgebied*, dan heeft de potentiaalkromme hare holle zijde naar de positieve ordinaten-as gekeerd. De figuur geeft nu voor

$\varphi(\infty) < C^2 (= \varphi(\varkappa)) < \varphi(0)$:



$A \leqq A_\infty : {}^\infty S_c^e - A$, de spiraal wordt naar het centrum heen steeds steiler; in het centrum zelfs is *lim sin* $(r,s) = \dfrac{C^2}{\varphi(0)}$, zoodat voor $\varphi(0) = \infty$ *lim* $(r, s) = 0$ is; in dit geval alleen is het aantal windingen van de spiraal *eindig*.



$$A_\varkappa > A > A_\infty : \overset{e}{\infty}S_c - A \text{ en } P - H_y,$$

$$A = A_\varkappa : \overset{e}{\infty}S_c - S_B \text{ en } S_b - H_y,$$

$$A > A \ : \overset{e}{\infty}S_c - H_y.$$

Voor $C^2 \leqq \varphi(\infty)$:

$$A < A_\infty : \overset{c}{\infty}S_c - A \ ,$$

$$A = A_\infty : \overset{e}{\infty}S_c - {}^{\infty}S_\infty ,$$

$$A > A_\infty : \overset{e}{\infty}S_c - H_y.$$

Voor $C^2 > \varphi(0)$ moet $A > A_\infty$ zijn; de baan is altijd $P - H_y$.

Ook voor $C^2 = \varphi(0)$ moet $A > A_\infty$ zijn.

$$A < A_0 : P - H_y,$$

$$A \geqq A_0 : {}^{\infty}S_c - H_y.$$

De uitkomsten in (A. R. § 46, tabel D) stemmen met de hier gevondenen overeen. Vergelijk ook Peirce § 708.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 25 Februari 1888.



Tegenwoordig de Heeren: BUYS BALLOT, Voorzitter, A. C. OUDEMANS JR., HOEK, VAN DORP, MAC GILLAVRY, FORSTER, PEKELHARING, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, BIERENS DE HAAN, BEIJERINCK, TREUB, SCHOLS, VAN DER WAALS, VAN DIESEN, RAUWENHOFF, VAN 'T HOFF, MARTIN, DE VRIES, WEBER, FRANCHIMONT, LORENTZ, STOKVIS, PLACE, RIJKE, BAEHR, VAN DE SANDE BAKHUYZEN, MULDER, ZEEMAN, SCHOUTE, KORTEWEG, J. A. C. OUDEMANS, BOSSCHA, HUBRECHT, DIBBITS, ENGELMANN, VAN BEMMELEN en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris; van de Letterkundige Afdeeling de Heer: BOOT.

— Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1°. de Gedeputeerde Staten van Friesland te Leeuwarden, 16 Februari 1888; 2°. C. PH. SLUITER, Batavia, 21 Februari 1888; 3°. W. TONCKENS JZN., Voorzitter van de koloniale Bibliotheek te Paramaribo, 19 Januari 1888; 4°. TH. L. MONTGOMERY, Secretaris van het Wagner free Institute of Science te Philadelphia, 13 Januari 1888; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van boekgeschenken van de navolgenden:

1⁰. het Ministerie van Binnenlandsche Zaken te 's Gravenhage, 9, 13 Februari 1888; 2⁰. MONTPELLIER, Directeur der Revue Internationale de l'Electricité te Parijs, 30 Januari 1888; 3⁰. GILBERT, Directeur der kön. Universitäts-Bibliothek te Greifswald, 9 Januari 1888; 4⁰. CONWENTZ, Secretaris der naturforschende Gesellschaft te Dantzig, 15 Januari 1888; 5⁰. STRICKER, Bibliothecaris der Senckenbergische naturforschende Gesellschaft te Frankfort a./M., 20 Januari 1888; 6⁰. A. GRIGORIEV, Secretaris der Société impériale de Géographie te St. Petersburg, 15 Januari 1888; 7⁰. den Directeur van het Musée public te Moskou, 5 Februari 1888; 8⁰. den Directeur van het geological and natural History Survey te Sussex, 1888; 9⁰. J. J. BRIDE, Bibliothecaris der public Library te Melbourne, 21 December 1887; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Ingekomen zijn: 1⁰. eene uitnoodiging ter bijwoning van het Congrès géologique international, te houden te Londen, van 17—22 September e. k; 2⁰. twee manuscripten van den Heer DELAURIER te Parijs, getiteld: »Expériences chimiques sur le poids de l'Ether des physiciens" en »Observations sur la note de Mr. G. GOVI publiée dans la Revue internationale de l'Electricité". Zij zullen aan de chemische en physische leden der Afdeeling, die daarin belang stellen, ter kennisneming worden toegezonden.

— De Heer MARTIN vertoont eene door hem vervaardigde geologische kaart van den loop der rivier Suriname, en knoopt daaraan de mededeeling vast, dat het hem gelukt is, gedurende zijn verblijf in West-Indië, de geologische formatie te vinden, waarin het goud, 'twelk in die streken voorkomt en reeds lang als waschgoud bekend staat, oorspronkelijk werd neêrgelegd. Die formatie is de kristallijne Schieferformatie: eene laag, waarin ook in Brazilië het meeste goud wordt aangetroffen. Tusschen Brazilië en Suri-

name bestaat voor het overige, meent de Spreker, zeer veel overeenkomst in de opeenvolging en den aard der lagen, waaruit de vaste bodem gevormd is.

— De Heer DE VRIES spreekt: *Over de bepaling van het moleculaire gewicht der raffinose volgens de physiologische methode.*

Over het moleculaire gewicht der raffinose (mélitose, gossypose) bestaan drie verschillende meeningen, die haar uitdrukking vinden in de formules, die door verschillende schrijvers voor deze stof worden opgegeven. Deze zijn:

	Mol.gew.	
$C_{12}H_{22}O_{11} + 3\,H_2O$	396	BERTHELOT en RITTHAUSEN
$C_{18}H_{32}O_{16} + 5\,H_2O$	594	LOISEAU en SCHEIBLER
$C_{36}H_{64}O_{32} + 10\,H_2O$	1188	TOLLENS en RISCHBIET.

Deze formules drukken dezelfde elementaire samenstelling der gekristalliseerde stof uit; haar verschil berust ten deele op de verschillende bepalingen van het gehalte aan kristalwater, dat door BERTHELOT en RITTHAUSEN = 13.64 pCt, doch door LOISEAU en SCHEIBLER = 15.15 pCt. gevonden werd. De formule van TOLLENS en RISCHBIET neemt het laatstgenoemde cijfer als juist aan, doch tracht rekening te houden met de samenstelling van het natriumderivaat ($C_{12}H_{21}NaO_{11}$, bevattende 6.32 pCt. Na) en met de hoeveelheid slijmzuur (22—23 pCt.), die door de inwerking van salpeterzuur op de genoemde suikersoort ontstaat.

Om de vraag te beantwoorden, welke van deze formules de juiste is, heb ik gebruik gemaakt van de stelling, dat organische stoffen denzelfden isotonischen coëfficiënt bezitten. Hieruit toch volgt, dat oplossingen, die per liter evenveel grammoleculen der opgeloste stof bevatten, ongeveer dezelfde osmotische spanning hebben. Ik heb daarom de concentratie gezocht van eene oplossing van raffinose, die dezelfde osmotische spanning heeft, als eene oplossing van 0.1 Mol. rietsuiker.

Ik heb daartoe gebruik gemaakt van de plasmolytische methode en gezocht naar de concentratiën van rietsuiker en raffinose, die met het celvocht van *Tradescantia discolor*

isotonisch waren. Als zoodanig beschouw ik de gemiddelden tusschen de hoogste concentratie die geene, en de laagste, die in alle cellen plasmolyse doet ontstaan. In vier proeven, elk met een afzonderlijk blad genomen, vond ik als isotonisch met het celvocht:

Mol. rietsuiker.	pCt. raffinose.	pCt. raffinose isoton. m. 0.1 mol. rietsuiker.
0.19	10.5	5.526
0.17	10.5	6.176
0.17	10.0	5.882
0.20	12.5	6.250
	Gemiddeld:	5.957

Eene oplossing van 5.957 pCt. raffinose, die dus 5.957 gram der kristalwaterhoudende stof per 100 CC. bevat, is dus met eene oplossing van 0.1 Mol. rietsuiker isotonisch. Zij moet dus ook ongeveer 0.1 Mol. per liter bevatten. Het moleculaire gewicht moet dus ongeveer 595.7 zijn. Dit komt, zooals men ziet, voldoende overeen met de formule van Loiseau en Scheibler, en slechts deze kan dus, volgens de wet der isotonische coëfficiënten, juist zijn.

— De Heer Hubrecht behandelt de gegevens, die in de latere jaren aan het licht gekomen zijn over de vroegste ontwikkelingsstadiën van de zoogdierkiemblaas en geeft een overzicht van de resultaten waartoe hij gekomen is, met betrekking tot de ontwikkeling van den Egel, Erinaceus europaeus, waarvan de embryologie tot heden nog niet onderzocht is.

De centrale positie die de Insectivora onder de Zoogdieren en die de Egel (met Gymnura) onder de Insectivora inneemt, gaven hoop, dat de ontogenie van deze diersoort uit een vergelijkend oogpunt belangrijk zou kunnen wezen.

Ten aanzien van meerdere punten, acht spreker, dat de uitkomsten van zijn onderzoek dit vermoeden versterken.

Met name wordt in de allervroegste stadiën de wijze van ontstaan van het binnenste kiemblad afwijkend gevonden van wat dienaangaande voor de overige, te dier zake onderzochte, Zoogdieren tot nu toe beschreven is.

In plaats van zich tegen den binnenwand der aanvanke-

lijk éénbladige kiemblaas gaandeweg uit te breiden en door peripheren groei eindelijk den geheelen binnenwand te bekleeden, is het hypoblast van den Egel in den aanvang een groepje cellen in moerbeivorm, waarin zich spoedig eene centrale ruimte vertoont, die toeneemt in grootte, naarmate de wand van dezen »hypoblastzak" toeneemt in oppervlakte.

Aanvankelijk dus geheel zelfstandig van het epiblast, heeft het er somtijds den schijn van alsof het hypoblast eerst tengevolge der preparatie daarvan heeft losgelaten. De jongste stadiën, zooeven vermeld, bewijzen dat deze interpretatie onjuist is, terwijl latere stadiën, wanneer de allereerste aanduiding van de vorming van primitiefstreep en mesoblast begint, aantoonen, dat eerst op dat oogenblik epiblast en hypoblast van het embryo in enger verband treden, en zich ook over de geheele peripherie van de kiemblaas tegen elkaar sluiten.

Het epiblast is van den beginne af meerdere cellagen dik. Deze woekeren verder en vergroeien over den geheelen omtrek der kiemblaas met het moederlijke deciduale weefsel. De kiemblaas is daarbinnen opgenomen onder vorming eener decidua reflexa. Op één punt, dat altijd ten opzichte van de as van den uterus eene vaste ligging heeft, splijt van den epiblastischen kiemblaaswand een celplaat af, die daarna in omvang belangrijk toeneemt en het epiblast van het embryo wordt, maar aan den rand met den kiemblaaswand blijft samenhangen.

Het mesoblast ontstaat allereerst in de primitiefstreep door woekering van het epiblast. Kort daarna neemt men waar, dat in dat gedeelte van de kiemschijf vóór de primitiefstreep, waar het embryo zich zal gaan vormen, ook het hypoblast aan de vorming van het mesoblast, en wel door directe afsplijting, aandeel neemt.

Verder achterwaarts versmelten de zijdelingsche mesoblastplaten, die uit het hypoblast ontstaan, met het mesoblast van de primitiefstreep.

Er ontstaat reeds vroeg eene *area vasculosa,* die zich tegen den kiemblaaswand aanlegt. De bloedrijkdom van deze

laatste, ook in vroege stadiën, werd door injecties, van de moederlijke aorta uit, vastgesteld.

Een sterk ontwikkeld proamnion is aanwezig.

De allantois, die tot het ontstaan der schijfvormige placenta medewerkt, blijft een ruime holte bevatten.

De segmentaal-gang ontstaat ook bij den egel uit het epiblast.

De vroegste stadiën der egel-kiemblaas maken eene interpretatie van de jongste kiemblazen van den mensch, die tot nu toe bekend zijn, gemakkelijker. In overeenstemming met His is het waarschijnlijk te achten, en thans door het feitelijk voorbeeld van den egel gestaafd, dat de dojerblaas van den mensch door uitholling van een aanvankelijk solide celgroep ontstaat. De vorming van het epiblast van het embryo zal echter, in afwijking van His, veeleer als een afsplijtingsproces in den kiemblaaswand, zooals thans bij den egel is waargenomen, moeten worden opgevat.

De vasthechting van het embryo aan den kiemblaaswand, die men bij het vroege menschelijk embryo waarneemt en waaraan His den naam »buiksteel" gegeven heeft, is ook bij Erinaceus van den aanvang af aanwezig, als gevolg van de boven beschreven ontwikkelingsverschijnsels der primaire kiembladen. Alleen langs dien weg kan de vorming van dien buiksteel op afdoende wijze verklaard worden en moeten de onderling afwijkende interpretaties van His, Kölliker en Hertwig, voor de hier aangegevene plaats maken.

— De Heer Treub deelt mede, dat het hem gelukt is, eene som van *f* 2400 bijeen te brengen, waaruit reeds dadelijk de onkosten bestreden kunnen worden voor de uitzending van een Nederlandsch natuuronderzoeker naar het Buitenzorgsche Station. Des sprekers keuze viel op den Heer Dr. Boerlage, Conservator aan 's Rijks Herbarium te Leiden, voor wien een bezoek aan Buitenzorg, om er de Javaansche en andere plantenvormen in levenden staat te onderzoeken en na te gaan, zeker een leerzame afwisseling zou zijn met zijne tegenwoordige betrekking, die hem slechts met gedroogde voorwerpen in aanraking brengt.

Spreker dankt de Afdeeling voor den steun, hem verleend bij de pogingen om zijne plannen verwezenlijkt te zien, en beveelt het Buitenzorgsche Station bij voortduring in hare belangstelling aan.

De Voorzitter dankt den Heer Treub wederkeerig voor den doortastenden ijver, waarmede hij een voor de wetenschappelijke eer onzer natie gewichtig plan in vervulling heeft weten te doen overgaan, en wenscht hem, bij eene voorspoedige reis, al verder toe, dat hij moge blijven voortgaan de botanische wetenschap te dienen, zooals hij tot hiertoe op uitnemende wijze gedaan heeft.

— Ter plaatsing in de werken der Akademie worden aangeboden:

1. door den Secretaris een opstel van den Heer Dr. Jan de Vries, leeraar aan de H. B. S. te Kampen: »Over vlakke configuraties";

2. door den Heer Buys Ballot eene verhandeling van den Heer Dr. J. D. van der Plaats, leeraar aan de Veeartsenijschool te Utrecht: »Over Standaardbarometers, in het bijzonder over dien van het Kon. Ned. Meteorol. Instituut";

3. door den Heer van der Waals een opstel van den Heer Dr. Ch. M. van Deventer te Amsterdam: »Over eenige belangrijke thermodynamische vergelijkingen";

4. door den Heer Lorentz eene verhandeling van den Heer Dr. V. A. Julius, leeraar aan de H. B. S. te Breda, »Over de lineaire spectra der elementen";

5. door het lid der Akademie Dr. P. H. Schoute, een opstel van hemzelven: »Het lineaire complex en de congruentie (I, 1)";

6. door den Heer Engelmann, uit naam van den Heer Donders, eene verhandeling van den Heer Dr. J. L. Hoorweg: »Experimenteel onderzoek naar de polsbeweging".

— Tot rapporteurs worden benoemd:

a. over den arbeid van den Heer de Vries, de Heeren Bierens de Haan en van den Berg;

b. over dien van den Heer van der Plaats, de Heeren Bosscha en van de Sande Bakhuyzen;

c. over dien van den Heer van Deventer, de Heeren van der Waals en Lorentz;

d. over dien van den Heer Julius, de Heeren Grinwis en Lorentz;

e. over dien van den Heer Hoorweg, de Heeren Place en Korteweg.

— Voor de bibliotheek der Akademie wordt aangeboden:

1. door den Heer Franchimont, uit naam van de redactie, het 6de deel van het »Recueil des travaux chimiques dans les Pays-Bas";

2. door den Heer Stokvis diens voordrachten: »Over Homoeopathie", gehouden aan de Amsterdamsche Universiteit.

— Daar er verder niets te verhandelen is, sluit de Voorzitter de vergadering.

UEBER DIE ANWENDUNG DER PLASMOLYTISCHEN METHODE

AUF DIE

BESTIMMUNG DES MOLEKULARGEWICHTS CHEMISCHER SUBSTANZEN

VON

HUGO DE VRIES.



Die relative Grösse der osmotischen Spannkraft chemischer Verbindungen in verdünnten wässrigen Lösungen wird durch die Zahlen angegeben, für welche ich den Namen der isotonischen Coëfficienten gewählt habe. Diese Werthe sind für sämmtliche Glieder einer und derselben Gruppe nahezu dieselben *). Und da diese Gruppen äusserst natürliche sind, so kann man für sämmtliche zu ihnen gehörige aber bisjetzt darauf noch nicht geprüfte Körper den isotonischen Coëfficienten im Voraus angeben.

Ist nun das Molekulargewicht des betreffenden Körpers bekannt, so kann man aus diesem und dem Coëfficienten die Concentrationen berechnen, welche dieselbe osmotische Spannkraft besitzen, als irgend welche verdünnte Lösung einer anderen gegebenen Substanz. In dieser Weise finden die isotonischen Coëfficienten bei plasmolytischen Versuchen regelmässig Anwendung.

Ist aber das Molekulargewicht einer fraglichen Verbindung noch nicht bekannt, so wird man offenbar umgekehrt,

*) Pringheim's *Jahrbücher für wiss. Bot.*, Bd. XIV, S. 514.

aus ihrem isotonischen Coëfficienten und dem Resultate einer experimentellen Ermittelung ihres isotonischen Werthes die Grösse dieses Molekulargewichts, wenigstens annähernd ableiten können. Die Ermittelung des isotonischen Werthes ist aber für alle Körper, deren Lösungen in Pflanzenzellen die Erscheinung der normalen Plasmolyse hervorrufen können, eine leichte und einfache Operation, welche in genau derselben Weise, wie die Bestimmung der isotonischen Coëfficienten, ausgeführt wird.

In ähnlicher Weise wie für Gase hat die Berechnung des Molekulargewichts auf physikalischem Wege in allen jenen Fällen Werth, in denen das Studium der chemischen Eigenschaften eines Körpers die Wahl offen lässt zwischen mehreren, aus derselben elementaren Zusammensetzung abgeleiteten Formeln, welche verschiedenen Molekulargrössen entsprechen. Und wo es sich um wässrige Lösungen von Substanzen handelt, welche als plasmolytische Reagentien benutzt werden können, empfiehlt sich zu diesem Zwecke also die plasmolytische Methode.

Ihre Resultate erreichen denselben Grad von Genauigkeit, wie die zur Ermittelung des Molekulargewichts vorgeschlagenen rein chemischen oder physikalischen Methoden, da die Endreaction, das Eintreten des ersten Anfanges der Plasmolyse, sich bei den von mir gewählten Indicatorpflanzen stets mit der gewünschten Schärfe erkennen lässt.

Meine Methode weist nicht die absolute Grösse der osmotischen Spannung der untersuchten Lösung an, sondern nur das Verhältniss zu dem analogen Werth einer anderen Verbindung. Denn man hat für zwei Substanzen diejenige Concentration zu ermitteln, welche grade den Anfang der Plasmolyse hervorruft. Diese sind unter sich isotonisch, d. h. sie haben dieselbe osmotische Spannung. Hat man aber beide Substanzen aus derselben Gruppe gewählt, d. h. besitzen beide denselben isotonischen Coëfficienten, so verhalten sich die Concentrationen der isotonischen Lösungen offenbar wie die Molekulargewichte. Ist dieser Werth für die eine der beiden Substanzen bekannt, so kann man ihn also für die anderen berechnen. Trotzdem sie also nur rela-

tive Zahlen giebt, ist die Methode aber, wie man sieht, eine äusserst einfache und völlig sichere.

Bei der hier vorgeschlagenen Anwendung handelt es sich aber stets um Körper deren isotonischer Werth noch nicht experimentell bestimmt wurde, für welche also die Gültigkeit der betreffenden Gesetze nicht direct bewiesen worden ist. Und auf die Annahme, dass diese Gesetze auch für sie gelten, beruht offenbar die Zuverlässigkeit des Resultates.

Es ist somit erforderlich, die Berechtigung dieser Annahme ausführlich zu begründen. Sie beruht in erster Linie auf die bedeutende Anzahl der untersuchten Substanzen, und auf die Erwägung, dass Ausnahmen von den betreffenden Gesetzen bis jetzt nicht aufgefunden worden sind (l. c. S. 512). Zweitens aber auf alle jene Fälle, in denen der isotonische Coëfficient im Voraus aus den Gesetzen abgeleitet und nachher durch das Experiment bestätigt wurde (l. c. S. 515). Zu diesen Beispielen ist jetzt auch das Glycerin zu stellen *).

Die Zuverlässigkeit der Gesetze der isotonischen Coëfficienten geht aber besonders klar hervor aus der Bestätigung, welche diese nach einer ganz andern aber gleichfalls physiologischen Methode erfahren haben. In seinen Untersuchungen über den Einfluss chemischer Substanzen auf die Blutkörperchen, und über die Beziehung dieses Einflusses zu den Molekulargewichten †) hat Hamburger den Nachweis geliefert, dass die Blutkörperchen in Lösungen neutraler, unschädlicher Verbindungen ähnliche Erscheinungen aufweisen, wie die Pflanzenzellen, und dass sie in diesen Lösungen nur dann unverändert erhalten bleiben, wenn deren Concentration mit der osmotischen Spannung des Blutes isotonisch ist. Dabei verhalten sich aber verschiedene Verbindungen quantitativ in derselben Weise, wie gegenüber Pflanzenzellen, und es sind somit die Gesetze der isotonischen Coëfficienten für diese letzteren dieselben wie für die Blutkörperchen.

---

*) Maandblad voor Natuurwetenschappen 1888, N°. 7, *Bot. Zeitung* 1888, N°. 15 en 16.

†) H. J. Hamburger in de Onderzoekingen van het physiologisch Laboratorium te Utrecht, 3de Reeks, IX, blz. 26, 1884.

In meiner »Methode zur Analyse der Turgorkraft" habe ich hervorgehoben, dass die Verminderung der Dampfspannung des Wassers durch darin gelöste Stoffe, die Erniedrigung des Dichtigkeitsmaximums von Lösungen und die Erniedrigung der Temperatur des Gefrierens Erscheinungen sind, welche als Folgen derselben osmotischen Kräfte zu betrachten sind, wie die Plasmolyse, und dass eine Vergleichung der isotonischen Coëfficienten mit den Resultaten der Erforschung jener Vorgänge im Allgemeinen zu einer Bestätigung der betreffenden Gesetze führt (l. c., S. 522).

Diese Bestätigung ist nun durch die seitdem veröffentlichten Resultate RAOULT's über die molekulare Gefrierpunktserniedrigung bedeutend erweitert worden, und etwaige Zweifel über die Anwendbarkeit meiner Gesetze auf andere als die bisher untersuchten Stoffe werden durch eine Vergleichung der von RAOULT gewonnenen Zahlen völlig beseitigt. Auch hat dieser Forscher auf die Bestimmung der Gefrierpunktserniedrigung eine Methode gegründet, welche die Ermittelung des Molekulargewichts für eine äusserst grosse Reihe von Körpern gestattet und welche ohne Zweifel in den meisten Fällen den Vorzug vor der plasmolytischen Methode verdient *).

Die Verminderung der Dampfspannung des Wassers durch darin gelöste Substanzen ist im vergangenen Jahre von G. TAMMAN †) studirt worden, und auch hier verhalten sich die verschiedenen Substanzen genau so wie bei der Plasmolyse und bei der Erniedrigung des Gefrierpunktes.

Schliesslich finden alle diese Einzeluntersuchungen ihre theoretische Grundlage und ihr gemeinschaftliches Band in den Untersuchungen von VAN 'T HOFF über die Grundgesetze der osmotischen Spannung verdünnter Lösungen, und

---

*) F. M. RAOULT, *Méthode universelle pour la détermination des poids moléculaires; Annales de chimie et de physique*, 6de Serie, T. VIII, p. 29, Juillet 1886.

†) GUSTAV TAMMAN, Die Dampftensionen der Lösungen, in *Mémoires de l'Acad. d. Sc. de St. Pétersbourg*, 7de Série, T. XXXV, N°. 9, 1887, S. 171.

in dem von diesem Forscher gelieferten Nachweis, dass die Gesetze von Boyle, Gay-Lussac und Avogadro nicht auf Gase beschränkt sind, sondern auch die sämmtlichen Spannungserscheinungen in verdünnten Lösungen beherrschen *).

Es kann somit die Berechtigung der hier vorgeschlagenen Anwendung meiner Methode keinem begründeten Zweifel mehr ausgesetzt sein.

Das Molekulargewicht der Raffinose.

Die im Vorhergehenden betonte Leistungsfähigkeit der plasmolytischen Methode wollen wir jetzt durch ein Beispiel näher begründen. Ich wähle dazu die Raffinose, und werde zunächst die Gründe auseinandersetzen, welche eine Bestimmung des Molekulargewichts dieses Körpers erwünscht machen.

Die Raffinose ist eine Zuckerart, welche im Jahre 1876 von Loiseau entdeckt wurde in einer kristallinischen Kruste, welche sich in der Raffinerie von Sommier und Co. in Paris allmählig aus der zuckerhaltigen Mutterlauge abgesetzt hatte †). Sie unterscheidet sich von anderen Zuckerarten durch ihren nur wenig süssen Geschmack und durch ihr Vermögen, das polarisirte Licht weit stärker zu drehen als der Rohrzucker.

Seitdem wurde die Raffinose erkannt als die Ursache einer bis dahin häufig beobachteten, aber noch nicht völlig aufgeklärten Erscheinung. Die Melassen der Rübenzuckerindustrie, und namentlich die durch das Strontianverfahren gewonnenen, wiesen häufig im Polarisations-apparate einen grösseren Gehalt an Zucker auf als 100 pCt. Sie mussten also einen unbekannten, das polarisirte Licht stärker drehenden Bestandtheil enthalten. Dieser lange Zeit vorläufig als Plus-Zucker bezeichnete Stoff stellte sich nun, wenigstens

*) J. H. van 't Hoff, Lois de l'équilibre chimique dans l'état dilué, gazeux ou dissous. — Kon. Svensk. Vetenskap. Akademiens Handlinger Bd. 21, N°. 17, 1886 und *Archives Néerl.*, T. XX, p. 239.

†) *Comptes rendus* 1876, II, Tom. 32, p. 1058.

der Hauptsache nach, als Raffinose heraus, und es gelang SCHEIBLER ein einfaches Verfahren anzugeben, um die Raffinose aus diesen Melassen abzuscheiden, und in reiner kristallisirter Form in den Handel zu bringen *).

Die Raffinose entsteht nicht etwa während des Fabriksprocesses; sie kommt bereits in den Rüben selbst vor, und zwar in bedeutenderer Menge, als man nach dem Gehalt der Melassen annehmen würde. Sie wird also bei der Zuckergewinnung theilweise zersetzt. Ausser in Rüben wurde sie von RICHARDSON und CRAMPTON im Weizen und von SULLIWAN im Gerste aufgefunden. Sie wird demnach voraussichtlich im Pflanzenreich wohl eine weite Verbreitung haben. Dafür spricht auch der Umstand, dass neuere Untersuchungen ihre Identität mit den aus anderen pflanzlichen Produkten bereiteten Zuckerarten *Melitose* und *Gossypose* nachgewiesen haben.

Die Melitose wurde von JOHNSTON aus der Australischen *Eucalyptus*-manna gewonnen und von BERTHELOT eingehend studirt †). Ihre Identität mit der Raffinose wurde von TOLLENS und RISCHBIET entdeckt und ausführlich nachgewiesen §), welche Autoren auch, wie wir bald sehen werden, die von BERTHELOT aufgestellte Molekularformel übernahmen.

Auf die Identität der von RITTHAUSEN und BÖHM aus Baumwollensamenkuchen gewonnenen *Gossypose* mit der Raffinose hatte TOLLENS bereits früher hingewiesen, während SCHEIBLER bald darauf den endgültigen Nachweis dafür brachte **).

Die Raffinose muss somit eine im Pflanzenreich ziemlich weit verbreitete Zuckerart sein.

Während ich für die chemischen Eigenschaften dieses Körpers auf die betreffende Literatur, und namentlich auf die ausführliche und gründliche Zusammenstellung in STAM-

*) C. SCHEIBLER, *Berichte d. d. chem. Gesellsch.*, 18 S. 1409.

†) JOHNSTON, *Philos. Magazine* 1843, S. 14; BERTHELOT, *Ann. Chim. Phys.*, (3) T. 46, p. 66.

§) TOLLENS und RISCHBIET, *Zeitschr. f. Zuckerindustrie*, T. 35, p. 1030.

**) SCHEIBLER, *Ber. d. d. chem. Gesellsch.*, Bd. 18, S. 1779.

MER'S »*Jahresbericht über die Untersuchungen und Fortschritte im Gesammtgebiete der Zuckerfabrikation*" (Band XXV, 1885, 162—202), verweise, werde ich jetzt versuchen eine Uebersicht desjenigen zu geben, was zu den verschiedenen Ansichten über die Molekularformel unserer Zuckerart Veranlassung gegeben hat.

BERTHELOT hatte für seine Melitose die Formel $C_{12} H_{22} O_{11} + 3 H_2 O$ aufgestellt, und zu derselben Zusammensetzung war RITTHAUSEN für die Gossypose gelangt. Dagegen hatte LOISEAU, welcher der Raffinose seit 1876 eine Reihe gründlicher Arbeiten im *Journal des fabricants de sucre* gewidmet hat, für diesen Körper die Formel $C_{18} H_{32} O_{16} + 5 H_2 O$ angenommen. Beide Formeln entsprechen demselben Resultate der Elementar-analyse, da beide $= n (C_6 H_{14} O_7)$ sind, indem n von BERTHELOT und RITTHAUSEN $= 2$, von LOISEAU $= 3$ gestellt wurde. Die Entscheidung hierüber war in beiden Fällen durch die Bestimmung des Gehalts an Kristallwasser gewonnen, welcher Gehalt für die erste Formel 13,64 pCt., für die zweite aber 15,15 pCt. beträgt.

Man sollte nun glauben, dass die Frage nach der Kristallwassermenge sich leicht entscheiden liesse. Man stösst hierbei aber auf unerwartete Schwierigkeiten. Erwärmt man zu rasch, so schmilzt die Substanz in ihrem Kristallwasser, und eine völlige Austreibung dieses ist nicht mehr zu erreichen. Weicht man dieser Schwierigkeit durch sehr langsames Erwärmen aus, so erhält man bei 100° C allerdings einen Wasserverlust von etwa 13—14 pCt., aber dieser wird nicht constant. Erhitzt man bis zu 120—130° C, so fängt die Raffinose an sich zu zersetzen und zu caramelisiren, bevor ein Gewichtsverlust von 15,15 pCt. erreicht worden ist. Dabei entsteht Glucose, wie man mittelst FEHLING'scher Lösung nachweisen kann, denn die Raffinose reducirt die Kupferlösung nicht.

SCHEIBLER hat eine Methode gefunden, um den Kristallwassergehalt ohne jegliche Zersetzung genau zu bestimmen. Er lässt die fein-kristallinische Substanz im Vacuum über Schwefelsäure etwa 14 Tage vortrocknen, und setzt dann die Operation im Wasserbade bei 100° C fort, bis ein völ-

lig constantes Gewicht eingetreten ist. Der Verlust beträgt dann genau 15,15 pCt., und SCHEIBLER betrachtete die Frage damit als zu Gunsten LOISEAU's entschieden *).

Ihm gegenüber vertheidigten TOLLENS und RISCHBIET die Formel BERTHELOT's †). Sie behaupten, »dass man je nach der Art des Trocknens zu recht verschiedenen Formeln gelangen kann", dass mitunter sogar ein Verlust von mehr als 15,15 pCt. gefunden sei. Sie versuchten somit eine Bestimmung auf rein chemischen Wege, und wählten dazu die Darstellung des Natriumderivats. Dieses hatte die Zusammensetzung $C_{12} H_{21} Na O_{11}$ (= 6.32 pCt. Na), oder $C_{12} H_{22} O_{11} Na OH$ (6.02 pCt. Na), und entschied also für die Formel $C_{12} H_{22} O_{11} + 3 H_2 O$.

Als die genannten Verfasser ihre Untersuchungen über die chemischen Eigenschaften der Raffinose fortsetzten, gelangten sie aber allmählig zu der Ansicht, dass die Moleküle dieser Verbindung wahrscheinlich grösser seien, als dieser Formel entsprechen würde, ja sogar grösser als von LOISEAU und SCHEIBLER angenommen wurde. Manches schien darauf hin zu deuten, dass die Raffinose sich den höher in der Reihe stehenden Stoffen, wie Amylodextrin und Inulin nähert, da sie sich in vielen Hinsichten diesen ähnlich verhält. Namentlich das Verhalten gegenüber Salpetersäure führte zu diesem Schlusse, denn es entstehen dabei 22—23 pCt. Schleimsäure. Dieses ist aus dem Formel $C_{12} H_{22} O_{11} + 3 H_2 O$ nicht zu erklären, wohl aber aus $C_{18} H_{32} O_{16} + 5 H_2 O$ oder deren Polymeren, wenn man annimmt, dass darin eine Galactose-gruppe $C_6 H_{12} O_6$ vorhanden ist, oder doch durch die Einwirkung der Saüre daraus entstehen kann.

Um nun sowohl dieser letzteren Reaction, als dem Natriumderivate und endlich auch dem Kristallwassergehalt von 15.15 pCt. zu genügen, schlagen die beiden genannten Forscher vor, die Formel LOISEAU's zu verdoppeln und das Molekül der Raffinose als der Formel $C_{36} H_{64} O_{32} + 10 H_2 O$ entsprechend zu betrachten.

---

*) l. c. S. 181—191.

†) *Zeitsch. f. Zuckerindustrie*, T. 35, S. 1030.

In einer späteren ausführlicheren im Jahre 1886 erschienenen Arbeit halten sie diese Meinung aufrecht, indem sie sagen »Die Formel $C_{36} H_{64} O_{32} + 10 H_2 O$ ist diejenige, welche allen bekannten Thatsachen genügt" *).

Ueber die Molekularformel der Raffinose liegen also derzeit die drei folgenden Ansichten vor †):

	Kristallwassergehalt.	Molekulargewicht.	
1. $C_{12}H_{22}O_{11} + 3H_2O$	13.64 pCt.	396	Berthelot und Ritthausen.
2. $C_{18}H_{32}O_{16} + 5H_2O$	15.15 "	594	Loiseau und Scheibler.
3. $C_{36}H_{64}O_{32} + 10H_2O$	15 15 "	1188	Tollens und Rischbiet.

Diese Formeln entsprechen derselben elementaren Zusammensetzung der kristallisirten Substanz, tragen aber verschiedenen Bestimmungen des Kristallwassergehaltes und verschiedenen chemischen Reactionen Rechnung.

Bestimmung des Molekulargewichts der Raffinose nach der plasmolytischen Methode.

Um zu einer Entscheidung über die schwebende Frage zu gelangen, wollen wir jetzt den Satz anwenden, *dass organische Körper in verdünnten Lösungen bei derselben molekularen Concentration annähernd dieselbe osmotische Spannung besitzen.* Dieses Gesetz ist ein Theil meines ersten Gesetzes für die isotonischen Coëfficiënten §), und zwar derjenige Theil, welcher sich auf die erste der dort unterschiedenen Gruppen, diejenige der organischen metallfreien Verbindungen bezieht.

Wir haben also die osmotische Spannung verdünnter Lösungen von Raffinose zu vergleichen mit dem analogen Werthe für irgend eine andere organische Substanz, und wählen dazu aus leicht ersichtlichen Gründen den *Rohrzucker*, als einen genau bekannten, und mit der Raffinose am nächsten verwandten, also am besten vergleichbaren Stoff.

Wir haben also zu erforschen, bei welchen Concentrationen die Lösungen beider Substanzen denselben isotonischen

*) *Zeitschr. f. Rübenzuckerindustrie,* T. 36, S. 214.

†) Man vergleiche auch die Uebersicht von Lippmann über diesen Streit in N°. 39 der *Deutschen Zuckerindustrie* (1885).

§) Pringsheim's *Jahrbücher,* Band XIV, S. 514.

Werth, d. h. dieselbe osmotische Spannung besitzen, denn solche Lösungen werden pro Liter annähernd dieselbe Anzahl von Molekülen enthalten. Es reicht hin, für eine Concentration des Rohrzuckers die damit isotonische Concentration der Raffinose zu ermitteln.

Als Indicator wählen wir die Erscheinung der Plasmolyse. In Lösungen, welche geringere Anziehung für Wasser haben als der Zellsaft der betreffenden Zellen, wird sich der den Saft umschliessende Protoplast nicht von der Zellhaut abheben, in hyperisotonischen *) Lösungen wird solches wohl der Fall sein. Die auf der Grenze stehende Concentration wird offenbar mit dem Zellsaft isotonisch sein; hat man diese »plasmolytische Grenzlösung" für zwei Substanzen ermittelt, so sind diese Lösungen auch unter sich isotonisch. Es kommt nur darauf an, eine Pflanze und ein Gewebe zu wählen, in denen in Tausenden von Zellen die Grenze bei genau derselben Concentration überschritten wird, und diese Erscheinung sich leicht und mit voller Schärfe beobachten lässt. Solches ist aber bei den sogenannten Indicatorpflanzen der Fall †). Unter diesen wählte ich die *Tradescantia discolor*, und zwar die violette Oberhaut auf der Unterseite des Mittelnerven ausgewachsener Blätter. Dieses Gewebe ist, wie meine früheren Untersuchungen lehrten, für ähnliche Zwecke durchaus zuverlässig.

Ich habe nun in verschiedenen Versuchen die plasmolytische Grenzconcentration des Rohrzuckers für dieses Gewebe, und den ihr jedesmal entsprechenden analogen Werth für die Raffinose bestimmt. Aus diesen Zahlen lässt sich, nach dem angeführten Gesetze, das Molekulargewicht der Raffinose ohne Weiteres berechnen.

Da die oben mitgetheilten Zahlen für das Molekulargewicht der Raffinose sehr weit auseinander liegen, müsste ich durch einen Vorversuch zunächst entscheiden, welche von ihnen der Wahrheit am nächsten entsprach, ehe ich an die

---

*) Hamburger in *Onderzoekingen van het Physiologisch Laboratorium te Utrecht*, 3e Reihe, Bd. X, S. 49, 1886.

†) Pringheim's *Jahrbücher*, Bd. XIV, S. 444.

genaue Ermittelung herantreten konnte. Ich bin dabei von folgender Berechnung ausgegangen.

Eine Lösung von 0.22 Mol. Rohrzucker pflegt in den erwähnten Zellen von *Tradescantia discolor* einen schwachen Grad von Plasmolyse hervorzurufen. Eine Lösung von 0.22 Mol. Raffinose muss sich also, nach dem obigen Gesetze, gleich verhalten. Eine solche Lösung enthält aber, je nachdem man eine der drei Formeln annimmt, 0.22 × 396, 0.22 × 594 oder 0.22 × 1188 Gramm pro Liter, ihre Concentration ist demgemäss 8.7, 13.1 oder 26.1 pCt. der kristallwasserhaltenden Substanz. Ich bereitete mir nun eine Lösung von 13.1 pCt. und brachte in diese ein Praeparat des nahmhaft gemachten Gewebes. Ist das Molekulargewicht = 396, so muss darin eine sehr starke Plasmolyse eintreten; ist es = 594, so muss diese Erscheinung in schwächerm Grade, und bei einem Molekulargewicht von 1188 muss sie gar nicht eintreten. Nach 4 Stunden zeigte sich, dass der zweite Fall vorlag; in sämmtlichen Zellen war der Protoplast an einer kleinen Ecke von der Zellhaut abgehoben. Nur die Ansicht von Loiseau und Scheibler konnte also richtig sein. Zur Contrôle machte ich noch eine Lösung von 26.1 pCt.; in dieser war nach vier Stunden die Plasmolyse so stark, dass die Protoplaste sich bis auf etwa die Hälfte ihres ursprünglichen Volumens contrahirt hatten. Diese Lösung hatte also eine etwa doppelt so grosse Spannkraft wie der Zellsaft, was mit dem Resultate des ersteren Versuches übereinstimmt.

Für die genaue Bestimmung der osmotischen Spannkraft der Raffinose stellte ich mir zwei Reihen von Lösungen her. Die erste von reinem Kandiszucker; diese wurden der einfacheren Berechnung halber gleich nach Grammolekülen (= 342 Gramm) pro Liter gewählt, und zwar in Concentrationen von 0.16—0.18—0.20—0.22—0.24 und 0.26 Molekül. Für die zweite Reihe machte ich die Lösungen nach Prozenten der kristallwasserhaltenden Substanz. Sie enthielten 9, 10, 11, 12, 13 und 14 pCt. Raffinose. Für jeden Versuch wurde von jeder dieser Lösungen 2—5 CCm. in einen kleinen Glascilinder gebracht und mit einem Praeparat

aus der violetten Oberhaut des Blattnerven von *Tradescantia discolor* beschickt. Und zwar wurden die Praeparate in jedem Versuch einem und demselben Blatte entnommen, und aus diesem in möglichst geringer Entfernung von einander geschnitten. Benachbarte Schnitte kamen dabei stets in nahezu isotonische Lösungen, um die Vergleichbarkeit eine möglichst vollständige zu machen.

Jeder Versuch dauerte 4 Stunden. Dann wurden die Praeparate unter dem Mikroskop, bei etwa 100-maliger Vergrösserung untersucht. Nach weiteren zwei bis vier Stunden wiederholte ich diese Prüfung und überzeugte mich in jedem einzelnen Fall, dass die gesuchte Grenze sich nicht verschoben hatte.

Die Resultate der vier, mit verschiedenen Blättern ausgeführten Versuche enthält die folgende Tabelle. Am Kopfe der einzelnen Spalten findet man die Concentrationen der Lösungen in obiger Weise ausgedrückt. Es bedeutet I. C. die sich aus dem Versuch ergebende, mit dem Zellsaft isotonische Concentration. Das Verhältniss dieser beiden Zahlen, durch 10 dividirt, gibt die mit 0.1 Mol. Rohrzucker isotonische Concentration der Raffinose in pCt.

Es bedeutet ferner: *n* keine Zelle plasmolysirt, *hp* etwa die Hälfte der Zellen und *p* sämmtliche Zellen plasmolysirt. Die mit *n* bezeichneten Lösungen waren also, in Bezug auf dem Zellsaft hypisotonisch, die durch *hp* angedeuteten isotonisch, und die einen *p* führenden hyperisotonisch.

Im Uebrigen vergleiche man über die Bedeutung solcher Tabellen meine oben citirte Arbeit *).

	Mol. Rohrzucker						pCt. Raffinose.							
[illegible]	0.16	0.18	0.20	0.22	0.24	I. C.	9	10	11	12	13	14	I. C.	$\frac{\text{I. C. Raff.}}{\text{I. C. Rohrz.}} \times \frac{1}{10}$
		n	*p*	*p*	*p*	0.19	*n*	*n*	*p*	*p*			10.5	5.526
	n	*p*	*p*	*p*	*p*	0.17	*n*	*n*	*p*	*p*			10.5	6.176
	n	*p*	*p*	*p*	*p*	0.17	*n*	*hp*	*p*	*p*			10.0	5.882
		n	*hp*	*p*	*p*	0.20	*n*	*n*	*n*	*hp*	*hp*	*p*	12.5	6.250

*) PRINGHEIM'S *Jahrbücher*, Bd. XIV, S. 450—465.

Im Mittel ist also die mit 0.1 Mol. Rohrzucker isotonische Concentration der Raffinose:

$$= 5.957 \text{ pCt.}$$

Zu bemerken ist, dass diese Zahl eine rein empirische ist, und dass zu ihrer Ermittelung keine theoretische Voraussetzung erforderlich war.

Um mich von der Zuverlässigkeit des erhaltenen Resultates noch weiter zu überzeugen, habe ich noch einige Controllversuche nach genau derselben Methode gemacht. Erstens habe ich die Versuche wiederholt mit einer im hiesigen chemischen Laboratorium aus Baumwolle dargestellten Raffinose, welche nicht so schön kristallisirt und nicht so völlig aschenfrei war als das oben benutzte, aus dem Handel bezogene Muster. Zweitens habe ich die Versuche, welche bei 15° C gemacht waren, bei etwa 0° C wiederholt. Drittens habe ich statt der *Tradescantia discolor* die *Begonia manicata* als Indicatorpflanze benutzt. In allen diesen Versuchen fand ich das mitgetheilte Resultat bestätigt, da die Concentrationen der Raffinose, welche mit 0.1 Mol. Rohrzucker isotonisch waren, nur unerheblich von der obigen Zahl abwichen. Da die Versuche aber nur zur Contrôle, und also nicht mit derselben Genauigkeit ausgeführt wurden, unterlasse ich es, auf die erhaltenen Zahlen näher ein zu gehen.

Wenn es sich nun darum handelt, aus dem rein empirischen Resultate unserer Versuche das Molekulargewicht der Raffinose zu berechnen, so haben wir darauf das im Anfange citirte Gesetz anzuwenden. Dieses lehrte uns, dass die mit 0.1 Mol. Rohrzucker isotonischen Lösungen anderer organischer Verbindungen gleichfalls im Liter annähernd 0.1 Molekül enthalten müssen.

Hieraus folgt, das für Raffinose, annähernd:

$$5.957 \text{ pCt.} = 0.1 \text{ Mol. pro Liter}$$

ist.

Das Molekulargewicht der Raffinose ist also annähernd

$$= 595.7.$$

Die von den verscheidenen Formeln geforderten Molekulargewichte waren aber:


$C_{12}H_{22}O_{11} + 3H_2O$ 396


$C_{18}H_{32}O_{16} + 5H_2O$ 594


$C_{36}H_{64}O_{32} + 10H_2O$ 1188

Wir finden also mit der zweitgenannten Formel eine sehr genügende Uebereinstimmung. Es folgt daraus aber, dass, nach dem Gesetze der isotonischen Coëfficienten, nur diese von Loiseau aufgestellte und von Scheibler in so überzeugender Weise vertheidigte Formel die richtige sein kann.

HET LINEAIRE COMPLEX

EN DE

CONGRUENTIE (1,1)

DOOR

P. H. SCHOUTE.

Onder een *complex* van den n^{den} graad verstaat men een drievoudig oneindig aantal lijnen zoo in de ruimte gegeven, dat er door elk willekeurig punt P in elk willekeurig door dit punt aangenomen vlak π een aantal n dier lijnen gaan. Hieruit volgt dan, dat de door een punt P gaande lijnen van het complex een kegel van den n^{den} graad vormen en de in een vlak π liggende lijnen van het complex een kromme van de n^{de} klasse omhullen; deze kegel heet de *complexkegel* van het punt P en deze kromme de *complexkromme* van het vlak π.

Onder een *congruentie* (m, n) verstaat men een tweevoudig oneindig aantal lijnen zoo in de ruimte gegeven, dat er m dezer lijnen door elk willekeurig punt P gaan en n dezer lijnen in elk willekeurig vlak π liggen; van deze getallen heet m de *graad* en n de *klasse* van de congruentie.

Volgende bladzijden zullen eerst een meetkundige behandeling bevatten van het eenvoudigste complex, het complex van den eersten graad of *het lineaire complex,* en van de eenvoudigste congruentie, *de congruentie* (1,1). Daarbij zullen uitsluitend bekende uitkomsten verkregen worden, maar langs een meer rechtstreekschen weg, die bij het onderzoek

van het lineaire complex geen kennis van de theorie der reciprociteit in de ruimte onderstelt en bij de beschouwing van de congruentie (1,1) onafhankelijk blijft van de theorie van het lineaire complex. En daarna zullen eenige nieuwe uitkomsten verkregen worden door beide vormingen in verband met elkaar te beschouwen.

I. Het lineaire complex.

1. Is het complex, dat we beschouwen, een lineair complex, dan herleidt zich de complexkegel van elk punt P tot een vlak door P, het *complexvlak* π van P, en de complexkromme van elk vlak π tot een stralenbundel van lijnen door een punt in π, het *complexpunt* P van π. Daar dit geen verwarring veroorzaken kan, vervangen we kortheidshalve de namen complexpunt, complexvlak en lijn van het complex door *pool*, *poolvlak* en *straal*.

2. *Ligt het punt* Q *in het poolvlak* π *van het punt* P, *dan ligt* P *ook in het poolvlak* φ *van* Q. Want als Q in het poolvlak π van P ligt, is PQ een straal en als PQ een straal is, ligt P ook in het poolvlak φ van Q.

Indien men op de willekeurige lijn l' (fig. 1) twee punten P en Q aanneemt, van deze punten de poolvlakken π en φ zoekt en de doorsnee dezer vlakken l'' noemt, dan zal een willekeurig punt R van l'' volgens de juist bewezen stelling het vlak $(R\,l')$ en evenzoo een willekeurig punt S van l' het vlak $(S\,l'')$ tot poolvlak hebben. Omdat in het algemeen het poolvlak van een willekeurig punt van een der lijnen l' en l'' dus het vlak door dit punt en de andere lijn is, noemt men lijnen als l' en l'' *weerkeerige poollijnen* van het complex. Van zulk een lijnenpaar kan men bij een bepaald complex steeds een der twee willekeurig aannemen; de andere is dan bepaald.

Elke lijn, die twee weerkeerige poollijnen snijdt, is een straal. En elke straal, die van twee weerkeerige poollijnen er een snijdt, snijdt ook de andere.

a). Wat men hier bij stralen en weerkeerige poollijnen ontmoet, herinnert aan de verhouding tusschen bestaanbare en toegevoegd onbestaanbare lijnen. Even als elke bestaanbare lijn, die van twee toegevoegd onbestaanbare lijnen er een ontmoet, dit ook de andere doet, snijdt elke straal, die van twee weerkeerige poollijnen er een ontmoet, ook de andere. In dit opzicht speelt de viervoudige oneindigheid van bestaanbare lijnen in het achtvoudig oneindige gebied der onbestaanbare lijnen tegenover de paren van toegevoegd onbestaanbare lijnen dezelfde rol, die in het lineaire complex de stralen met betrekking tot de paren van weerkeerige poollijnen vervullen. Maar terwijl in het complex elke lijn, die twee weerkeerige poollijnen snijdt, een straal is, zal elke lijn, die twee toegevoegd onbestaanbare lijnen snijdt, nog geen bestaanbare lijn behoeven te zijn.

b). De namen pool, poolvlak en weerkeerige poollijnen zijn aan de theorie der *reciprociteit* ontleend, met welke het lineaire complex in nauw verband staat. Zoo als men weet, noemt men twee ruimtestelsels reciprook, als met een punt van het eene een bepaald vlak van het andere en met punten in een vlak van het eene bepaalde vlakken door een punt van het andere overeenkomen, als dus met punt en vlak van het eene vlak en punt van het andere overeenstemmen. Heeft daarbij *involutie* plaats, d. w. z. komt met elk willekeurig punt P hetzelfde vlak π overeen, tot welk der beide stelsels men P ook laat behooren, dan heeft men met een *poolstelsel in de ruimte* te doen en zijn de beide ruimtestelsels, die het samenstellen, elkaars *weerkeerige poolfiguren* met betrekking tot een bestaanbaar of onbestaanbaar oppervlak van den tweeden graad; tenzij het gebeuren mocht, dat elk punt in zijn poolvlak ligt, welk bijzonder geval zich bij het lineaire complex voordoet. Dit bijzondere poolstelsel is door MÖBIUS een *nulstelsel* genoemd. Op dit nulstelsel komen we later terug (art. 11^c).

Omtrent de stelkundige behandeling van de complexen van eersten en tweeden graad verwijzen wij in de eerste plaats naar PLUECKER's *Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement*, in 1868 door F. KLEIN bij TEUBNER uitgegeven. In dit werk maakt PLUECKER gebruik van *lijncoördinaten*. Deze treden echter daarin nog niet op in den meest algemeenen vorm, waarin men ze vindt in KLEIN's dissertatie en in enkele verhandelingen van lateren tijd. Men vergelijke bijv. den herdruk van KLEIN's dissertatie in deel XXIII van de *Mathematische Annalen*.

Voor de meetkundige behandeling van het lineaire complex kan men TH. REYE's *Geometrie der Lage* raadplegen. Van deze

afleiding zal wat hier gegeven wordt slechts in zoover afwijken, dat het zich zelfstandig ontwikkelt uit de bewezen betrekking tusschen weerkeerige poollijnen en stralen en geen gebruik maakt van uitkomsten verkregen door de theorie der reciprociteit, die evenzeer uit de in den aanvang van dit artikel bewezen stelling wordt opgetrokken. Bij deze wijze van voorstelling zullen we genoodzaakt zijn voorloopig aan te nemen, dat er een lineair complex bestaat om dan eerst later na te gaan hoe men het verkrijgt (art. 8^b).

c). Behooren bij de vier niet in een vlak gelegen punten A, B, C, D de dan ook niet door een punt gaande vlakken $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, dan zijn de twee viervlakken $ABCD$ en $\alpha\beta\gamma\delta$ elkaar tegelijkertijd in- en omgeschreven. Terwijl nl. A in α ligt, enz., gaat het vlak (BCD) door het punt $(\beta\gamma\delta)$, enz.; want de lijnen, die het punt $(\beta\gamma\delta)$ met B, C, D verbinden, zijn door dit punt gaande stralen en liggen dus in het poolvlak van $(\beta\gamma\delta)$, enz.

Men vergelijke Möbius (Crelle's *Journal, III*, blz. 273 en Neuberg (*Mémoires de la Société royale des sciences de Liège*, 2de reeks, XI.)

3. De onderstelling, dat twee weerkeerige poollijnen elkaar snijden, voert tot een bijzonder geval van het lineaire complex.

Zijn nl. de lijnen l' en l'' (fig. 2) twee in het vlak π gelegen weerkeerige poollijnen, dan zal π het poolvlak zijn van elk punt P' van l' en van elk punt P'' van l''. Daaruit zal dan volgen, dat elke lijn $P'P''$ van π straal is en π dus poolvlak is van elk zijner punten.

Is nu π (fig. 3) een vlak, dat poolvlak is voor al zijn punten P, φ het poolvlak van een willekeurig buiten π aangenomen punt Q en a de snijlijn van π en φ, dan is a de weerkeerige poollijn van PQ. Wijl nu bij verplaatsing van P in π blijkt, dat elke willekeurige lijn PQ door Q de lijn a tot weerkeerige poollijn heeft en het poolvlak ϱ van elk willekeurig punt R dus door a gaat, is het complex de vereeniging van alle lijnen, die a snijden. Werkelijk voldoet die verzameling van lijnen aan de van het lineaire complex gegeven bepaling. We noemen zulk een lineair complex een *oneigenlijk complex* en de lijn, die door al zijn stralen gesneden wordt, zijn *as*. Ligt deze as in het oneindige, dan

bestaat het complex uit alle lijnen evenwijdig aan een zelfde vlak.

a). We noemen het bijzondere complex een oneigenlijk en niet een ontaard complex, omdat onder een *ontaard complex* van hoogeren graad in overeenstemming met het begrip van ontaarde kromme een complex verstaan wordt, dat zich in complexen van lageren graad splitst.

b). Hadden we er boven de aandacht op gevestigd, dat het snijpunt P (fig. 2) van twee elkaar snijdende weerkeerige poollijnen pool is van elk door dit punt gebracht vlak, dan zouden we gevonden hebben, dat de polen van alle vlakken op een bepaalde lijn a moeten liggen en het complex dus langs dien weg ook gebleken zijn te bestaan uit alle lijnen, die een zekere lijn a snijden, enz.

Sluiten we het bijzondere geval van het oneigenlijke complex voorloopig uit, dan kunnen twee weerkeerige poollijnen elkaar dus niet snijden. Hieruit volgt, dat de weerkeerige poollijn van een straal s met s moet samenvallen. Is nl. P een punt van s, dan zal het poolvlak π van P door s gaan. En nu voert de onderstelling, dat de in π gelegen weerkeerige poollijn van s verschilt van s, tot het oneigenlijke complex. Bij het algemeene lineaire complex zullen twee weerkeerige poollijnen derhalve òf elkaar kruisen, òf in een straal samenvallen.

c). In dit opzicht wijkt het lineaire complex af van het poolstelsel in de ruimte. Want bij het laatste vormen twee toegevoegde raaklijnen aan het ordeoppervlak van den tweeden graad, dat de reciprociteit beheerscht, twee elkaar snijdende weerkeerige poollijnen. En in dit opzicht verschilt het lineaire complex ook van het viervoudig oneindige gebied der onbestaanbare lijnen. Want, zooals bekend is, kunnen toegevoegd onbestaanbare lijnen een punt gemeen hebben, dat dan even als het vlak door beide lijnen altijd bestaanbaar is.

Omtrent de wijze van samenvalling van twee weerkeerige poollijnen in een straal vergelijke men art. 15^c.

In zijn *Geometrie der Lage* noemt TH. REYE de onbestaanbare lijnen met een bestaanbaar punt *imaginäre Geraden erster Art* en die zonder bestaanbaar punt *imaginäre Gera-*

den zweiter Art. Dit is in zoover minder logisch als de groepen niet gelijkwaardig zijn, maar de eerste een onderafdeeling vormt van de tweede.

d). Men vindt de coördinaten der weerkeerige poollijn eener gegeven lijn op de meest eenvoudige wijs in die der gegeven lijn uitgedrukt in TH. REYE's verhandeling *Ueber lineaire und quadratische Strahlencomplexe und Complexengewebe* (CRELLE's *Journal XCV*, blz. 330).

Uit het bovenstaande volgt, dat het algemeene lineaire complex geen vlak bevat, dat poolvlak is voor meer dan een zijner punten. Want is een vlak poolvlak voor twee zijner punten, dan is het dit voor al zijn punten en deze onderstelling leidt tot het oneigenlijke complex. En evenmin kan het algemeene lineaire complex een punt bevatten, dat pool is voor meer dan een der door dit punt gaande vlakken. Want is een punt pool voor twee der door dit punt gaande vlakken, dan hebben alle vlakken door dit punt in dit punt hun pool en ook deze onderstelling leidt tot het oneigenlijke complex. Beide opmerkingen laten zich vereenigen in de stelling, die zegt, dat het algemeene complex geen *uitzonderingselementen* toelaat.

e). Met het oog op de bepaling van het lineaire complex kan het den oningewijde overbodig schijnen het bewijs van het ontbreken der uitzonderingselementen te leveren. Het is dit echter niet. Want bij het oneigenlijke complex, dat toch ook altijd een lineair complex is, komen deze uitzonderingselementen wel voor; daar zijn alle punten der as en alle vlakken door de as uitzonderingselementen. Bovendien komen uitzonderingselementen van geheel denzelfden aard bij complexen van hoogeren graad voor. Wijl de complexkegels en complexkrommen daar geen vlakken en punten zijn, maar kegels van den n^{den} graad en krommen van de n^{de} klasse, zal een punt P daar uitzonderingspunt zijn, als de complexkromme van elk vlak π door P bestaat uit het als kromme van de eerste klasse beschouwde punt P en een kromme van de $n-1^{\text{ste}}$ klasse, en evenzoo een vlak π uitzonderingsvlak wezen, als de complexkegel van elk punt P van dit vlak zich in dit vlak en een kegel van den $n-1^{\text{sten}}$ graad splitst. Deze uitzonderingselementen heeten dan *hoofdpunt* en *hoofdvlak*. En doet zich het geval voor, dat een punt als kromme van de

eerste klasse k-maal tot de complexkromme van elk door dit punt gaand vlak behoort, of dat een vlak k-maal deel uitmaakt van den complexkegel van elk zijner punten, dan spreekt men van een *k-voudig hoofdpunt* en een *k-voudig hoofdvlak*. Zoo heeft het onder den naam van *tetraëdraalcomplex* bekende complex van den tweeden graad (TH. REYE, *die Geometrie der Lage*) de hoekpunten en zijvlakken van een viervlak tot enkelvoudige hoofdpunten en hoofdvlakken. Zoo speelt, als P en P' isogonaal verwant zijn met betrekking tot een viervlak, dit viervlak geheel dezelfde rol ten opzichte van het complex van den derden graad door de verbindingslijnen PP' gevormd (*Association française*, Congrès de Toulouse, 1887). Zoo bezit het complex van den vierden graad, waarvoor de afstanden der stralen tot twee gegeven lijnen een gegeven verhouding hebben, twee tweevoudige hoofdpunten, zes enkelvoudige hoofdvlakken en één tweevoudig hoofdvlak en heeft het complex van den vierden graad, waarbij het product dier afstanden standvastig is, twee tweevoudige hoofdpunten en acht enkelvoudige hoofdvlakken (*Annales de l' École Polytechnique de Delft*, III, 52), enz.

Elke lijn, waarvan elk punt een k-voudig hoofdpunt en elk er door gaand vlak dan ook een k-voudig hoofdvlak is, noemt men een *k-voudige hoofdlijn*. Als een lineair complex in een oneigenlijk complex overgaat, heeft het dus de as van dit oneigenlijke complex tot enkelvoudige hoofdlijn. En indien een complex van den n^{den} graad een k-voudige hoofdlijn heeft, splitst het zich in het k-maal getelde oneigenlijke complex, dat deze hoofdlijn tot as heeft, en een complex van den graad $n-k$.

Behalve de genoemde uitzonderingselementen bevat elk complex van hoogeren dan den eersten graad nog *bijzondere punten* en *bijzondere vlakken*, d. w. z. punten, waarvan de complexkegels een dubbelribbe meer hebben dan die der overige punten, en vlakken, waarvan de complexkrommen een dubbelraaklijn meer hebben dan die der overige vlakken. Zoo is bij het algemeene complex van den tweeden graad de meetkundige plaats der punten, wier complexkegels een dubbelribbe hebben en dus uit twee vlakken bestaan, tevens het omhullend oppervlak der vlakken, wier complexkrommen een dubbelraaklijn bezitten en dus uit twee punten samengesteld zijn, nl. een oppervlak van den vierden graad en de vierde klasse met zestien conische punten en zestien conische vlakken, d. w. z. vlakken die het in de punten eener kegelsnee aanraken; dit is het *oppervlak van* KUMMER.

Omtrent de algemeene theorie der complexen verwijzen wij naar de verhandelingen van CLEBSCH, F. KLEIN, WEILER en VOSS in de *Mathematische Annalen*.

4. Wijl elk vlak door l' zijn snijpunt met l'' tot pool heeft, liggen de polen van een bundel evenwijdige vlakken op een rechte lijn, de weerkeerige poollijn van de in het oneindige gelegen as des bundels. Deze meetkundige plaats van polen noemt men een *middellijn* van het complex. Dus is middellijn van het complex elke lijn, waarvan de weerkeerige poollijn oneindig ver ligt.

Alle middellijnen van het complex zijn onderling evenwijdig. Want, daar de bundels van evenwijdige vlakken het vlak in het oneindige gemeen hebben, hebben hun middellijnen de in het oneindige gelegen pool van dit vlak met elkaar gemeen. We noemen dit aan alle middellijnen gemeenschappelijke punt het *middelpunt* van het complex.

De middellijn, die behoort bij den bundel van vlakken loodrecht op alle middellijnen, noemt men de *as* van het complex. Wijl zij haar in het oneindige gelegene weerkeerige poollijn loodrecht kruist, zullen alle lijnen, die haar loodrecht snijden, stralen wezen; omgekeerd wordt zij door elken straal, die haar snijdt, loodrecht gesneden.

Bij elken bundel van evenwijdige vlakken, wier gemeenschappelijke lijn niet door het middelpunt gaat, behoort een middellijn in het eindige; bij elken bundel van evenwijdige vlakken door het middelpunt is de as des bundels een straal en dus als weerkeerige poollijn van zich zelf de dan in het oneindige liggende middellijn des bundels.

Bij het oneigenlijke complex vallen alle middellijnen samen met de lijn, die door alle stralen gesneden wordt en de as van het oneigenlijke complex genoemd is. Dus kan de as van het oneigenlijke complex werkelijk als as beschouwd worden in den zin, dien we bij het algemeene lineaire complex aan dit woord gehecht hebben, en is er geen tegenstrijdigheid tusschen de twee verschillende beteekenissen, waarin we het woord hebben gebezigd.

a). Men komt het voorstellingsvermogen te hulp door zich het middelpunt van het complex in het zenith (en nadir) te denken. Alle middellijnen van het complex zijn dan vertikaal. Alle bundels van niet vertikale evenwijdige vlakken hebben dan een vertikale middellijn in het eindige, alle bundels van vertikale

evenwijdige vlakken hebben dan een door den top gaande middellijn in het oneindige. Alle horizontale stralen snijden dan de as en alle horizontale lijnen, die de as snijden, zijn stralen, enz.

In het volgende zal men zich de as van het complex steeds vertikaal denken om alleen hiervan af te wijken als men twee lineaire complexen met niet evenwijdige assen te beschouwen heeft.

5. Zij a (fig. 4) de as van het complex, s een straal en σ het vlak door s evenwijdig aan a. Omdat dit vlak σ door het oneindig ver gelegen punt van a, d. i. door de pool van het vlak in het oneindige gaat, zal de pool van σ in het oneindige liggen en dus elke lijn in σ evenwijdig aan s straal zijn. In elk vlak σ evenwijdig aan a loopen de stralen dus onderling evenwijdig, m. a. w. *als geheel verandert het complex niet, wanneer het in de richting van de as verschoven wordt.*

6. Als van het complex de as a en een straal s gegeven is, vindt men gemakkelijk de weerkeerige poollijn van elke lijn l', die met s in een vlak σ evenwijdig aan a ligt. Bij de afleiding dezer constructie wordt eenvoudigheidshalve ondersteld, dat l' den straal s ontmoet in het punt S (fig. 5) van den kortsten afstand $A\,S$ tusschen a en s; wijl het complex in de richting van de as verschuifbaar is, doet deze onderstelling de algemeenheid niet te kort.

Vooreerst snijdt l' al de stralen evenwijdig aan het loodrecht op a staande vlak α, die op a en l' rusten en moet l'' op de door deze stralen gevormde hyperbolische paraboloïde dus een lijn van het stelsel (a, l') zijn. Ten tweede snijdt l' alle stralen in het vlak σ en moet l'' dus, wijl ze — èn als weerkeerige poollijn van l' èn als lijn van het stelsel (a, l') der hyperbolische paraboloïde — niet met l' in een vlak liggen mag, door het gemeenschappelijk punt dier stralen gaan en dus evenwijdig aan s wezen. Dus is l'' de aan s evenwijdige beschrijvende lijn der hyperbolische paraboloïde, wat voor deze lijn de volgende constructie oplevert. Breng een vlak β aan evenwijdig aan α en laat dit a, de lijn door S evenwijdig aan a en de lijnen l' en s achtereenvolgens in B, C, L en T snijden. Zoek in dit vlak

β het snijpunt L' van $B\,L$ met de lijn door T evenwijdig aan $B\,C$ en trek door L' de lijn $L'\,S'$ evenwijdig aan s, dan is deze laatste lijn de gevraagde lijn l''.

a). Als l' evenwijdig aan a aangenomen is, vereenvoudigt zich de constructie, wijl de hyperbolische paraboloïde een vlak wordt (plus het vlak in het oneindige); dan is l' een middellijn en de weerkeerige poollijn l'' van l' de lijn in het oneindige, die s en een gemeenschappelijke loodlijn van a en l' snijdt. Als l' in α ligt, wordt l'' de lijn door A evenwijdig aan s. En is l' evenwijdig aan s, d. w. z. valt zij met s samen, dan is ze straal en dus haar eigen weerkeerige poollijn.

7. De lijn $S'\,T'$ door S' evenwijdig aan $S\,L$ getrokken is een straal; want ze rust op l'' en is evenwijdig aan l'. Verandert men nu in het vlak σ de richting der lijn l' door S, dan vindt men achtereenvolgens alle stralen $S'\,T'$, die den kortsten afstand $A\,S$ van a en s loodrecht snijden.

Stellen r en r' de afstanden $A\,S$ en $A\,S'$ voor en zijn δ en δ' de hoeken, waaronder de stralen $S\,T$ en $S'\,T'$ de as kruisen, dan volgt uit de evenredigheid

$$C\,L : C'\,L' = B\,C : B\,C',$$

waarin C' het snijpunt van $L'\,T'$ met $B\,C$ aanduidt, onmiddellijk de betrekking

$$r \, tg\, \delta = r' \, tg\, \delta';$$

dus behoudt de uitdrukking $r\, tg\, \delta$ steeds dezelfde waarde, als men den straal s achtereenvolgens door elk der $A\,S$ loodrecht snijdende stralen vervangt.

a). De stralen, die $A\,S$ loodrecht snijden, snijden het vlak β in de punten eener gelijkzijdige hyperbool, die B tot middelpunt en $B\,C$ tot een der asymptoten heeft. Het oppervlak dier lijnen is dus een *orthogonale hyperbolische paraboloïde* met a tot as, A tot top, α tot topraakvlak en het vlak $A\,B\,S$ tot een der twee loodrecht op elkaar-staande richtvlakken.

Indien het punt T in plaats van tusschen C en L aan de zijde van C buiten $C\,L$ gelegen was, zou L' aan de zijde van B buiten $B\,L$ en dus ook S' aan de zijde van

A buiten $A\,S$ gevallen zijn; dan zouden r' en δ' beide het tegengestelde teeken verkregen en het product $r'\,tg\,\delta'$ geen verandering van teeken ondergaan hebben. Als men behoorlijk op het teeken let, is de uitdrukking $r\,tg\,\delta$ dus standvastig voor alle stralen loodrecht op $A\,S$, onverschillig aan welke zijde van A het voetpunt S' ligt.

Gaat men nu van den afstand $A\,S$ (fig. 6) tot den gelijken maar tegengestelden afstand $A\,S'$ over, dan keert de hoek δ van teeken om. Men vindt dan den straal s', terwijl de lijnen l' en l'' uit S evenwijdig aan s' en uit S' evenwijdig aan s dan weer twee weerkeerige poollijnen zijn. Draait nu de lijn s om a, dan brengt zij een omwentelingshyperboloïde voort, die l' en l'' bevat; bij die beweging is s in elken stand een straal van het complex, wijl ze in elken stand op l' en l'' rust. Bij draaiing van het complex om de as zal elke lijn s, die straal is, straal blijven en derhalve ook geen lijn, die geen straal was, straal worden; m. a. w. *als geheel verandert het complex niet, wanneer het om de as gedraaid wordt.* Hieruit blijkt tevens, dat de uitdrukking $r\,tg\,\delta$ niet slechts standvastig is voor alle stralen, die $A\,S$ loodrecht snijden, maar ook voor alle stralen, wier kortste afstand tot a in A loodrecht op a staat, d. i. met het oog op de verschuifbaarheid in de richting van de as, voor alle stralen zonder onderscheid. Aan die onveranderlijke grootheid $\mu = r\,tg\,\delta$ geeft men den naam van *constante* van het complex; zij is de afstand van de as tot de stralen, die deze onder een halven rechten hoek kruisen.

b). Als de constante $r\,tg\,\delta$ nul is, is het complex een oneigenlijk complex met a tot as; is ze oneindig groot, dan bestaat het complex uit alle lijnen die a loodrecht kruisen en is het complex dus een oneigenlijk complex met een in het oneindige liggende as.

8. De as a en een straal s bepalen samen het complex. Want de ligging van dezen straal met betrekking tot de as doet de constante van het complex kennen en met behulp van de as en deze constante kan men alle stralen vinden.

Als men het complex alleen door stralen bepalen wil, zal men er minstens vijf moeten aannemen. Want vier

willekeurig gekozen stralen komen met betrekking tot de bepaling van het complex geheel overeen met de twee deze vier stralen snijdende lijnen, die nu weerkeerige poollijnen van het complex zijn moeten. En is behalve een paar weerkeerige poollijnen l' en l'' niets gegeven, dan is van het poolvlak van een punt P nog slechts één straal, de snijlijn der vlakken $(P\,l')$ en $(P\,l')$, bekend, terwijl men van de pool van een vlak π nog slechts weet, dat ze op één bepaalden straal, de verbindingslijn der punten $(\pi\,l')$ en $(\pi\,l'')$, liggen moet. Geeft men echter behalve het paar weerkeerige poollijnen l' en l'' nog een straal s, dan is het complex ondubbelzinnig bepaald. Dan is nl. de pool Q van het poolvlak $(P\,s)$ en het poolvlak φ van het punt $(\pi\,s)$ onmiddellijk te vinden; zoodat men het poolvlak van P als het vlak door Q en de snijlijn van de vlakken $(P\,l')$ en $(P\,l'')$, de pool van π als het snijpunt van φ met de verbindingslijn der punten $(\pi\,l')$ en $(\pi\,l'')$ bepalen kan. Het complex kan dus door twee weerkeerige poollijnen en een straal en derhalve ook door vijf stralen bepaald worden.

a). Het lineaire complex is bepaald door vijf enkelvoudige voorwaarden. Dat een gegeven lijn straal is, is een enkelvoudige voorwaarde; dat een punt een bepaald poolvlak, of een vlak een bepaalde pool heeft, is een dubbele voorwaarde; dat een lijn een bepaalde weerkeerige poollijn heeft, of as is, is een viervoudige voorwaarde, enz.

Het getal vijf volgt bij de theorie der reciprociteit hieruit, dat de reciprociteit tusschen twee ruimtestelsels bepaald is, als men vijf willekeurig gekozen punten van het eene met vijf willekeurig gekozen vlakken van het andere laat overeenkomen. Zoo is (Reye, *die Geometrie der Lage*) een lineair complex ook bepaald door een *ruimtevijfhoek*, enz.

Bij stelkundige behandeling is het getal vijf dat der onderling onafhankelijke verhoudingen van de zes coëfficienten der lineaire homogene betrekking tusschen de zes lijncoördinaten der stralen. Omtrent de lijncoördinaten vergelijke men den herdruk der dissertatie van F. Klein (*Mathematische Annalen* XXIII, blz. 539—547) en omtrent nieuwere studie van het lineaire complex in lijncoördinaten Reye (Crelle's *Journal*, XCV, blz. 330—335).

b). In het voorgaande ligt het bewijs, dat er niet oneigenlijke

lineaire complexen bestaan, waarmee de bedenking van art. 2[b] ontzenuwd is.

9. Zijn s_1 en s_2 twee elkaar snijdende stralen van het complex, dan is elke lijn in hun vlak en door hun snijpunt straal. Dit volgt uit de bepaling van het complex.

Zijn s_1, s_2 en s_3 drie elkaar twee aan twee kruisende stralen, dan is elke lijn van het stelsel (s_1, s_2, s_3) op het door deze lijnen bepaalde regelvlak een straal. Want als l' een lijn is, die s_1, s_2, s_3 snijdt, dan zal de weerkeerige poollijn l'' van l' die lijnen ook snijden en zijn de lijnen van het stelsel (s_1, s_2, s_3) dus stralen, wijl ze alle de beide op het regelvlak liggende weerkeerige poollijnen l' en l'' snijden. Op dit oppervlak zijn dan de lijnen van het stelsel (l', l'') als weerkeerige poollijnen involutorisch gepaard; onder hen komen dus twee stralen voor, de dubbelelementen dier involutie.

Zijn l_1', l_1'' en l_2', l_2'' twee paar weerkeerige poollijnen en hebben de lijnen van het eene paar geen punten gemeen met die van het andere, dan hebben zij hyperboloïdische ligging. Want elke lijn, die op l_1', l_1'' en l_2' rust, is straal als snijlijn van l_1', l_1'' en elke straal, die l_2' snijdt, snijdt ook l_2''. Snijden echter l_1' en l_2' elkaar, dan liggen l_1'' en l_2'' in het poolvlak van dit snijpunt. De punten $(l_1'\ l_2')$ en $(l_1''\ l_2'')$ hebben dan de vlakken $(l_1''\ l_2'')$ en $(l_1'\ l_2')$ tot poolvlakken. De vereenigingslijn der punten is dan tevens de snijlijn der vlakken en dus een straal.

10. De as a van het complex en een straal s bepalen een *schroeflijn*, die a tot as en s tot raaklijn heeft. Alle raaklijnen dezer schroeflijn zijn stralen. Draait men deze schroeflijn om de as, dan zullen haar achtereenvolgende standen op een omwentelingscylinder een bundel van schroeflijnen vormen, waarvan alle raaklijnen stralen zijn. En laat men nu den cylinder zich achtereenvolgens naar beide zijden uitbreiden en daarbij tevens de er op gelegen schroeflijnen zich zoo vervormen als de standvastigheid van het product $r\ tg\ \delta$ dit vereischt, dan zullen de raaklijnen aan de schroeflijnen op de coaxiale cylinders gelegen gezamenlijk alle stralen van het complex vormen.

a). Naar aanleiding van fig. 6 zou men de stralen van het complex eveneens kunnen vereenigen tot telkens een der beide stellen beschrijvende lijnen van een tweevoudig oneindig aantal omwentelingshyperboloïdes.

Beschouwt men op een der schroeflijnen het punt P als het snijpunt van twee opvolgende raaklijnen der schroeflijn, dan is het duidelijk, dat het door deze beide raaklijnen gaande *kromtevlak* der schroeflijn in P het poolvlak van P is. En dit bewijst met betrekking tot een willekeurige schroeflijn de stelling, dat de kromtevlakken in de snijpunten met een willekeurig vlak π door een zelfde punt gaan, nl. door de pool van π met betrekking tot het complex, waartoe de schroeflijn behoort.

Met het oog op de winding der schroeflijnen noemt men het complex *rechts of links gewonden*, naarmate $r\, tg\, \delta$ positief of negatief is.

11. Men zou kunnen meenen, dat elke ruimtefiguur, die bij een willekeurig punt P een door dit punt gaand vlak π en omgekeerd bij een willekeurig vlak π een in dit vlak liggend punt P doet vinden, ook een lineair complex oplevert, als men de lijnen door P in het bij P gevonden vlak π en de lijnen in π door het bij π gevonden punt P als stralen beschouwt. Dit behoeft echter niet het geval te zijn, zoo lang men nog niet heeft aangetoond, dat elke straal als straal optreedt voor elk der punten P op hem en elk der vlakken π door hem.

Als voorbeeld nemen we in de ruimte twee paren elkaar kruisende lijnen m_1, m_2 en n_1, n_2 aan. Stellen dan m_p en n_p de door een willekeurig punt P gaande en m_π en n_π de in een willekeurig vlak π gelegene lijnen voor, die op deze lijnenparen m_1, m_2 en n_1, n_2 rusten, dan kan men aan het punt P het vlak $(m_p\, n_p)$ en aan het vlak π het punt $(m_\pi\, n_\pi)$ toewijzen en dus voor P de lijnen door P in het vlak $(m_p\, n_p)$ en voor π de lijnen in π door het punt $(m_\pi\, n_\pi)$ als stralen aanmerken Onderzoeken we nu of elke straal dien naam verdient voor al zijn punten en al zijn vlakken.

Is s (fig. 7) een straal voor het punt P en het vlak π, dan zal deze lijn in het algemeen geen straal zijn met be-

trekking tot een ander punt Q willekeurig op haar gekozen. Immers de lijnen m_q en n_q bepalen in het algemeen een niet door P gaand vlak φ. Want men kan zich voorstellen, dat eerst de lijnen m_q en n_q zoo zijn aangenomen, dat het vlak $(m_q\, n_q)$ niet door P gaat en men daarna m_1 en m_2 op m_p en m_q en evenzoo n_1 en n_2 op n_p en n_q heeft laten rusten. In het algemeen is elke straal s van P dus geen straal van een willekeurig op hem gekozen punt Q en kan deze lijn dit hoogstens voor een zeker aantal harer punten zijn. Hiermee is niet alleen aangetoond, dat de bedoelde verzameling van lijnen geen lineair complex vormt, maar zelfs, dat zij geen complex, van welken graad dan ook, kunnen vormen. Want uit den aard der zaak laat een complex slechts stralen toe, die stralen zijn voor elk der punten, die er op liggen, en elk der vlakken, die er door gaan.

a). Bij complexen van hoogeren graad komen wel lijnen voor, die *veelvoudige lijnen* zijn van den complexkegel van slechts een harer punten en *veelvoudige raaklijnen* van de complexkromme in slechts een der door haar gaande vlakken. Men vergelijke *Annales de Delft*, III, 52.

Dat de bedoelde lijnengroep geen complex vormt, blijkt ook hieruit, dat elke willekeurige lijn l tweemaal tot die verzameling behoort. Is nl. P een willekeurig punt dier lijn l, dan zal l straal zijn voor P, wanneer de raakvlakken in P aan de beide door l, m_1, m_2 en l, n_1, n_2 bepaalde oppervlakken van den tweeden graad samenvallen. En wijl die raakvlakken bij beweging van P over l twee vlakkenbundels vormen, die met de puntreeks P en dus ook onderling projectief zijn, vallen deze raakvlakken voor twee punten P van l samen, enz. Hieruit blijkt tevens, dat elke willekeurige lijn l straal is voor twee der door haar gaande vlakken, de vlakken door l, die de beide regelvlakken in een der beide juist gevonden punten aanraken.

b). Indien twee stelsels van lijnen zoo uit stralenbundels worden opgebouwd, dat elk vlak en elk punt een stralenbundel meebrengt, dan bezitten die beide stelsels denzelfden graad van oneindigheid als men rekening houdt met den graad van oneindigheid van elken straal. Wijl nu de stralen van een lineair

complex voor al hun punten en vlakken stralen zijn en dus een oneindig aantal malen geteld worden als men de stralen van alle punten en alle vlakken bij elkaar voegt, terwijl de stralen van de nu onderzochte groep onder deze omstandigheden slechts een eindig aantal malen genomen worden, moet dit bij de laatste lijnengroep hierin vergoeding vinden, dat de graad van oneindigheid dier nieuwe groep dien van het lineaire complex met een overtreft, m. a. w. dat alle lijnen in de ruimte een eindig aantal malen tot de nieuwe verzameling behooren.

Hebben de lijnenparen m_1, m_2 en n_1, n_2 echter hyperboloïdische ligging, dan zal elke straal voor al zijn punten en vlakken straal zijn en de verzameling van stralen werkelijk een lineair complex vormen. Is nl. P een willekeurig punt en s een lijn door P in het vlak $(m_p\ n_p)$ willekeurig getrokken, dan zal s straal zijn voor P en voor haar beide snijpunten met het door m_1, m_2 en n_1, n_2 gaande oppervlak van den tweeden graad; zoodat de beide projectivische bundels van raakvlakken in de punten van s aan de oppervlakken (s, m_1, m_2) en (s, n_1, n_2) aangebracht drie samenvallingen vertoonen en dus identisch zijn. En als elke straal straal is voor al zijn punten en vlakken, dan geldt de aan het begin van art. 2 bewezen stelling met al haar gevolgen en vormt dus de bedoelde verzameling van stralen een lineair complex; van dit lineaire complex zijn m_1, m_2 en n_1, n_2 twee paar weerkeerige poollijnen, enz.

c). Aan het slot van deze meetkundige beschouwing van het lineaire complex wijzen we met enkel woord den weg aan, langs welken Möbius in zijne studie op het gebied der statica tot het met het lineaire complex samenhangende nulstelsel (art. 2^b) gekomen is.

Zoo als bekend is, laat een willekeurig in de ruimte gegeven stelsel van krachten zich in het algemeen steeds herleiden tot twee elkaar kruisende krachten of tot een kracht en een koppel, terwijl men slechts in een bijzonder geval een enkele kracht of een koppel vindt. In het algemeene geval van twee krachten K' en K'' kan de lijn l', langs welke de eene kracht werkt, willekeurig aangenomen worden; maar dan is ook de lijn l'', langs welke de andere kracht werkt, ondubbelzinnig bepaald. Draait l' om een harer punten P, dan beweegt l'' zich in een vlak π door P; beweegt l' zich in een vlak π, dan draait l'' om een punt P. Gemakkelijk herkent men in de lijnenparen l', l'' de paren weerkeerige poollijnen en in de met elkaar overeenkomende ele-

menten P en π de bij elkaar behoorende polen en poolvlakken van een lineair complex. Elke middellijn van dit complex is dan omgekeerd een lijn, langs welke men een bepaalde kracht kan laten werken, die in vereeniging met een bepaald koppel, d. i. met een nulkracht in het oneindige, het krachtenstelsel kan vervangen; onder deze middellijnen is de as van het complex de *centrale as* van POINSOT, d. i. de lijn, waarbij de resultante met het kleinste koppel behoort. De stralen van het complex zijn, omdat ze de twee weerkeerige poollijnen snijden zoodra men weet dat zij het er één van beide doen, *de lijnen, voor welke de som der momenten van de krachten van het stelsel nul is.* En herleidt het krachtenstelsel zich tot een enkele resultante of tot een koppel, dan herleidt zich het lineaire complex tot een oneigenlijk complex met een as in het eindige of in het oneindige. Men vergelijke omtrent het nulstelsel de verhandeling van MÖBIUS (CRELLE's *Journal*, X, 317 of A. F. MÖBIUS' *gesammelte Werke* I, 489).

Aan deze mechanische behandeling van het complex heeft ZEUTHEN een andere voorstellingswijze verbonden. Verstaat men onder het *moment van twee lijnen*, langs welke men een positieve richting aangenomen heeft, het product van haar kortsten afstand met den sinus van den hoek, dien haar positieve richtingen met elkaar vormen, d. i. het moment van een *eenheidskracht* langs de eene lijn met betrekking tot de andere lijn, dan is het complex met betrekking tot elk harer paren weerkeerige poollijnen l', l'' te beschouwen als *de meetkundige plaats der lijnen, voor welke de met betrekking tot l' en l'' genomen momenten een gegeven verhouding hebben.* ZEUTHEN komt tot dit resultaat met behulp van lijncoördinaten, die hij als momenten ten opzichte van de zes ribben van het coördinatenviervlak en daarna als verhoudingen van inhouden van viervlakken leert beschouwen (*Mathematische Annalen* I, 432).

Ten slotte zou men kunnen meenen, dat de beschouwing van ZEUTHEN vereenvoudiging moet ondergaan, als men niet de verhouding der momenten van een straal tot l' en l'' maar de verhouding zijner afstanden tot l' en l'' standvastig stelt. Dan komt men echter integendeel op een complex van den vierden graad terecht (*Annales de Delft*, III, 52).

II. DE CONGRUENTIE (1,1).

12. Volgens bepaling is de congruentie (1,1) een tweevoudig oneindig aantal lijnen zoo in de ruimte gegeven, dat er één door een willekeurig punt P gaat en één in

een willekeurig vlak π ligt. Kortheidshalve zullen we de congruentielijnen *koorden* noemen.

De koorden, die een willekeurig aangenomen lijn m snijden, vormen een oppervlak F^2 van den tweeden graad door m. Want, daar er door elk punt P van m een koorde gaat, ligt m eenmaal op dit oppervlak en verder bevat elk willekeurig vlak π door m nog een lijn van dit oppervlak, de in π gelegen koorde.

a). We sluiten voorloopig het bijzondere geval, waarin m koorde is, uit. Later zal blijken, wat dan het oppervlak F^2 vervangt (art. 14^b).

b). Geheel langs denzelfden weg vindt men, dat bij een congruentie (m, n) de een gegeven rechte lijn snijdende koorden een oppervlak van den $m + n^{\text{den}}$ graad vormen, dat m-maal door de gegeven lijn gaat.

13. Een willekeurige andere lijn m_1 wordt door het bij m behoorende oppervlak F^2 in twee punten gesneden. Dus zijn er twee op m en m_1 rustende koorden, die natuurlijk bestaanbaar, samenvallend of onbestaanbaar kunnen zijn. Zij laten zich onmiddellijk aanwijzen als m en m_1 (fig. 8) elkaar snijden. Dan is de eene koorde k in het vlak π door m en m_1 gelegen en gaat de andere k' door het snijpunt P van m en m_1.

Beschouwen we nu de bij de lijnen m en m_1 behoorende oppervlakken F^2 en F_1^2, die de twee elkaar kruisende koorden k en k' gemeen hebben, en nemen we aan, dat Q een niet op k of k' gelegen gemeenschappelijk punt dier oppervlakken is, dan is het duidelijk, dat de lijn, die door Q gaat en op k en k' rust, drie punten met elk der beide oppervlakken gemeen hebben en dus op elk dier beide oppervlakken liggen zal. Derhalve bestaat de doorsnee van F^2 en F_1^2 uit k en k' en twee lijnen t_1 en t_2, die k en k' snijden. Deze lijnen t_1 en t_2 kunnen weer bestaanbaar, samenvallend of onbestaanbaar zijn; we bewijzen, dat ze voor de congruentie (1,1) een belangrijke beteekenis hebben.

Snijdt t_1 het vlak π in T_1 en is m_2 een willekeurige lijn door dit punt in π getrokken, dan zal het bij m_2 behoorende oppervlak F_2^2 drie punten met t_1 gemeen hebben

en deze lijn dus bevatten. Zijn nl. M en M_1 de snijpunten van m_2 met m en m_1, dan zullen de drie koorden door M, M_1 en T_1, waarvan de laatste de lijn k is, in verschillende punten op t_1 rusten. Hieruit volgt, dat de koorde van elk punt M_2 van m_2 op t_1 rust en — als we m_2 in π om T_1 laten draaien — dat de koorde van elk punt van π — en dus ook elke koorde — t_1 ontmoet. Wijl nu met behulp van de oppervlakken $F_3{}^2$ behoorende bij lijnen m_3 door het snijpunt T_2 van t_2 met π geheel op dezelfde wijs blijken kan, dat elke koorde t_2 snijdt, is hiermee aangetoond, dat elke koorde de beide lijnen t_1 en t_2 ontmoet; m. a. w. *de congruentie* (1,1) *is de vereeniging der lijnen, die twee gegevene elkaar kruisende lijnen* t_1 *en* t_2 *snijden.* Deze lijnen t_1 en t_2 noemt men de *richtlijnen der congruentie.*

a). Het schijnt, dat men de oppervlakken F^2 behoorende bij de lijnen m_2 door T_1 eveneens gebruiken kan om te bewijzen, dat alle koorden t_2 snijden. Omdat in het volgende artikel hiertegen bezwaren zullen rijzen, is dit niet geschied.

Het oppervlak F^2 der lijn m is het oppervlak der lijnen, die op t_1, t_2 en m rusten.

b). We maken opmerkzaam op de rangschikking van al de koorden der congruentie tot telkens een der stellen beschrijvende lijnen der oppervlakken (m, t_1, t_2), die door draaiing van m om P in π worden voortgebracht. Zij vormen een bundel van oppervlakken met de uit vier lijnen k, k', t_1, t_2 bestaande basiskromme.

In het algemeen vormen de op een bundel van oppervlakken van den tweeden graad liggende rechte lijnen een congruentie (2,6); alleen als de basiskromme van den bundel een scheeve vierhoek is, splitst deze congruentie zich in twee congruenties (1,1) die elk een paar overstaande zijden des vierhoeks tot richtlijnen hebben en vier congruenties (0,1), die elk bestaan uit alle lijnen in een vlak door twee opvolgende zijden des vierhoeks.

Evenzoo als de lijnen in een vlak hier als een congruentie (0,1) verschijnen, komen alle lijnen door een punt als een congruentie (1,0) voor. Zoo splitst de congruentie (1,1) zich in een congruentie (1,0) en een congruentie (0,1), als de richtlijnen elkaar snijden. We noemen de congruenties (1,0) en (0,1) *oneigenlijke congruenties.*

Naderen de beide richtlijnen tot elkaar als twee nabij elkaar gelegen beschrijvende lijnen van een scheef oppervlak, dan bestaat de grensstand der congruentie uit de lijnen, die dit oppervlak in

de punten der lijn van samenvalling aanraken. Bij elk punt der lijn behoort dan een bundel van stralen door dit punt in het raakvlak aan het oppervlak door dit punt. Men spreekt dan van een *bijzondere congruentie* en kan het oppervlak gevormd door de loodrecht op de lijn van samenvalling staande koorden, dat de congruentie bepaalt, *de hyperbolische paraboloïde der congruentie* noemen (WEILER, *Erzeugung von Complexen ersten und zweiten Grades aus linearen Congruenzen*, Zeitschrift von SCHLÖMILCH, XXVII, 257).

14. De punten van en de vlakken door elk der beide richtlijnen maken uitzondering op den regel, dat door elk punt slechts een koorde gaat en in elk vlak slechts een koorde ligt; deze punten en vlakken zijn dus *uitzonderingselementen* der congruentie. Voor elk punt P_1 van t_1 zijn alle lijnen door P_1 in het vlak $(P_1 t_2)$ koorden, voor elk vlak π_1 door t_1 is dit met alle lijnen in π_1 door het punt $(\pi_1 t_2)$ het geval, enz. Snijden twee koorden elkaar, dan is dus elke lijn door haar snijpunt en in haar vlak koorde; het snijpunt ligt dan op de eene der beide richtlijnen en het vlak gaat door de andere.

a). Wat zich hier bij de uitzonderingselementen voordoet, is volkomen analoog aan hetgeen men in de stelkunde opmerkt. Een vergelijking van den n^{den} graad, die $n+1$ wortels bezit, is een identiteit, enz.

b). Indien de lijn m de richtlijn t_1 in T_1 en t_2 het vlak $(m t_1)$ in T_2 snijdt, vormen de op m rustende koorden in plaats van het eene stel beschrijvende lijnen van een oppervlak van den tweeden graad twee vlakke stralenbundels nl. de lijnen door T_1 in het vlak $(T_1 t_2)$ en de lijnen door T_2 in het vlak $(T_2 t_1)$. Het oppervlak dier koorden bestaat dan uit de twee vlakken $(T_1 t_2)$ en $(T_2 t_1)$. En snijdt m niet alleen t_1 in T_1 maar ook t_2 in T_2, dan blijft het resultaat onveranderd, ligt alleen T_2 ook op m.

c). Het zou kunnen schijnen, dat door deze uitkomst het in art. 13 gegeven bewijs zijn kracht verliest. Daar toch is gevonden, dat elke op m_2 (fig. 8) rustende koorde t_1 snijdt, omdat drie dezer koorden dit doen en het oppervlak F_2^2 dier koorden dus t_1 bevatten moet. En nu blijkt, dat de koorden, die rusten op de lijn m_2, die t_1 in T_1 snijdt, zich in twee groepen splitsen, waarvan de eene de lijnen door T_1 bevat die t_2 snijden en de andere de lijnen door een bepaald punt T_2 van t_2 die t_1 snijden; zoodat het mogelijk zou zijn, dat de drie koorden door M, M_1, en T_1 de richtlijn t_1 niet in drie verschillende punten sneden. Bij nader

onderzoek blijkt echter, dat de punten, waarin t_1 door de koorden van M en M_1 gesneden wordt, noodzakelijk van T_1 verschillen en het besluit, dat het oppervlak der op m_2 rustende koorden drie punten met t_1 gemeen heeft, ook nu dit oppervlak uit twee platte vlakken bestaat, volkomen geldig blijft; terwijl met behulp der lijn m_2 nog niet onmiddellijk blijken kan, dat t_2 op het bij m_2 behoorende oppervlak F_2^2 ligt, daar de koorden van M en M_1 de richtlijn t_2 in hetzelfde punt snijden. Daarom is, hoewel deze leemte natuurlijk gemakkelijk aan te vullen geweest zou zijn, de vervanging der lijnen m_2 door lijnen m_3 verkozen.

15. De congruentie (1,1) is door vier willekeurig gekozen koorden bepaald. Want deze doen, mits zij geen hyperboloïdische ligging hebben, de beide richtlijnen kennen.

Elk drietal koorden bepaalt een regelvlak van den tweeden graad, waarvan alle lijnen, die met de drie gegevene koorden tot hetzelfde stel behooren, koorden zijn; want al deze lijnen snijden de beide richtlijnen.

Denkt men zich nu de congruentie door de vier koorden k_1, k_2, k_3, k_4 bepaald en neemt men naast deze vier koorden een vijfde lijn s willekeurig aan, dan kan men onmiddellijk bewijzen, dat het door de vijf stralen k_1, k_2, k_3, k_4 en s bepaalde lineaire complex de congruentie door k_1, k_2, k_3, k_4 bepaald omvat en elke koorde dier congruentie dus straal is van het complex. Immers de beide richtlijnen t_1 en t_2 der congruentie zijn dan weerkeerige poollijnen van het complex, wijl met de lijn t_1, die k_1, k_2, k_3, k_4 snijdt, de eenige andere lijn, die deze vier stralen ontmoet, d. i. t_2, als weerkeerige poollijn overeenkomt. En dan is elke lijn, die t_1 en t_2 snijdt, d. i. elke koorde der congruentie, straal van het complex.

Het voorgaande leert ons de congruentie bepaald door de koorden k_1, k_2, k_3, k_4 beschouwen als de vereeniging der stralen gemeen aan de beide complexen (k_1, k_2, k_3, k_4, s) en $(k_1, k_2, k_3, k_4, s_1)$, waarbij s en s_1 twee geheel willekeurig gekozen lijnen zijn; m. a. w. *de congruentie* **(1,1)** *is de doorsnee van twee lineaire complexen.*

a). Gewoonlijk wordt de congruentie (1,1) als de doorsnee van twee lineaire complexen bepaald (Reye, *die Geometrie der Lage*). Dit is echter in zeker opzicht niet algemeen, omdat niet elke congruentie de doorsnee van twee complexen behoeft te zijn.

Indien een congruentie de doorsnee is van twee complexen van hoogeren graad, dan zijn in het algemeen haar graad m en haar klasse n aan elkaar gelijk. Dan is nl. het aantal koorden door een punt P als het aantal gemeenschappelijke beschrijvende lijnen der complexkegels van P en eveneens het aantal koorden in een vlak π als het aantal gemeenschappelijke raaklijnen der beide complexkrommen van π aan het product der graden van beide complexen gelijk. Toch zijn er congruenties, wier graad en klasse van elkaar verschillen. Zoo hebben we in art. 13^b de oneigenlijke congruenties (1,0), (0,1) en de congruentie (2,6) ontmoet en noemen we hier, om van andere voorbeelden niet te spreken, de bekende congruentie $(n^3 - n^2 + n, n^2 - n)$ gevormd door de normalen aan een puntalgemeen oppervlak F^n van den n^{den} graad (*Nieuw Archief voor Wiskunde*, VI, blz. 24 en 25).

Nu er werkelijk congruenties zijn, die niet als de doorsnee van twee complexen beschouwd kunnen worden, moet rekening gehouden worden met de mogelijkheid, dat de meest algemeene congruentie (1,1) niettegenstaande de gelijkheid van graad en klasse tot deze groep van congruenties behoort. En hoewel dit ons nu gebleken is niet het geval te zijn, is toch — juist omdat dit langs dezen weg eerst gebleken is — de hier gevolgde weg te verkiezen.

b). Bij de voorstelling der congruenties door tweetallen van vergelijkingen in lijncoördinaten, staat men met betrekking tot de congruenties, waarvan graad en klasse verschillend zijn, voor hetzelfde bezwaar, dat men bij de voorstelling der ruimtekrommen door twee vergelijkingen in puntcoördinaten ontmoet. Alleen de ruimtekromme, die de volledige doorsnee is van twee oppervlakken, kan door twee vergelijkingen worden voorgesteld; gedeeltelijke doorsneden, zoo als bijv. de ruimtekromme van den derden graad, vereischen meer dan twee van elkaar afhangende vergelijkingen. En evenzoo is het met congruenties gesteld. Zoo moet de congruentie (m, n) in vereeniging met een zekere andere congruentie $(pq - m, pq - n)$ de doorsnee zijn van twee complexen van de graden p en q. Maar deze aanvullende congruentie is even als de graden p en q der complexen in het algemeen niet te vinden.

Is een zeker vlak α een r-voudig hoofdvlak van een complex van den p^{den} graad en een s-voudig hoofdvlak van een complex van den q^{den} graad, dan bestaat de doorsnee dier complexen uit het rs-maal getelde vlak α en een congruentie $(pq, pq - rs)$. Een dergelijke congruentie, die zich door toevoeging van eenige oneigenlijke congruenties (0,1) of (1,0) tot de volledige doorsnee van twee complexen laat aanvullen, is de eenvoudigste congruentie met van elkaar verschillende kenmerkende getallen m en n, die

men zich denken kan; we zullen er later een voorbeeld van ontmoeten (art. 24).

De uitwerking van deze overeenkomst van bezwaren bij de analytische voorstelling van ruimtekrommen en congruenties leidt tot allerlei opmerkingen. Vooreerst is het duidelijk, dat gelijkheid van graad en klasse niet de eenige voorwaarde behoeft te zijn, waaronder een congruentie de volledige doorsnee is van twee complexen; want was dit het geval, dan zouden bij een congruentie met een ondeelbaar getal tot graad en klasse de door een punt P gaande koorden tevens in een vlak liggen en de in een vlak π liggende koorden tevens door een punt gaan moeten. Op dezelfde wijze als CAYLEY (*Comptes rendus* 1862 I blz. 55, 396, 672 en 1864 I blz. 994) getracht heeft het oppervlak van den laagsten graad te vinden, dat door een gegeven ruimtekromme gaat, — welk oppervlak door hem een *monoïde* genoemd is — kan men den graad van het complex van den laagsten graad zoeken, dat door een gegeven congruentie (m, n) kan gebracht worden, enz.

Omtrent de stralenstelsels of congruenties van hoogeren graad en klasse raadplege men de verhandelingen van KUMMER (*Über die algebraïschen Strahlensysteme u. s. w.* in de Abhandlungen van Berlijn 1864 en *Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlensysteme* (CRELLE's *Journal* LVII, blz. 202), een verhandeling van HIRST (*On Cremonian congruences* in de Proceedings of the London Math. Soc., XIV, 1883) en de reeds aangehaalde studie van VOSS in de *Math. Annalen*.

c). Zijn l' en l'' weerkeerige poollijnen van een lineair complex, dan bevat dit ook de koorden van de congruentie (1,1), die deze lijnen tot richtlijnen heeft, als stralen (art. 2). En de stralen, die een gegeven straal snijden, vormen blijkbaar een bijzondere congruentie (art. 14^c). Dus moet men aannemen, dat twee weerkeerige poollijnen in een straal samenvallen even als twee opvolgende standen der beschrijvende lijn van een scheef oppervlak, nl. zoo, dat het vlak door beide lijnen om de lijn draait als het snijpunt van beide lijnen zich over de lijn beweegt, enz. (art. 3^c).

16. Op een paar willekeurige vlakken π en π' teekenen de koorden der congruentie (1,1) twee vlakke stelsels af, tusschen welke een *kwadratische overeenkomst* bestaat. Want de hyperboloïde der op t_1, t_2 en een willekeurige lijn l van π (of π') rustende lijnen snijdt π' (of π) volgens een kegelsnee. In geval de snijlijn der vlakken echter een koorde is, gaat de overeenkomst in homografie of collineätie over.

a). Deze door STEINER gevondene afleiding der kwadratische

overeenkomst (*Systematische Entwickelung u. s. w.*, N°. 59, of *gesammelte Werke*, I, blz. 407) heeft historische waarde; zij vormt de eerste behandeling van dit onderwerp.

III. Stelsels van lineaire complexen.

17. Als een congruentie door vier koorden k_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ gegeven is, dan bepaalt elke vijfde willekeurig aangenomen lijn s een lineair complex, dat deze lijn s en al de koorden der gegeven congruentie tot stralen heeft. Laat men daarna s veranderen, dan verkrijgt men een enkelvoudig oneindig aantal lineaire complexen; wijl zij alle de koorden der gegeven congruentie als stralen gemeen hebben en er door elke willekeurige andere lijn s steeds een van hen gaat, geeft men aan dit samenstel van complexen den naam van *complexbundel* en aan de aan alle complexen des bundels gemeenschappelijke congruentie den naam van *basiscongruentie* des bundels.

a). De verzameling van lineaire complexen is enkelvoudig oneindig. Want bij de onderstelling, dat elke lijn s een nieuw complex bepaalt, zou het aantal der complexen viervoudig oneindig zijn. Maar, wijl elk complex een drievoudig oneindig aantal stralen heeft, wordt het bij deze onderstelling een drievoudig oneindig aantal malen geteld, enz.

Twee lineaire complexen bepalen samen een congruentie, die de gemeenschappelijke stralen van beide tot koorden heeft. Zij bepalen dus ook den complexbundel, waarvan deze congruentie de basiscongruentie is; m. a. w. een complexbundel is door twee zijner complexen bepaald.

Bepaalt men de basiscongruentie door haar twee richtlijnen t_1 en t_2 in plaats van door vier koorden, dan zal elke lijn s, die geen der richtlijnen snijdt, een complex bepalen, dat s tot straal en t_1 en t_2 tot een paar weerkeerige poollijnen heeft. Even als boven vormen al deze complexen weer een bundel, enz.

Een eigenaardig bijzonder geval doet zich voor, wanneer de beide richtlijnen elkaar loodrecht kruisen en een van beide in het oneindige ligt. Dan hebben de complexen des

bundels een gemeenschappelijke as, de in het eindige liggende richtlijn der congruentie, en zijn zij door de waarde der constante $\mu = r\, tg\, \delta$ van elkaar onderscheiden.

De complexbundel bevat twee oneigenlijke complexen, waarvan het eene t_1 en het andere t_2 tot as heeft. Wijl deze twee oneigenlijke complexen de basiscongruentie bepalen kunnen zij even goed als twee andere complexen des bundels den bundel bepalen. Men vindt een dezer oneigenlijke complexen als s een der beide richtlijnen snijdt; snijdt s beide richtlijnen, dan bepaalt ze als aan alle complexen des bundels gemeenschappelijke straal geen complex.

Als de richtlijnen t_1, t_2 der basiscongruentie elkaar snijden en de basiscongruentie zich dus splitst in alle lijnen door het snijpunt P van t_1, t_2 en alle lijnen in het vlak π door t_1, t_2, dan zal elk der complexen des bundels een oneigenlijk complex zijn met een as door P en in π. Snijdt nl. de lijn s, die met de basiscongruentie het complex bepaalt, het vlak π in S, dan zullen zoowel alle lijnen door S als alle lijnen door P tot dit complex behooren. Want het bevat de lijnen door S in π en s, dus alle lijnen door S, enz. Dus moet het complex een oneigenlijk complex zijn met de lijn $P\,S$ in π tot as.

18. De assen der lineaire complexen van den bundel, die een gegeven congruentie (1,1) tot basiscongruentie heeft, noemt men de *assen der congruentie*. We zoeken het oppervlak, dat de meetkundige plaats dier assen is.

De as van een complex snijdt het vlak in het oneindige in diens pool en ontmoet dus al de in het oneindige gelegen stralen; derhalve moeten de assen der congruentie alle haar oneindig ver gelegen koorde snijden. Maar dan moet ook het oppervlak F^2, dat volgens art. 12 de meetkundige plaats is van de koorden, die een willekeurig gegeven lijn snijden, voor elk van de assen der congruentie een hyperbolische paraboloïde zijn en wel een rechthoekige. Want, daar de as van een complex al de haar ontmoetende stralen loodrecht snijdt, staat zij loodrecht op het richtvlak der haar ontmoetende koorden en staan dus de beide richtvlakken loodrecht op elkaar.

Uit de beschouwingen van art. 6 volgt, dat de as van een complex den kortsten afstand van elk paar weerkeerige poollijnen loodrecht snijdt. Nemen we voor het complex een der complexen des bundels en voor het paar weerkeerige poollijnen de richtlijnen t_1 en t_2 der basiscongruentie, dan vinden we, dat alle assen der congruentie den kortsten afstand van t_1 en t_2 loodrecht snijden.

a). Nu zou men kunnen meenen, dat hieruit in verband met het voorgaande voor het gezochte oppervlak een hyperbolische paraboloïde gevonden wordt. Want de assen moeten evenwijdig blijven aan een vlak loodrecht op den kortsten afstand tusschen t_1 en t_2 en bovendien twee lijnen snijden, den genoemden kortsten afstand en de in het oneindige liggende koorde der congruentie. Bij nader inzien blijkt echter, dat het rusten op deze koorde met het evenwijdig zijn aan een vlak loodrecht op den kortsten afstand identisch is en dat in elk vlak loodrecht op dien kortsten afstand de as nu verder zoo bepaald moet worden, dat zij door de haar snijdende koorden loodrecht gesneden wordt.

De twee lijnen a (fig. 9), die in het vlak α loodrecht op den kortsten afstand $A_1 A_2$ van de richtlijnen t_1 en t_2 in het midden O tusschen A_1 en A_2 aangebracht den hoek tusschen de projecties u_1 en u_2 van t_1 en t_2 op dit vlak middendoordeelen, zijn assen der congruentie. Want uit de beschouwing der hyperbolische paraboloïde, die t_1, t_2 en een der beide lijnen a tot richtlijnen heeft, blijkt onmiddellijk, dat deze lijn a de haar ontmoetende koorden loodrecht snijdt. En aan den anderen kant zijn de lijnen a de eenige assen door O, waaruit dus volgen moet, dat er door elk punt van $A_1 A_2$ twee assen der congruentie gaan, daar de lijn $A_1 A_2$ zelve niet tot deze assen behoort. We toonen dit nog nader aan door voor een willekeurig punt van $A_1 A_2$ de assen te construeeren.

Brengt men een willekeurig vlak aan evenwijdig aan $A_1 A_2$, dat t_1 in B en t_2 in C snijdt, projecteert men B in B' en C in C' op het vlak der assen a, laat men uit O de loodlijn $O D'$ op de verbindingslijn $B' C'$ neer en zoekt men het punt D van de lijn $B C$ waarvan D' de projectie is op het vlak der assen, dan is de lijn $D E$ uit D

evenwijdig aan $D' O$ getrokken een as der congruentie. Want deze lijn $D E$ is richtlijn der hyperbolische paraboloïde, die door de richtlijnen t_1, t_2 en het evenwijdig aan $A_1 A_2$ aangenomen richtvlak bepaald wordt; dus zal zij als loodlijn op dit richtvlak de beschrijvende lijnen van dit oppervlak, d. w. z. de koorden die zij ontmoet, loodrecht snijden, enz.

Uit de figuur volgt onmiddellijk

$$\frac{A_1 E}{A_1 A_2} = \frac{B D}{B C} = \frac{B' D'}{B' C'}.$$

Wijl nu de meetkundige plaats van D' bij draaiing van het aan $A_1 A_2$ evenwijdig aangenomen vlak om $B B'$ de in het vlak α op $B' O$ als middellijn beschreven cirkel is en deze door de bij de verhouding $\frac{A_1 E}{A_1 A_2}$ passende lijn evenwijdig aan u_2 in twee punten D' gesneden wordt, gaan er twee assen der congruentie door elk punt E van $A_1 A_2$ en zijn deze assen gemakkelijk te construeeren, als het punt E gegeven is.

In elk vlak $A_1 A_2 D$ door $A_1 A_2$ ligt een der assen van de congruentie. Want bij het loodrecht op $A_1 A_2 D$ staande richtvlak door $B B'$ behoort een enkele as. Dus is de gezochte meetkundige plaats een *regelvlak van den derden graad* met $A_1 A_2$ tot dubbellijn en de haar loodrecht kruisende koorde in het oneindige tot enkelvoudige richtlijn.

b) De verhouding $\frac{A_1 E}{A_1 A_2} = \frac{B' D'}{B' C'}$ wordt het grootst, als men voor D' het punt D'' neemt, waar rechts van $B' O$ de raaklijn aan den hulpcirkel evenwijdig is aan $C' O$. Is nu $\angle B' O C' = 2\,\delta$, dan vindt men met betrekking tot het bedoelde punt D'' onmiddellijk $\frac{B' D''}{B' C'} = \frac{\sin^2 (45° + \delta)}{\sin 2\,\delta}$. Eveneens wordt het punt D''', waar de verhouding haar kleinste waarde heeft en dat in den hulpcirkel middellijnig tegenover D'' gelegen is, door de betrekking $\frac{B' D'''}{B' C'} = -\frac{\sin^2 (45° - \delta)}{\sin 2\,\delta}$ bepaald. De punten D'' en D''' zijn niet in de figuur aangewezen.

De beide gevonden grensverhoudingen geven op $A_1 A_2$ de punten F aan, voor welke de beide assen samenvallen. Zij liggen,

zooals te verwachten was, symmetrisch ten opzichte van O, want $\frac{B' D''}{B' C'} + \frac{B' D'''}{B' C'} = 1$. Tusschen deze grenspunten F liggen de punten E met bestaanbare, er buiten liggen de punten E met onbestaanbare assen. In het algemeen liggen de grenspunten buiten het segment $A_1 A_2$; alleen als $\delta = 45°$ is, vallen zij met A_1 en A_2 samen.

In A_1 zijn de beide assen de lijn t_1 behoorende bij een oneigenlijk complex en de loodlijn door A_1 op het vlak $(A_1 t_2)$; werkezijn deze lijnen altijd bestaanbaar en vallen ze voor $\delta = 45°$ samen.

Is de gegeven congruentie een bijzondere (art. 13^b), dan zal het voorgaande in hoofdzaak doorgaan. De punten $A_1 A_2$ vereenigen zich dan in het centraalpunt A der beschrijvende lijn van samenvalling met betrekking tot de hyperbolische paraboloïde der congruentie, δ wordt nul en de grenspunten F liggen aan weerskanten van A op een afstand, die het dubbel is van den *parameter* dier beschrijvende lijn (DE LA GOURNERIE, Traité de géométrie descriptive, deel II, blz. 144).

c). De bij de afleiding van het oppervlak der assen gebruikte hyperbolische paraboloïdes hebben de zijden van een scheeven vierhoek ($A_1 A_2$, t_1, de in het oneindige liggende koorde en t_2) gemeen. Zij vormen dus een bundel. We vinden derhalve hier de in art. 13^b aangewezen rangschikking der koorden zoo herhaald, dat met ieder oppervlak een as der congruentie in verband staat.

d). Als t_1 in het oneindige ligt en t_2 niet loodrecht kruist, herleidt het oppervlak van den derden graad zich tot een plat vlak, het vlak door t_2, dat met een willekeurig vlak door t_1 een loodlijn op de projectie van t_2 op dit vlak tot doorgang heeft. In dit vlak zijn de lijnen evenwijdig aan t_2 de assen van de complexen des bundels. Kruist de in het oneindige liggende richtlijn t_1 de andere t_2 loodrecht, dan vallen, zoo als we reeds zagen, al de assen met t_2 samen.

19. Alle complexen, die drie gegeven lijnen s_1, s_2, s_3 tot stralen hebben, hebben als stralen al de lijnen s gemeen, die op het door deze drie lijnen bepaalde oppervlak van den tweeden graad met deze drie lijnen tot een zelfde stel behooren. Zij vormen een tweevoudig oneindig samenstel van complexen, waaraan men den naam van *complexnet* geeft; van dit complexnet vormt het oppervlak der lijnen s het *basisregelvlak*.

Elke lijn a', die de drie gegeven stralen s_1, s_2, s_3 ont-

moet, is as van een oneigenlijk complex in het net begrepen; de meetkundige plaats der assen a' is dus eveneens het basisregelvlak.

Elke willekeurige lijn l bepaalt met de drie lijnen s_1, s_2, s_3 een congruentie (1,1), die de twee op l rustende lijnen a' van het basisregelvlak tot richtlijnen heeft.

Elk willekeurig paar lijnen l_1, l_2 bepaalt met de drie gegeven stralen een complex; de assen van deze complexen, noemt men de assen van het complexnet. We zullen later zien welk een congruentie zij vormen.

Het complexnet is bepaald door drie onderling onafhankelijke complexen C_1, C_2, C_3, d. w. z. door drie complexen, die niet tot een zelfden bundel behooren. Zijn nl. t_1 en t_2 de richtlijnen der congruentie gemeen aan C_1 en C_2, t_1' en t_2' de richtlijnen der congruentie gemeen aan C_2 en C_3, dan hebben deze vier lijnen als twee paar weerkeerige poollijnen van C_2 hyperboloïdische ligging en vormen de op deze vier lijnen rustende stralen het basisregelvlak van het net.

a). Indien s_1 en s_2 elkaar in S snijden en s_3 het vlak σ door s_1 en s_2 in T ontmoet, bestaat het basisregelvlak uit twee stralenbundels. Gaan de drie stralen s door een zelfde punt S, of liggen zij in een zelfde vlak σ, dan treedt er onbepaaldheid in bij de in het net begrepen congruenties, die alle uit de vereeniging eener congruentie (0,1) met een congruentie (1,0) bestaan; terwijl al de complexen van het net dan oneigenlijke complexen zijn.

20. Alle complexen, die twee gegeven lijnen s_1, s_2 tot stralen hebben, vormen een drievoudig oneindig samenstel, waaraan we den naam van *complexweefsel* geven; van dit weefsel vormen s_1 en s_2 de *basisstralen*.

Elke lijn a', die s_1 en s_2 ontmoet, is de as van een oneigenlijk complex van het weefsel; dus vormen de assen der oneigenlijke complexen van het weefsel de congruentie (1,1), die s_1 en s_2 tot richtlijnen heeft.

Gemakkelijk blijkt, dat een, twee en drie lijnen l met de beide basisstralen achtereenvolgens een complexnet, een congruentie en een lineair complex bepalen. En aanstonds zal blijken, welk een complex gevormd wordt door de assen der in het weefsel begrepen complexen.

Het complexweefsel is bepaald door vier onderling onafhankelijke complexen C_1, C_2, C_3, C_4, d. w. z. door vier complexen, die niet tot een zelfde complexnet behooren. Zijn nl. t_1 en t_2 de richtlijnen der congruentie gemeen aan C_1 en C_2, t_1' en t_2' de richtlijnen der congruentie gemeen aan C_3 en C_4, dan zullen de twee lijnen, die op deze vier lijnen rusten, de beide basisstralen van het weefsel doen kennen.

a). Het geval, dat s_1 en s_2 elkaar snijden, wordt in verband met art. 19 gemakkelijk in zijn bijzonderheden geschetst.

21. Alle complexen, die een gegeven lijn s tot straal hebben, vormen een viervoudig oneindig samenstel, dat we een *complexstelsel* noemen; van dit stelsel mag s de *basisstraal* heeten.

Elke lijn a', die s ontmoet, is de as van een oneigenlijk complex in het stelsel begrepen; dus vormen de assen der oneigenlijke complexen in het stelsel begrepen een oneigenlijk complex met den basisstraal van het stelsel tot as.

Het hier beschouwde complexstelsel is niet het meest algemeene. Want dit laatste wordt bepaald door vijf onderling onafhankelijke complexen C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, d. w. z. door vijf complexen, die niet tot een zelfde complexweefsel behooren, en deze hebben in het algemeen geen straal gemeen. Dit algemeene complexstelsel bepaald door C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 omvat al de complexen, die met een der vijf complexen en een der complexen uit het door de vier overige complexen bepaalde weefsel tot een zelfden bundel behooren. En nu blijkt gemakkelijk, dat deze verzameling van complexen met het eerst besproken stelsel daarin overeenkomt, dat alle er toe behoorende complexen, die een, twee of drie willekeurig gegeven lijnen tot stralen hebben achtereenvolgens een weefsel, een net of een bundel vormen en er slechts één complex toe behoort, dat vier willekeurig gegeven lijnen tot stralen heeft. Is nl. F^2 het regelvlak van het net (C_1, C_1, C_3), zijn daarop s_1, s_2 de basisstralen van het weefsel (C_1, C_2, C_3, C_4) en s_1', s_2' die van het weefsel (C_1, C_2, C_3, C_5), terwijl l een willekeurige lijn aanduidt, dan zullen de beide lijnen door de snijpunten van l met F^2, die niet met de

lijnen s tot hetzelfde stel behooren, aan de oppervlakken (s_1, s_2, l) en (s_1', s_2', l) van den tweeden graad gemeen zijn en deze elkaar dus verder nog volgens een lijn l' van het stel der lijnen s snijden. Deze lijn vormt met l de basisstralen van het door l in het complexstelsel bepaalde complexweefsel, enz.

Tevens blijkt hieruit, dat de assen der oneigenlijke complexen van dit meer algemeene stelsel nu niet een oneigenlijk, maar een eigenlijk complex vormen. Want alle assen die een lijn l snijden, snijden ook een tweede l', enz.

22. De assen der complexen begrepen in een complexstelsel vormen de viervoudige oneindigheid der lijnen in de ruimte. Dit is onmiddellijk duidelijk bij het stelsel met een basisstraal s. Want elke lijn a bepaalt een complex, waarvan s straal is. En bij een meer algemeen complex kan men als volgt redeneeren. Zijn op het basisregelvlak F^2 van het net (C_1, C_2, C_3) door s_1, s_2 en s_1', s_2' weer de basisstralen van de weefsels (C_1, C_2, C_3, C_4) en (C_1, C_2, C_3, C_5) voorgesteld, dan zullen de basisstralen van de weefsels $(C_1, C_2, C_3, C_\lambda)$, waarbij C_λ elk willekeurig complex uit den bundel (C_4, C_5) aangeeft, op F^2 de involutie $(s_1 s_2, s_1' s_1')$ vormen. Maar op dit zelfde oppervlak zullen de basisstralen van het weefsel (C_1, C_2, C_3, C_μ), waarvan C_μ het complex is met een willekeurig gegeven lijn a tot as en μ tot constante, bij verandering van μ een tweede involutie vormen. Het aan beide involuties gemeenschappelijke paar lijnen is een stralenpaar van het in het stelsel begrepen complex met a tot as.

23. We zoeken thans de meetkundige plaats van de assen der complexen begrepen in een weefsel. Zijn s_1 en s_2 de beide basisstralen en a de as van een in het door hen bepaalde weefsel begrepen complex dan hebben naar de uitdrukking van Zeuthen (art 11[c]) de lijnen s_1 en s_2 gelijke momenten μ met betrekking tot a. Maar dan heeft a ook gelijke momenten μ met betrekking tot s_1 en s_2. Dus is de meetkundige plaats der lijnen a de meetkundige plaats van de congruentie gemeen aan de beide complexen, die s_1 en s_2 tot assen en μ tot constante hebben, als men μ laat veranderen.

Deze meetkundige plaats van de doorsnee der overeenkomstige complexen van twee projectivische complexbundels is een *complex van den tweeden graad.* Immers de poolvlakken π_μ en π'_μ van een willekeurig gekozen punt P met betrekking tot de complexen C_μ en C'_μ, die s_1 en s_2 tot assen en μ tot constante hebben, brengen bij verandering van μ twee projectivische vlakkenbundels voort, die de loodlijnen uit P op s_1 en s_2 tot assen hebben, en de meetkundige plaats van de snijlijn dier vlakken π_μ en π'_μ is een kegel van den tweeden graad. En evenzoo doorloopen de polen P_μ en P'_μ van een willekeurig gekozen vlak π met betrekking tot de complexen C_μ en C'_μ bij verandering van μ twee projectivische puntreeksen, waarvan de in π gelegen loodlijnen op s_1 en s_2 de dragers zijn, en omhult de verbindingslijn dier punten een kromme van de tweede klasse. Dus is de verzameling van assen a een complex van den tweeden graad, wijl de complexkegel van elk punt P van den tweeden graad en de complexkromme van elk vlak π van de tweede klasse is.

Bij de beschouwing van het complex der assen a als de meetkundige plaats der congruenties gemeen aan de overeenkomstige complexen C_μ en C'_μ van twee projectivische complexbundels (C_μ) en (C'_μ) verdient het opmerking, dat de oneigenlijke complexen van den eenen bundel met die van den anderen overeenstemmen, wijl zij met dezelfde waarden van μ, nl. nul en oneindig, overeenkomen. En de assen der oneigenlijke complexen, die bij de oneindig groote waarde van μ behooren, snijden elkaar bovendien, wijl ze beide in het vlak in het oneindige liggen. Dus bevat de meetkundige plaats een congruentie (1,1), die zich splitst in de congruentie (0,1) der lijnen in dit vlak π_∞ en de congruentie (1,0) der lijnen, die s_1 en s_2 loodrecht snijden en dus door een in het oneindige gelegen punt P_∞ gaan; m. a. w. het vlak π_∞ is een enkelvoudig hoofdvlak en het punt P_∞ een enkelvoudig hoofdpunt van het complex van den tweeden graad.

Wanneer de twee basisstralen s_1 en s_2 elkaar snijden, is het vlak (s_1, s_2) een tweede hoofdvlak en het punt (s_1, s_2) een tweede hoofdpunt der meetkundige plaats.

a). In het voorbijgaan mag hier worden aangestipt, dat niet elk complex van den tweeden graad door middel van twee projectivische lineaire complexbundels kan worden voortgebracht. Men vergelijke de in art. 13[b] aangehaalde verhandeling van WEILER.

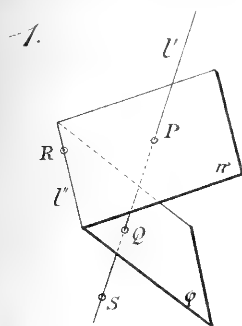
b). Indien er slechts één hoofdvlak en één hoofdpunt is, zal het oppervlak der bijzondere punten van het complex van den tweeden graad een oppervlak van den derden graad en de derde klasse wezen. Zijn er echter twee hoofdvlakken en twee hoofdpunten, dan gaat het bedoelde oppervlak in een oppervlak van den tweeden graad en de tweede klasse over.

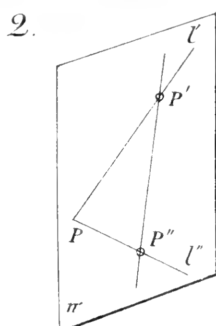
24. Eindelijk bepalen we de meetkundige plaats van de assen der complexen begrepen in een net, waarvan s_1, s_2, s_3 de gegeven basisstralen zijn. We slagen hierin onmiddellijk als we dit net als aan de weefsels (s_1, s_2) en (s_1, s_3) gemeen beschouwen. Dan blijkt namelijk, dat de bedoelde meetkundige plaats als de doorsnee van twee complexen van den tweeden graad met een gemeenschappelijk hoofdvlak π_∞ een *congruentie* (4,3) is.

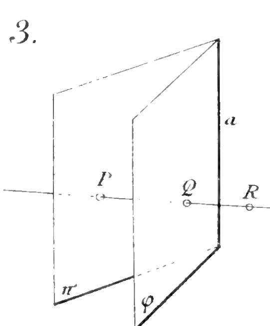
Zijn de basisstralen s_1, s_2, s_3 evenwijdig aan een zelfde vlak, dan zal het gemeenschappelijk punt der loodlijnen op dit vlak een gemeenschappelijk hoofdpunt van beide complexen van den tweeden graad zijn en dus de doorsnee een *congruentie* (3,3) wezen.

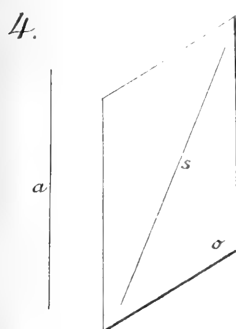
a). Omtrent de bundels, netten, weefsels en stelsels van lineaire complexen vergelijke men nog de verhandeling *Introduzione alla teoria dello spazio rigato* van E. CAPORALI en P. DEL PEZZO, opgenomen in het dit jaar uitgekomen werk *Memorie di geometria di Ettore Caporali*, en het eerste gedeelte der verhandeling *Fondamenti di una teoria dello spazio generato dai complessi lineari* van R. DE PAOLIS (Reale Accademia dei Lincei, 15 Februari, 1885).

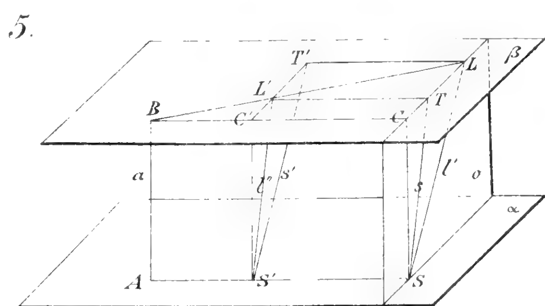
We besluiten met het volgende overzicht, dat uit zich zelf duidelijk is en waarin de overeenkomst tusschen de van boven naar beneden gelezen derde kolom en de van beneden naar boven gelegen vierde kolom in het oog springt.

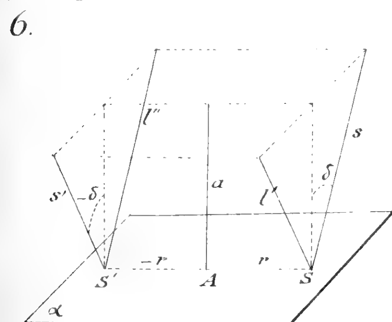


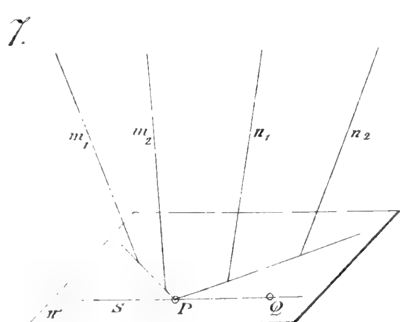


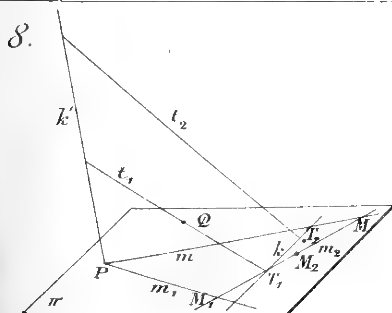


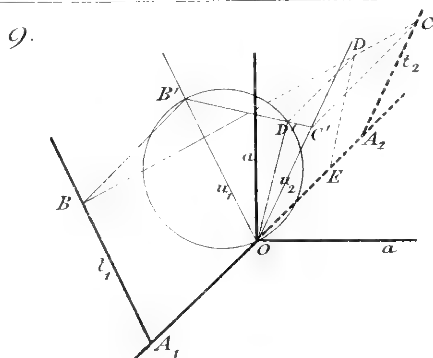












 Lith Gebr. Reimeringer, Amstd.

Beschouwde vormen.	Aantal bepalende stralen.	Gemeenschappelijke elementen.	Assen van oneigenlijke complexen.	Assen in het algemeen.
I^a. Complex. I^b. Oneigenlijk complex.	5	(Complex). (Oneigenlijk complex).	Een lijn.	Een lijn.
II. Complexbundel.	4	Congruentie (1,1) met richtlijnen t_1, t_2.	De twee lijnen t_1, t_2	Een regeloppervlak F^3.
III. Complexnet.	3	Regelvlak s_1, s_2, s_3	Regelvlak der lijnen, die s_1, s_2, s_3 snijden.	
		a) Hyperboloïde.		Congruentie(4,3)
		b) Paraboloïde.		Congruentie(3,3)
IV. Complexweefsel.	2	Twee basisstralen s_1, s_2.	Congruentie (1,1) met richtlijnen s_1, s_2.	Complex van den tweeden graad met hoofdvlak (π_∞) en hoofdpunt (P_∞).
V^a. Beperkt complexstelsel.	1	Een basisstraal s_1.	Oneigenlijk complex met as s_1.	Alle lijnen in de ruimte.
V^b. Algemeen complexstelsel.	0	Niets.	Complex.	(Alle lijnen in de ruimte.)

Groningen, 24 Februari 1888.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 31 Maart 1888.



Tegenwoordig de Heeren: VAN DER WAALS, Onder-Voorzitter, SCHOUTE, STOKVIS, FORSTER, MICHAËLIS, VAN DE SANDE BAKHUYZEN, SCHOLS, BAEHR, HUBRECHT, VAN BEMMELEN, PLACE, VAN RIEMSDIJK, KORTEWEG, A. C. OUDEMANS JR., GRINWIS, DIBBITS, VAN 'T HOFF, VAN DORP, HOEK, J. A. C. OUDEMANS, FRANCHIMONT, LORENTZ, MAC GILLAVRY, PEKELHARING, MARTIN, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, ZEEMAN, BIERENS DE HAAN, VAN DIESEN en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris; voorts het correspondeerend Lid de Heer: VAN DER BURG en van de letterkundige Afdeeling de Heer: CAMPBELL.

— Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

— De Heer BUYS BALLOT heeft zich schriftelijk over het niet bijwonen der vergadering verontschuldigd. De Heer VAN DER WAALS leidt, als Onder-Voorzitter, de vergadering.

— Worden gelezen Brieven van dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1°. den Secretaris van het historisch Genootschap te Utrecht, 1888; den Directeur van de Universiteits-boekerij te Upsala, 7 Maart 1887; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van boekgeschenken van de navolgenden:

1⁰. het Ministerie van binnenlandsche Zaken, 's Gravenhage, 29 Februari 1888; 2⁰. het Ministerie van Marine, 's Gravenhage, 29 Februari 1888; 3⁰. J. F. L. SCHNEIDER, Bibliothecaris der polytechnische School te Delft, 26 Maart 1888; 4⁰. L. JANMART DE BROUILLANT, Brussel, 1888; 5⁰. VON BEZOLD, Directeur van het kön. preuss. meteorologisches Institut te Berlijn, 1888; 6⁰. J. J. BRIDE, Bibliothecaris der public Library of Victoria te Melbourne, 18 October 1887; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de boekerij.

— De Heer BIERENS DE HAAN leest, ook uit naam van den Heer VAN DEN BERG, het rapport over de verhandeling des Heeren Dr. J. DE VRIES (Over vlakke configuraties).

De conclusie strekt om haar op te nemen in de werken der Akademie. Aldus wordt besloten.

— De Heer GRINWIS leest, ook uit naam van den Heer LORENTZ, het rapport over de verhandeling des Heeren Dr. V. A. JULIUS (Over de lineaire spectra der elementen). Het voorstel om haar in de werken der Akademie op te nemen, wordt aangenomen.

— De Heer VAN DE SANDE BAKHUYZEN deelt, ook uit naam van den Heer BOSSCHA, mede, dat zij met den Heer Dr. J. D. VAN DER PLAATS overeengekomen zijn, dat deze zijne verhandeling: »Over Standaardbarometers, in het bijzonder over die van het koninklijk Nederlandsch Meteorologisch Instituut" in twee deelen splitsen, en daarvan het eerste voor de werken der Akademie afstaan, het tweede echter voor de werken van een ander wetenschappelijk lichaam bestemmen zal. — Dit eerste gedeelte, in ietwat gewijzigden vorm, zou der Commissie van beoordeeling binnen kort opnieuw worden toegezonden.

— De Heer MARTIN deelt mede, dat hem door den Heer

van Lansberge, oud Gouverneur-Generaal van Nederlandsch-Indië, voor het Leidsch Museum ten geschenke werd aangeboden een stuk kaak van een reusachtigen Ichthyosaurus, afkomstig van de zuidkust van Ceram. Uit dit fossiel kan het bestaan van mesozoïsche lagen op genoemd eiland worden afgeleid, en, op grond van het feit, dat in Engelsch-Indië en Australië overblijfselen van hetzelfde dier in het krijt gevonden zijn, ook tot de aanwezigheid van eene krijtformatie op Ceram besloten worden. De opgave in Berghaus' »Physikalischer Atlas" dat er aan de zuidkust van Ceram eene palaeozoïsche formatie zoude voorkomen, is van grond ontbloot.

— De Heer J. A. C. Oudemans biedt voor de werken der Akademie aan eene verhandeling van den Heer Dr. J. D. van der Plaats, leeraar aan de Veeartsenijschool te Utrecht, getiteld: »Over den Secundeslinger", 1e gedeelte. Aan de Heeren Bosscha, van de Sande Bakhuyzen en Schols wordt opgedragen, daarover rapport uit te brengen.

— De Heer Lorentz biedt voor de werken der Akademie aan eene verhandeling van den Heer Dr. V. A. Julius, getiteld: »Over de trillende beweging van een vervormden vloeistofbol". Tot rapporteurs daarover worden aangewezen de Heeren Grinwis en Korteweg.

— Daar er verder niets te behandelen is, wordt de vergadering gesloten.

RAPPORT

OVER EENE

VERHANDELING VAN **Dr. J. DE VRIES,**

„OVER VLAKKE CONFIGURATIES".

(Uitgebracht in de Vergadering van 31 Maart 1888).

De Afdeeling heeft ons in hare zitting van 25 Februari ll. opgedragen, een advies uittebrengen over eene verhandeling van Dr. J. DE VRIES, met den titel: *Over vlakke configuraties*; zij bevatte 9 paragrafen. Spoedig daarop zond de schrijver ons paragraaf 10 tot 13, die wij gemeend hebben bij de beoordeeling in het stuk te mogen opnemen.

De configuraties zijn door den Straatsburger hoogleeraar TH. REYE het eerst genoemd in zijn bekend werk: *Geometrie der Lage*, en daarna door hem behandeld in CRELLE's *Journal*, Bd. 86, in zijn *Systematische Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsystemen*, en in de *Acta Mathematica*, T. 1.

Schr. begint met de bepaling van zulk eene vlakke configuratie, en de nomenclatuur, die door KANTOR, SCHOENFLIES, AMESEDER, allengs daarbij werd ingevoerd ter verduidelijking en vereenvoudiging; — en behandelt dan, als punt van uitgang de configuratie (12_4, 16_3), gevormd door de twaalf gelijkvormigheidspunten van vier cirkels.

Hij bewijst, dat die configuratie is samengesteld uit drie quadrupels, in iedere waarvan elk drietal punten de restfiguur van het vierde punt is, en daarop, dat omgekeerd elke configuratie (12_4, 16_3), welke uit drie zoodanige qua-

drupels samengesteld is, tot een in vorm bepaald stel van vier cirkels behoort. Van deze configuratie leert hij onderscheidene merkwaardige eigenschappen, in verband met de theorie der volkomen vierhoeken en vierzijden — en komt eerst tot de configuratië $(15_4, 20_3)$, die op bepaalde wijze met de eerste samenhangt, — en later tot de (geassocieerde) configuratie $(12_4, 16_3)$, die met de eerste de hoekpuntslijnen gemeen heeft, en weder tot de gelijksoortige configuratie $(15_4, 20_3)$ voert. De hoekpunten van twee zoodanige geassocieerde configuratiën vormen met de achttien hoekpuntslijnen eene nieuwe configuratie $(24_3, 18_4)$.

Door de punten van vier der quadrupels dezer configuratie en het gemeenschappelijk nevenhoekpunt der beide overige quadrupels wordt eene kromme der vierde orde K_4 bepaald.

Door de punten eener regelmatige configuratie $(12_4, 16_3)$ gaat steeds eene kromme der derde orde K_3. En van deze worden dan merkwaardige betrekkingen met de configuratie aangetoond.

In de laatste paragrafen wordt in hoofdzaak eene configuratie $(12_4, 16_3)$, van anderen aard dan de voorgaande, onderzocht, en worden hiervoor nieuwe eigenschappen afgeleid met betrekking tot eene eentakkige, en tot den oneven tak eener tweetakkige kromme der derde orde.

Met eene nadere opsomming der uitkomsten willen wij de Afdeeling niet lastig vallen, maar merken alleen op, dat zij merkwaardig zijn, en door eene eenvoudige, heldere methode worden gevonden. En daarom aarzelen wij ook geenzins de Afdeeling aanteraden, dit stuk in hare werken optenemen, waarin het de plaatsing volkomen verdient.

Leiden en Hilversum,
20 en 19 Maart 1888.

D. BIERENS DE HAAN,

F. J. VAN DEN BERG.

OVER VLAKKE CONFIGURATIES,

DOOR

J. DE VRIES.



1 Eene configuratie (p_m, l_n) is eene vlakke figuur, welke uit p punten en l rechte lijnen zoodanig is samengesteld, dat met elk punt m lijnen en met elke lijn n punten incident zijn *). Om de verschillende, collineair niet verwante, configuraties, welke bij vier bepaalde waarden van p, m, l, n behooren, van elkander te onderscheiden, kan men vaak met vrucht gebruik maken van de restfiguren †). De restfiguur van een punt der cf. ontstaat, wanneer men de in dat punt samenkomende lijnen met de op hen gelegen punten der cf. afzondert; zij wordt gevormd door de overgebleven punten en de lijnen der cf., welke minstens twee dezer punten bevatten. Eene cf. heet regelmatig §), wanneer zij ten opzichte van al haar punten en lijnen op gelijksoortige wijze is samengesteld. Eene lijn, welke twee punten der cf. verbindt zonder tot haar te behooren, heet diagonaal **): de door haar vereenigde punten worden gescheiden ††) punten genoemd. Het uitgangspunt der volgende beschouwingen is eene door de gelijkvormigheidspunten van vier cir-

---

*) Reye, das Problem der Configurationen, *Acta Math.*, I.

†) Kantor, die Conf. $(3, 3)_{10}$, *Wiener Sitzber.*, Bd. 84.

§) Schoenflies, Ueber einige ebene Conf., *Nachr. d. Kön. Ges. d. Wiss.* Göttingen, N°. 14, 1887.

**) Reye, Die Hexaeder und Oktaeder Cf., *Acta Math.*, I.

††) Schoenflies, l. c.

kels gevormde cf. $(12_4, 16_3)$, welke in de theorie der krommen van de derde orde en der krommen van de vierde orde met twee of drie dubbelpunten een groote rol speelt *).

2. De 12 gelijkvormigheidspunten, welke vier cirkels 2 aan 2 bepalen en de 16 gelijkvormigheidsassen, op welke zij in drietallen gelegen zijn, vormen eene $(12_4, 16_3)$. Stellen u_{12} en i_{12} het uitwendige en het inwendige gelijkvormigheidspunt der cirkels 1 en 2 voor, dan bevat de volgende tabel de verdeeling der 12 cf. punten over de 16 cf. lijnen.

u_{12}	u_{13}	u_{23}	u_{34}	u_{13}	u_{14}	i_{12}	i_{13}	u_{23}	i_{34}	i_{13}	u_{14}	
u_{12}	i_{13}	i_{23}	u_{34}	i_{13}	i_{14}	i_{12}	u_{13}	i_{23}	i_{34}	u_{13}	i_{14}	..(A).
u_{12}	u_{14}	u_{24}	u_{34}	u_{23}	u_{24}	i_{12}	i_{14}	u_{24}	i_{34}	i_{23}	u_{24}	
u_{12}	i_{14}	i_{24}	u_{34}	i_{23}	i_{24}	i_{12}	u_{14}	i_{24}	i_{34}	u_{23}	i_{24}	

De punten u_{34} i_{12} i_{34}, welke niet gelegen zijn op de in u_{12} samenkomende lijnen, zijn »gescheiden'' punten; zij vormen dus met u_{12} een gesloten groep, waarin elk drietal punten de rol van restfiguur van het vierde punt vervult. De cf. bestaat uit drie zulke kwadrupels, en behoort blijkbaar tot de regelmatige.

Elke $(12_4, 16_3)$ waarvoor de verdeeling der cf. punten over de cf. lijnen door tabel A kan voorgesteld worden, kan uit vier cirkels worden afgeleid, waarvan de middelpunten en de verhoudingen der stralen door de cf. gegeven zijn. Immers worden de drie paren overstaande hoekpunten van eene tot de cf. behoorende volledige vierzijde door u_{12} i_{12}, u_{13} i_{13}, u_{23} i_{23} aangewezen en de drie snijpunten der diagonalen m_1 m_2 m_3 genoemd, dan geeft de stelling van de Ceva

$$u_{12}\,m_1 \times u_{23}\,m_2 \times u_{13}\,m_3 = u_{12}\,m_2 \times u_{23}\,m_3 \times u_{13}\,m_1,$$

en deze vergelijking is niet in strijd met

*) Ameseder, Conf. u. Polygone auf biquadr. Curven., *Wiener Sitz. ber*, Bd. 93.

$$u_{12}\, m_1 : u_{12}\, m_2 = r_1 : r_2$$
$$u_{23}\, m_2 : u_{23}\, m_3 = r_2 : r_3$$
$$u_{13}\, m_3 : u_{13}\, m_1 = r_3 : r_1.$$

3. Worden de kwadrupels eener (12_4, 16_3) door de letters a_i b_i c_i ($i = 1, 2, 3, 4$) onderscheiden, dan kan tabel A door het volgende overzicht vervangen worden.

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} a_1 & b_1 & c_1 & a_2 & b_1 & c_2 & a_3 & b_1 & c_3 & a_4 & b_1 & c_4 \\ a_1 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 & c_1 & a_3 & b_2 & c_4 & a_4 & b_2 & c_3 \\ a_1 & b_3 & c_3 & a_2 & b_3 & c_4 & a_3 & b_3 & c_1 & a_4 & b_3 & c_2 \\ a_1 & b_4 & c_4 & a_2 & b_4 & c_3 & a_3 & b_4 & c_2 & a_4 & b_4 & c_1 \end{array}\right| \quad \ldots \quad (B).$$

Hieruit blijkt, dat a_1 het gemeenschappelijk hoekpunt is van 6 volledige vierzijden, in welke elk der punten a_2 a_3 a_4 tweemaal als overstaand hoekpunt van a_1 voorkomt. De cf. bestaat dus uit 12 volledige vierzijden en, in verband daarmede, uit 48 driezijden.

De lijn a_1 b_1 c_1 wordt in de punten a_1 b_1 c_1 door 9 andere cf lijnen gesneden; de overige 6 lijnen, namelijk

$$\left|\begin{array}{ccc} a_2 & b_3 & c_4 \\ a_3 & b_4 & c_2 \\ a_4 & b_2 & c_3 \end{array}\right| \quad \text{en} \quad \left|\begin{array}{ccc} a_2 & b_4 & c_3 \\ a_3 & b_2 & c_4 \\ a_4 & b_3 & c_2 \end{array}\right| \quad \ldots\ldots \quad (C)$$

vormen eene (9_2, 6_3).

Elk der beide afzonderlijk geschreven drietallen van lijnen bevat de 9 punten a b c; deze kunnen dus als de basis van een krommenbundel der derde orde beschouwd worden.

4. Daar b_2 c_2 en b_3 c_3 in a_1, a_2 c_2 en a_3 c_3 in b_1, a_2 b_2 en a_3 b_3 in c_1 samenkomen, liggen de cf. driehoeken a_2 b_2 c_2, a_3 b_3 c_3 collineair ten opzichte van a_1 b_1 c_1 als as en het punt $\delta_4 \equiv (a_2\, a_3,\, b_2\, b_3,\, c_2\, c_3)$ als centrum. Op dezelfde wijze blijkt, dat de „diagonalen" a_2 a_4, b_2 b_4, c_2 c_4 naar een punt δ_3, a_3 a_4, b_3 b_4, c_3 c_4 naar δ_2 convergeren. Nu is c_1 als snijpunt van a_2 b_2, a_3 b_3, a_4 b_4 het collineatiecentrum der diagonaaldriehoeken a_2 a_3 a_4, b_2 b_3 b_4; dus

zijn δ_2 δ_3 δ_4 als snijpunten van overeenkomstige zijden incident met de collineatieas dier driehoeken, die tevens de collineatieas is voor de driehoeken a_2 a_3 a_4, c_2 c_3 c_4 met centrum b_1 en b_2 b_3 b_4, c_2 c_3 c_4 met centrum a_1.

„Elke lijn is de gemeenschappelijke collineatieas van drie „cf. driehoeken, waarvan de drie collineatiecentra gelegen „zijn in eene rechte, die tevens de gemeenschappelijke colli- „neatieas van drie uit dezelfde negen hoekpunten gevormde „diagonaaldriehoeken is, wier collineatiecentra met de ge- „noemde cf. lijn incident zijn.”

Anders uitgedrukt:

„Elke cf. lijn behoort met de 9 op haar samenkomen- „de cf. lijnen, de 9 diagonalen, die haar niet in cf. pun- „ten snijden, en de verbindingslijn der drie punten, in „welke deze diagonalen in drietallen samenkomen, tot eene „$(15_4, 20_3)$, waarin elk punt eene volledige vierzijde tot „restfiguur heeft.”

De $(15_4, 20_3)$, waartoe a_1 b_1 c_1 aanleiding geeft, bestaat uit de lijnen:

	$a_1\ b_2\ c_2$	$a_1\ b_3\ c_3$	$a_1\ b_4\ c_4$	
$a_1\ b_1\ c_1$	$a_2\ b_2\ c_1$	$a_3\ b_3\ c_1$	$a_4\ b_4\ c_1$	
	$a_2\ b_1\ c_2$	$a_3\ b_1\ c_3$	$a_4\ b_1\ c_4$	
				. . . (D.).
	$\delta_2\ a_3\ a_4$	$\delta_2\ b_3\ b_4$	$\delta_2\ c_3\ c_4$	
$\delta_2\ \delta_3\ \delta_4$	$\delta_3\ a_2\ a_4$	$\delta_3\ b_2\ b_4$	$\delta_3\ c_2\ c_4$	
	$\delta_4\ a_2\ a_3$	$\delta_4\ b_2\ b_3$	$\delta_4\ c_2\ c_3$	

Uit deze rangschikking blijkt, dat de lijnen a_1 b_1 c_1 en δ_2 δ_3 δ_4 met elk der nevens hen geschreven drietallen eene volledige vierzijde vormen. Met het oog hierop kunnen de 20 cf. lijnen tot 10 paren gebracht worden. Elke der 15 volledige vierzijden, welke in de cf. voorkomen, is de restfiguur van het snijpunt der 4 lijnen, welke de zijden der volledige vierzijde tot paren aanvullen.

5. Met behulp van de notatie $(a_k\ a_l,\ b_1\ b_i,\ c_1\ c_i) = \alpha_i$, $(a_1\ a_i,\ b_k\ b_l,\ c_1\ c_i) = \beta_i$, $(a_1\ a_i,\ b_1\ b_i,\ c_k\ c_l) = \gamma_i$, (waar

$i = 2, 3, 4$), geeft de volgende tabel eene samenstelling van de 16 cf. lijnen der $(12_4, 16_3)$ met de cf. driehoeken, waarvan zij de collineatieassen zijn en de overeenkomstige collineatiecentra; elke regel bevat de 15 punten eener cf. $(15_4, 20_3)$.

Cf. lijnen.	Cf. driehoeken.			Coll. centra.
$a_1\, b_1\, c_1$	$a_2\, b_2\, c_2$	$a_3\, b_3\, c_3$	$a_4\, b_4\, c_4$	$\delta_4\, \delta_2\, \delta_3$
$a_1\, b_2\, c_2$	$a_2\, b_1\, c_1$	$a_3\, b_4\, c_4$	$a_4\, b_3\, c_3$	$\alpha_4\, \alpha_3\, \delta_2$
$a_1\, b_3\, c_3$	$a_2\, b_4\, c_4$	$a_3\, b_1\, c_1$	$a_4\, b_2\, c_2$	$\alpha_4\, \alpha_2\, \delta_3$
$a_1\, b_4\, c_4$	$a_2\, b_3\, c_3$	$a_3\, b_2\, c_2$	$a_4\, b_1\, c_1$	$\delta_4\, \alpha_2\, \alpha_3$
$a_2\, b_1\, c_2$	$a_1\, b_2\, c_1$	$a_3\, b_4\, c_3$	$a_4\, b_3\, c_4$	$\beta_3\, \delta_2\, \beta_4$
$a_2\, b_2\, c_1$	$a_1\, b_1\, c_2$	$a_3\, b_3\, c_4$	$a_4\, b_4\, c_3$	$\gamma_3\, \delta_2\, \gamma_4$
$a_2\, b_3\, c_4$	$a_1\, b_4\, c_3$	$a_3\, b_2\, c_1$	$a_4\, b_1\, c_2$	$\beta_3\, \alpha_2\, \gamma_4$
$a_2\, b_4\, c_3$	$a_1\, b_3\, c_4$	$a_3\, b_1\, c_2$	$a_4\, b_2\, c_1$	$\gamma_3\, \alpha_2\, \beta_4$
$a_3\, b_1\, c_3$	$a_1\, b_3\, c_1$	$a_2\, b_4\, c_2$	$a_4\, b_2\, c_4$	$\beta_2\, \delta_3\, \beta_4$
$a_3\, b_2\, c_4$	$a_1\, b_4\, c_2$	$a_2\, b_3\, c_1$	$a_4\, b_1\, c_3$	$\beta_2\, \alpha_3\, \gamma_4$
$a_3\, b_3\, c_1$	$a_1\, b_1\, c_3$	$a_2\, b_2\, c_4$	$a_4\, b_4\, c_2$	$\gamma_2\, \delta_3\, \gamma_4$
$a_3\, b_4\, c_2$	$a_1\, b_2\, c_4$	$a_2\, b_1\, c_3$	$a_4\, b_3\, c_1$	$\gamma_2\, \alpha_3\, \beta_4$
$a_4\, b_1\, c_4$	$a_1\, b_4\, c_1$	$a_2\, b_3\, c_2$	$a_3\, b_2\, c_3$	$\beta_2\, \delta_4\, \beta_3$
$a_4\, b_2\, c_3$	$a_1\, b_3\, c_2$	$a_2\, b_4\, c_1$	$a_3\, b_1\, c_4$	$\beta_2\, \alpha_4\, \gamma_3$
$a_4\, b_3\, c_2$	$a_1\, b_2\, c_3$	$a_2\, b_1\, c_4$	$a_3\, b_4\, c_1$	$\gamma_2\, \alpha_4\, \beta_3$
$a_4\, b_4\, c_1$	$a_1\, b_1\, c_4$	$a_2\, b_2\, c_3$	$a_3\, b_3\, c_2$	$\gamma_2\, \delta_4\, \gamma_3$

. . (E)

De 12 collineatiecentra α_i β_i γ_i δ_i vormen met de 16 lijnen, op welke zij in drietallen gelegen zijn, eene cf. $(12_4, 16_3)$, die met de cf. $a_i\, b_i\, c_i$ gelijksoortig is. Immers, door α_4 gaan 4 lijnen, die achtereenvolgens de punten $\beta_3\, \gamma_2$, $\beta_2\, \gamma_3$, $\alpha_3\, \delta_2$, $\alpha_2\, \delta_3$ bevatten, terwijl de drie overige punten

$\beta_4\ \gamma_4\ \delta_4$ gescheiden zijn; elk viertal punten $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ met gelijke indices vormt een kwadrupel der nieuwe $(12_4\ ,\ 16_3)$, die de geassociëerde cf. zal genoemd worden.

In de volledige vierzijde $a_1\,a_2$, $b_1\,b_2$, $c_1\,c_2$ worden de hoekpunten $a_1\,a_2$ door $\gamma_2 \equiv (a_1\,a_2\ ,\ b_1\,b_2)$ en $\beta_2 \equiv (a_1\,a_2\ ,\ c_1\,c_2)$ harmonisch gescheiden. De 18 diagonalen der oorspronkelijke cf. geven dienovereenkomstig de in tabel (F) vereenigde harmonische groepen.

$a_1\ a_2\ \beta_2\ \gamma_2$	$b_1\ b_2\ \alpha_2\ \gamma_2$	$c_1\ c_2\ \alpha_2\ \beta_2$
$a_1\ a_3\ \beta_3\ \gamma_3$	$b_1\ b_3\ \alpha_3\ \gamma_3$	$c_1\ c_3\ \alpha_3\ \beta_3$
$a_1\ a_4\ \beta_4\ \gamma_4$	$b_1\ b_4\ \alpha_4\ \gamma_4$	$c_1\ c_4\ \alpha_4\ \beta_4$
$a_2\ a_3\ \alpha_4\ \delta_4$	$b_2\ b_3\ \beta_4\ \delta_4$	$c_2\ c_3\ \gamma_4\ \delta_4$
$a_2\ a_4\ \alpha_3\ \delta_3$	$b_2\ b_4\ \beta_3\ \delta_3$	$c_2\ c_4\ \gamma_3\ \delta_3$
$a_3\ a_4\ \alpha_2\ \delta_2$	$b_3\ b_4\ \beta_2\ \delta_2$	$c_3\ c_4\ \gamma_2\ \delta_2$

. . (F.)

Evenals bij de cf. $a_i\ b_i\ c_i$ onder 4 is geschied, kan gemakkelijk aangetoond worden, dat $\delta_2\ \delta_3\ \delta_4$ de gem: collineatieas der driehoeken $\alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4$, $\beta_2\ \beta_3\ \beta_4$, $\gamma_2\ \gamma_3\ \gamma_4$ is, terwijl de diagonaaldriehoeken $\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2$, $\alpha_3\ \beta_3\ \gamma_3$, $\alpha_4\ \beta_4\ \gamma_4$ de lijn $a_1\ b_1\ c_1$ tot gem: collineatieas hebben, zoodat de punten $\alpha_i\ \beta_i\ \gamma_i\ \delta_i\ a_1\ b_1\ c_1$ eene met de boven gevondene gelijksoortige cf. $(15_4,\ 20_3)$ vormen. De lijnen $a_1\ b_1\ c_1$ en $\delta_2\ \delta_3\ \delta_4$ zijn dus door eene wederkeerige betrekking verbonden.

„Twee geassociëerde cf. $(12_4,\ 16_3)$ hebben de diagonalen „gemeen, en vormen op deze harmonische groepen. In elk „der 24 punten komen drie diagonalen samen; elke der „32 lijnen behoort met de punten der andere cf. tot eene „$(15_4\ ,\ 20_3)$, waarin zij met eene bepaalde lijn der tweede cf. „nauwer verbonden is."

6. De lijnen der tweede cf. $(12_4,\ 16_3)$, welke in tabel (E) overeenkomen met vier door een punt der eerste cf. gaande cf. lijnen, vormen eene volledige vierzijde. De beide cf. $(9_2,\ 6_3)$, welkə de restfiguren van twee overeenkomstige lijnen der beide cf. vormen, bestaan, zooals uit (E) volgt, uit overeenkomstige lijnen.

„De hoekpunten van twee geassocieërde (12_4, 16_3) vormen „met de 18 gemeenschappelijke diagonalen eene cf. (24_3, 18_4) „die uit twee groepen van drie volledige vierhoeken zoodanig „is samengesteld, dat elke vierhoek der eene groep met elken „vierhoek der andere een nevenhoekpunt *) gemeen heeft."

Elk der 6 kwadrupels, uit welke de cf. (24_3, 18_4) bestaat, bepaalt een volledigen vierhoek; het snijpunt der lijnen $a_1\ a_2\ \beta_2\ \gamma_2$ en $a_3\ a_4\ \alpha_2\ \delta_2$ is b. v. het gemeenschappelijke nevenhoekpunt der vierhoeken $a_1\ a_2\ a_3\ a_4$ en $\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2\ \delta_2$. Uit tabel (F) kan verder afgeleid worden, dat de 8 cf. lijnen der (24_3, 18_4), welke $a_1\ a_2\ \beta_2\ \gamma_2$ in cf. punten snijden, ook op $a_3\ a_4\ \alpha_2\ \delta_2$ samenkomen; de overige 8 vormen eene (16_2, 8_4), waarvan de punten als de basis van een krommenbundel der vierde orde kunnen beschouwd worden, daar zij de snijpunten zijn van twee uit rechten samengestelde K_4, n.l.

$b_1\ b_3\ \alpha_3\ \gamma_3$	$b_1\ b_4\ \alpha_4\ \gamma_4$	
$b_2\ b_4\ \beta_3\ \delta_3$	$b_2\ b_3\ \beta_4\ \delta_4$	
$c_1\ c_4\ \alpha_4\ \beta_4$	$c_1\ c_3\ \alpha_3\ \beta_3$	. . . . . (G.)
$c_2\ c_3\ \gamma_4\ \delta_4$	$c_2\ c_4\ \gamma_3\ \delta_3$	

„Door het gemeenschappelijke nevenhoekpunt van twee „kwadrupels der (24_3, 18_4) en de punten der overige vier „kwadrupels gaat eene kromme K_4".

7. De hoekpunten der volledige vierzijden $a_1\ a_2\ b_1\ b_2\ c_1\ c_2$, $a_1\ a_4\ b_2\ b_3\ c_2\ c_3$ bepalen eene kromme K_3; op haar behooren $a_1\ a_2\ a_4$, $b_1\ b_2\ b_3$, $c_1\ c_2\ c_3$ tot drie puntkwadrupels. †) Daar de corresponderende punten $b_1\ b_3$ uit a_1 in de corresponderende punten $c_1\ c_3$ geprojecteerd worden, zijn ook $a_3 \equiv (b_1\ c_3,\ b_3\ c_1)$ en a_1 correspondeerende punten. §) Om

*) Het snijpunt van twee overstaande zijden van een volledigen vierhoek wordt nevenhoekpunt genoemd.

†) Een puntkwadrupel op K_3 bestaat uit 4 punten met gemeenschappelijk tangentiaalpunt. Zie Durège, die ebenen Curven 3ter Ordnung, blz. 207.

§) l. c. blz. 209.

dezelfde reden vormen $b_4 \equiv (a_4\, c_1,\ a_2\, c_3)$ en $c_4 \equiv (a_2\, b_3,\ a_4\, b_1)$ met b_2 resp. c_2 twee paren corresponderende punten.

»Door de punten eener $(12_4, 16_3)$ gaat steeds eene twee-»takkige kromme der derde orde; de cf. bestaat uit drie »puntkwadrupels met collineaire tangentiaalpunten."

»Eene cf. $(12_4, 16_3)$ is volkomen bepaald door twee vol-»ledige vierzijden, welke eene zijde en de daarop gelegen »hoekpunten gemeen hebben, mits de overstaande hoekpun-»ten tot hetzelfde kwadrupel worden gerekend."

Kent men bijv. $a_3\, b_1\, c_3$, $a_3\, b_3\, c_1$, $a_3\, b_2\, c_4$, dan bepalen $a_1 \equiv (b_1\, c_1,\ b_3\, c_3)$ en $a_2 \equiv (b_2\, c_1,\ b_3\, c_4)$ met de 7 gegeven punten de K_3, welke door de punten der cf. gaat; voor de ontbrekende punten heeft men

$$a_4 \equiv (b_2\, c_3,\ b_1\, c_4),\quad b_4 \equiv (a_2\, c_3,\ a_4\, c_1),\quad c_2 \equiv (a_1\, b_2,\ a_2\, b_1).$$

Daar

$$p_2 \equiv (a_1\, a_2,\ a_3\, a_4),\quad p_3 \equiv (a_1\, a_3,\ a_2\, a_4),\quad p_4 \equiv (a_1\, a_4,\ a_2\, a_3)$$

met het tangentiaalpunt p_1 van a_i een puntkwadrupel vormen *), gaat de door $(12_4\ ,\ 16_3)$ bepaalde K_3 ook door de 9 nevenhoekpunten der kwadrupels $a_i\, b_i\, c_i$. De cf. is dus, in het algemeen, ook bepaald door een kwadrupel en twee punten; de 6 punten en 3 nevenhoekpunten van het gegeven kwadrupel zijn alleen dan niet toereikende voor de constructie der cf., wanneer de kegelsneden, welke het kwadrupel met de beide andere punten verbinden, door de verbindingslijn dier punten, worden aangeraakt †).

8. Daar de nevenhoekpunten der kwadrupels eener $(12_4, 16_3)$, in andere volgorde genomen, de nevenhoekpunten der geassociëerde cf. zijn, behooren zij tot de beide krommen K_3, welke door de twee cf. bepaald worden. Stelt men

$$(a_1\, a_i, a_k\, a_l) \equiv p_i,\quad (b_1\, b_i, b_k\, b_l) \equiv q_i,\quad (c_1\, c_i, c_k\, c_l) \equiv r_i\ (i = 2, 3, 4)$$

---

*) Durège, l. c. blz. 214 of 227.

†) Durège, l. c. blz. 230. Ook kan men raadplegen Weyr, Zur Erzeugung der Curven 3. O. *Wiener Sitz. ber.* Bd. 58.

dan zijn, blijkens tabel (F) r_2, q_2, p_2 de nevenhoekpunten van $\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \delta_2$, $r_3 q_3 p_3$ en $r_4 q_4 p_4$ resp. de nevenhoekpunten van $\alpha_3 \beta_3 \gamma_3 \delta_3$ en $\alpha_4 \beta_4 \gamma_4 \delta_4$. De punten $p_i q_i r_i$ vormen met de tangentiaalpunten $p_1 q_1 r_1$ der kwadrupels a_i, b_i, c_i eene $(12_4, 16_3)$, met de tangentiaalpunten t_i der kwadrupels $(\alpha_i \beta_i \gamma_i \delta_i)$ eene tweede $(12_4, 16_3)$. De restfiguren $(9_2, 6_3)$ der cf. lijnen $p_1 q_1 r_1$ en $t_2 t_3 t_4$ kunnen niet verschillen, daar de 9 nevenhoekpunten geen bestaanbare $(9_4, 12_3)$ kunnen vormen *); inderdaad bestaat de restfiguur voor beide lijnen uit:

$$\begin{matrix} p_2 q_3 r_4, & p_3 q_4 r_2, & p_4 q_2 r_3 \\ p_2 q_4 r_3, & p_3 q_2 r_4, & p_4 q_3 r_2 \end{matrix} \qquad \text{(H)}$$

De overige 20 lijnen der beide $(12_4, 16_3)$ zijn, met het oog op tabel (B),

$p_1 q_1 r_1$	$t_2 p_3 p_4$	
$p_1 q_2 r_2$	$t_2 q_3 q_4$	
$p_1 q_3 r_3$	$t_2 r_3 r_4$	
$p_1 q_4 r_4$	$t_3 p_2 p_4$	
$p_2 q_1 r_2$	$t_3 q_2 q_4$	. . . . (I)
$p_2 q_2 r_1$	$t_3 r_2 r_4$	
$p_3 q_1 r_3$	$t_4 p_2 p_3$	
$p_3 q_3 r_1$	$t_4 q_2 q_3$	
$p_4 q_1 r_4$	$t_4 r_2 r_3$	
$p_4 q_4 r_1$	$t_2 t_3 t_4$	

Zij vormen, met de 15 op hen gelegen punten, eene cf.

*) Worden van eene $(9_4, 12_3)$ een punt en de 4 in dat punt samenkomende lijnen weggelaten, dan ontstaat eene cf. 8_3, welke niet bestaanbaar is (KANTOR, Ueber die Conf. (3,3) mit den Indices 8,9. *Wiener Sitzber.* Bd. 84).

$(15_4, 20_3)$, die collineair verwant is met de onder 4 gevonden cf., omdat, zooals gemakkelijk uit tabel (I) wordt afgeleid, elk cf. punt eene volledige vierzijde tot restfiguur heeft.

»Door de 9 nevenhoekpunten der puntkwadrupels, welke »bij 3 collineaire tangentiaalpunten eener K_3 behooren, wor- »den twee cf. $(12_4, 16_3)$ bepaald, welke eene cf. $(9_2, 6_3)$ »gemeen hebben; de niet gemeenschappelijke lijnen behooren »tot eene cf. $(15_4, 20_3)$."

9. De bovengenoemde $(15_4, 20_3)$ komt dualistisch overeen met de cf. $(20_3, 15_4)$, welke door de 15 machtlijnen en 20 machtpunten van 6 cirkels gevormd wordt. Immers, worden de machtlijnen der cirkels 1 2 3 4 5 6 aangeduid door

12	23	34	45	56	
13	24	35	46		
14	25	36			. . . . . . (K)
15	26				
16					

dan wordt 12 door de lijnen 13, 23; 14, 24; 15, 25; 16, 26 in de machtpunten 123, 124, 125, 126 gesneden, terwijl de paren 35, 45 en 36, 46 in de op 34 gelegen punten 345, 346, en in de tot 56 behoorende punten 356, 456 samenkomen; de restfiguur van 12 is dus een volledige vierhoek, welke reciprook overeenkomt met de volledige vierzijde, die als restfiguur van elk punt der $(15_4, 20_3)$ werd opgemerkt.

Tabel (K) levert nu tevens eene geschikte notatie voor de 15 punten eener $(15_4, 20_3)$ waarvan alle punten volledige vierzijden tot restfiguren hebben; de 20 lijnen der cf. kunnen dan door de teekens 123, 124, ... 456 worden voorgesteld. Met behulp van deze schrijfwijze vindt men:

»Elke lijn der beschouwde regelmatige $(15_4, 20_3)$ vormt »met de 9 lijnen, welke haar in cf. punten ontmoeten, drie »volledige vierzijden, terwijl de overige 10 cf. lijnen even- »eens drie volledige vierzijden met eene gemeenschappelijke »zijde opleveren."

Voorbeeld.

123	123	123	456	456	456
124	125	126	356	256	156
134	135	136	345	245	145
234	235	236	346	246	146

De lijnen der cf. kunnen dus tot 10 paren van „geassociëerde" lijnen gebracht worden. Daar de in 12 samenkomende lijnen 123, 124, 125, 126 door 456, 356, 346, 345 tot paren worden aangevuld, bestaat de restfiguur van elk cf. punt uit de geassociëerden der met dat punt incidente cf. lijnen.

Op dezelfde wijze als in 4 kan nu aangetoond worden, dat elke cf. lijn de gemeenschappelijke collineatieas van 3 cf. driehoeken is, waarvan de collineatiecentra met de geassociëerde lijn incident zijn. Zoo is 123 de collineatieas der driehoeken (14, 24, 34), (15, 25, 35), (16, 26, 36), met de collineatiecentra 45, 56, 46, terwijl omgekeerd 456 de collineatieas van (14, 15, 16), (24, 25, 26), (34, 35, 36) met de centra 12, 23, 13 is. In verband hiermede blijkt nu, dat de in 4 afgeleide $(15_4, 20_3)$ eene bizondere cf. is; immers, wanneer de 12 punten 12, 23, 13; 14, 24, 34; 15, 25, 35; 16, 26, 36 tot eene $(12_4, 16_3)$ behoorden, zouden o. a. de punten 35, 24, 16 collineair moeten zijn, hetgeen, met het oog op de reciproke cf. der machtpunten en machtlijnen van 6 cirkels, in het algemeen niet waar is.

„De bovenbesproken regelmatige $(15_4, 20_3)$ is volkomen bepaald door drie volledige vierzijden, welke drie collineaire hoekpunten gemeen hebben."

De cf. $(15_4, 20_3)$ kan nog uit een ander oogpunt beschouwd worden. Elk van haar punten, b. v. 12, is het gemeenschappelijk collineatiecentrum van 4 paar driehoeken

23, 24, 25 en 13, 14, 15 met collineatieas 345
23, 24, 26 en 13, 14, 16 met collineatieas 346
23, 25, 26 en 13, 15, 16 met collineatieas 356
24, 25, 26 en 14, 15, 16 met collineatieas 456.

De cf. is dus ook bepaald door twee volledige vierhoeken, waarvan de hoekpunten op vier in een punt samenkomende lijnen liggen. De 12 punten en 16 lijnen der $(12_4, 16_3)$ geven dus aanleiding tot 28 cf. $(15_4, 20_3)$.

10. Liggen de hoekpunten $a_{12}\ a_{34}$, $b_{12}\ b_{34}$, $c_{12}\ c_{34}$ eener volledige vierzijde op een eentakkige kromme der derde orde of op den oneven tak eener tweetakkige K_3, dan behooren de 6 paren $a_1\ a_2$, $a_3\ a_4$, $b_1\ b_2$, $b_3\ b_4$, $c_1\ c_2$, $c_3\ c_4$, welke de genoemde hoekpunten tot tangentiaalpunten hebben (en voor het geval der tweetakkige K_3 op den oneven tak liggen) tot eene cf. $(12_4, 16_3)$, welke slechts 4 volledige vierzijden bevat, n.l.

$a_1\ a_2$, $b_1\ b_2$, $c_1\ c_2$ met satelliet $a_{12}\ b_{12}\ c_{12}$
$a_1\ a_2$, $b_3\ b_4$, $c_3\ c_4$ met satelliet $a_{12}\ b_{34}\ c_{34}$
$a_3\ a_4$, $b_1\ b_2$, $c_3\ c_4$ met satelliet $a_{34}\ b_{12}\ c_{34}$
$a_3\ a_4$, $b_3\ b_4$, $c_1\ c_2$ met satelliet $a_{34}\ b_{34}\ c_{12}$.

Deze cf. is dus niet gelijksoortig met de boven beschouwde $(12_4, 16_3)$ waarvan de lijnen 12 volledige vierzijden vormen; zij worde van de eerste, die A genoemd zal worden, onderscheiden door bijvoeging van de letter B.

Komen $b_1\ c_1$, $b_2\ c_2$, $b_3\ c_3$, $b_4\ c_4$ in a_1 samen, dan is a_2 het snijpunt van $b_1\ c_2$ met $b_2\ c_1$ en van $b_3\ c_4$ met $b_4\ c_3$; gaan verder $b_1\ c_3$ en $b_2\ c_4$ door a_3, dan moet $a_3\ b_3$ het punt c_2 en $a_3\ b_4$ het punt c_1 bevatten, daar a_3 en a_1, omdat zij niet hetzelfde tangentiaalpunt bezitten, niet de overstaande hoekpunten van eene volledige vierzijde kunnen zijn.

De volgende tabel geeft dus de verdeeling der 12 punten over de 16 lijnen der cf. $(12_4, 16_3)$ B.

$a_1\ b_1\ c_1$	$a_2\ b_1\ c_2$	$a_3\ b_1\ c_3$	$a_4\ b_1\ c_4$	
$a_1\ b_2\ c_2$	$a_2\ b_2\ c_1$	$a_3\ b_2\ c_4$	$a_4\ b_2\ c_3$	. . . (L)
$a_1\ b_3\ c_3$	$a_2\ b_3\ c_4$	$a_3\ b_3\ c_2$	$a_4\ b_3\ c_1$	
$a_1\ b_4\ c_4$	$a_2\ b_4\ c_3$	$a_3\ b_4\ c_1$	$a_4\ b_4\ c_2$	

Door permutatie der letters kan uit tabel (L) afgeleid worden, dat de cf., welke door (B) en (L) worden aange-

wezen, de eenigste $(12_4, 16_3)$ zijn, welke drie kwadrupels van onderling gescheiden punten bezitten.

Daar de lijnen $b_1\ c_1$, $c_1\ b_4$, $b_4\ c_4$, $c_4\ b_2$, $b_2\ c_2$, $c_2\ b_3$, $b_3\ c_3$, $c_3\ b_1$ beurtelings door a_1 en a_3 gaan, zijn deze beide punten de hoofdpunten van eene STEINER'sche achtzijde *). Blijkbaar komen in de cf. nog 11 figuren van dien aard voor.

11. „Elke cf. $(12_4, 16_3)$ waarvoor de verdeeling der pun„ten over de cf. lijnen door tabel (L) kan worden voorge„steld, bestaat uit 6 paren correspondeerende punten eener „K_3, waarvan de 6 tangentiaalpunten eene volledige vierzijde „vormen."

Immers op de K_3, welke door $a_1\ a_2$, $b_1\ b_2$, $c_1\ c_2$, $a_3\ b_3\ c_3$ gaat, zijn de eerste 6 punten drie correspondeerende paren met collineaire tangentiaalpunten $a_{12}\ b_{12}\ c_{12}$. Daar een correspondeerend paar uit elk punt der K_3 in een ander correspondeerend paar geprojecteerd wordt, en a_3 de projectie van b_1 uit c_3 en van c_2 uit b_3 is, zal het met a_3 correspondeerende punt uit c_3 in b_2 en uit b_3 in c_1 geprojecteerd worden, dus met a_4 samenvallen. Op dezelfde wijze blijkt, dat $b_4 \equiv (a_4\ c_2,\ a_3\ c_1)$ met $b_3 \equiv (a_4\ c_1,\ a_3\ c_2)$ en $c_4 \equiv (a_4\ b_1,\ a_3\ b_2)$ met $c_3 \equiv (a_4\ b_2,\ a_3\ b_1)$ een correspondeerend paar vormt. De tangentiaalpunten $a_{34}\ b_{34}\ c_{34}$ der laatste drie paren liggen twee aan twee resp. met $c_{12}\ a_{12}\ b_{12}$ collineair, zoodat de 16 lijnen der cf. $(12_4, 16_3)$ B eene gemeenschappelijke tweede satelliet bezitten, n.l. de satelliet der zijden van de door de 6 tangentiaalpunten bepaalde vierzijde.

Hieruit volgt, dat de cf. B bepaald is door eene volledige vierzijde $a_1\ a_2$, $b_1\ b_2$, $c_1\ c_2$ en een driehoek $a_3\ b_3\ c_3$, waarvan de zijden $a_3\ b_3$, $b_3\ c_3$, $c_3\ a_3$ met drie niet collineaire hoekpunten der vierzijde incident zijn. De overige drie punten worden dan gevonden uit $a_4 \equiv (b_3\ c_1,\ b_2\ c_3)$, $b_4 \equiv (a_3\ c_1,\ a_2\ c_3)$, $c_4 \equiv (a_2\ b_3,\ a_3\ b_2)$. (zie tabel L).

12. De restfiguur van $a_1\ b_1\ c_1$ bevat de lijnen

$$\left\{\begin{array}{lll} a_2\ b_3\ c_4, & a_3\ b_2\ c_1, & a_4\ b_2\ c_3 \\ a_2\ b_4\ c_3, & a_3\ b_3\ c_2, & a_4\ b_4\ c_2 \end{array}\right\}$$

*) De STEINER'sche veelzijden werden o. a. behandeld door Dr. P. H. SCHOUTE in „Die STEINER'schen Polygone." J. v. CRELLE 95.

Zij bestaat uit twee driehoeken $a_4\ b_4\ c_3$ en $a_3\ b_3\ c_4$, waarvan de zijden twee aan twee in de niet collineair gelegen punten $c_2\ a_2\ b_2$ samenkomen, zoodat zij niet gelijksoortig is met de cf. $(9_2,\ 6_3)$, welke als restfiguur van elke lijn der cf. $(12_4,\ 16_3)$ A werdt opgemerkt. De beide genoemde restfiguren zijn de eenigste cf. $(9_2,\ 6_3)$, hetgeen men gemakkelijk kan aantoonen door uit te gaan van twee gescheiden cf. lijnen en te onderzoeken op welke wijzen de overige 4 lijnen door de 6 aangenomen punten kunnen gaan.

De punten $a_2\ b_3\ c_4$ worden uit $c_1\ a_1\ b_1$ in de collineaire punten $b_2\ c_3\ a_4$ geprojecteerd; de overige drie punten vormen een cf. driehoek. Daar elke lijn der cf. $(12_4,\ 16_3)$ B op deze wijze met elke lijn van haar restfiguur $(9_2,\ 6_3)$ B in verband gebracht kan worden, bevat de cf. 16 cf $(9_2,\ 6_3)$ A.

De voornaamste punten van verschil tusschen de beide $(12_4,\ 16_3)$ zijn in het volgende overzicht samengesteld.

A.	B.
1. De 12 punten vormen 3 puntkwadrupels van eene tweetakkige K_3; de drie tangentiaalpunten zijn collineair.	1. De 12 punten vormen 6 correspondeerende paren eener K_3; de tangentiaalpunten vormen eene volledige vierzijde.
2. Elk punt is als hoekpunt aan 6 volledige vierzijden gemeen.	2. Elk punt behoort tot 2 volledige vierzijden en als hoofdpunt tot 2 STEINER'sche achtzijden.
3. Elke lijn behoort tot 3 volledige vierzijden.	3. Elke lijn behoort tot 1 volledige vierzijde en tot 6 STEINER'sche achtzijden.
4. De restfiguur van elke cf. lijn is eene $(9_2,\ 6_3)$ A.	4. De restfiguur van elke cf. lijn is eene $(9_2,\ 6_3)$ B.
5. De cf. is bepaald door een driehoek, waarvan de zijden door 3 collineaire hoekpunten eener volledige vierzijde gaan.	5. De cf. is bepaald door een driehoek, waarvan de zijden door 3 niet collineaire hoekpunten eener volledige vierzijde gaan.
6. De cf. bevat 8 kwadru-	6. De cf. bevat geen kwa-

A.	B.
pels van onderling gescheiden cf. lijnen. Door afzondering van zulk een kwadrupel ontstaat eene regelmatige cf. 12_3, welke als het samenstel van twee in elkander beschreven zeshoeken kan beschouwd worden.	drupels, maar 32 tripels van onderling gescheiden cf. lijnen.

13. Behooren de hoekpunten $a_{12}\, a_{34}$, $b_{12}\, b_{34}$, $c_{12}\, c_{34}$ eener volledige vierzijde tot den oneven tak eener uit twee deelen bestaande K_3, dan vormen de 6 puntkwadrupels $a_1\, a_2\, \alpha_1\, \alpha_2$, $a_3\, a_4\, \alpha_3\, \alpha_4$, $b_1\, b_2\, \beta_1\, \beta_2$, $b_3\, b_4\, \beta_3\, \beta_4$, $c_1\, c_2\, \gamma_1\, \gamma_2$, $c_3\, c_4\, \gamma_3\, \gamma_4$ eene cf. $(24_8, 64_3)$, welke samengesteld is uit de 4 cf. $(12_4, 16_3)$ A, waarvoor de zijden der volledige vierzijde de satellieten zijn. Liggen de door grieksche letters aangewezen punten op het ovaal der K_3, dan bevat de $(24_8, 64_3)$ de volgende cf. $(12_4, 16_3)$ B:

$$a_1\, a_2,\; a_3\, a_4,\; b_1\, b_2,\; b_3\, b_4,\; c_1\, c_2,\; c_3\, c_4;$$
$$a_1\, a_2,\; \alpha_3\, \alpha_4,\; b_1\, b_2,\; \beta_3\, \beta_4,\; c_1\, c_2,\; \gamma_3\, \gamma_4;$$
$$a_1\, a_2,\; a_3\, a_4,\; \beta_1\, \beta_2,\; \beta_3\, \beta_4,\; \gamma_1\, \gamma_2,\; \gamma_3\, \gamma_4;$$
$$a_1\, a_2,\; \alpha_3\, \alpha_4,\; b_3\, b_4,\; \beta_1\, \beta_2,\; c_3\, c_4,\; \gamma_1\, \gamma_2;$$
$$\alpha_1\, \alpha_2,\; \alpha_3\, \alpha_4,\; b_1\, b_2,\; b_3\, b_4,\; \gamma_1\, \gamma_2,\; \gamma_3\, \gamma_4;$$
$$\alpha_1\, \alpha_2,\; \alpha_3\, \alpha_4,\; \beta_1\, \beta_2,\; \beta_3\, \beta_4,\; c_1\, c_2,\; c_3\, c_4;$$
$$\alpha_1\, \alpha_2,\; a_3\, a_4,\; b_1\, b_2,\; \beta_3\, \beta_4,\; c_3\, c_4,\; \gamma_1\, \gamma_2;$$
$$\alpha_1\, \alpha_2,\; a_3\, a_4,\; \beta_1\, \beta_2,\; b_3\, b_4,\; c_1\, c_2,\; \gamma_3\, \gamma_4.$$

Elk punt der $(24_8, 64_3)$ is dus hoofdpunt van 8 STEINER'sche achtzijden, waarvan het andere hoofdpunt tweemaal samenvalt met elk der punten van het kwadrupel, waarvan het tangentiaalpunt met het tangentiaalpunt van het eerste hoofdpunt een corresponderend paar vormt. De cf. bevat dus 96 STEINER'sche achtzijden, en daar in elke $(12_4, 16_3)$ B 12 zulke achtzijden voorkomen, zijn de bovengenoemde 8 cf. B de eenigste, welke uit de 6 kwadrupels kunnen gevormd worden.

De restfiguur van elke lijn L der cf. is eene $(21_6, 42_3)$ bestaande uit eene $(9_2, 6_3)$ A als restfiguur van L in de

$(12_4, 16_3)$ A waartoe die lijn behoort, en uit de figuren, welke uit de overige 3 cf. A gevormd worden door een punt van L met de 4 daarmede incidente lijnen weg te laten.

Daar elke diagonaal der door de 6 kwadrupels dezer $(24_8, 64_3)$ bepaalde volledige vierhoeken tot twee cf. $(12_4, 16_3)$ A behoort, bevat zij twee paar punten van geassociëerde cf. A, die elk met twee andere diagonalen incident zijn; de punten der 4 cf. A vormen dus met de punten der 4 geassociëerde cf. en de 36 diagonalen eene cf. $(72_3, 36_6)$, waarin op elke lijn twee punten door twee paren van punten harmonisch gescheiden worden.

VERSLAG

OVER DE

VERHANDELING VAN DEN HEER DR. **V. A. JULIUS**

„DE LINEAIRE SPECTRA DER ELEMENTEN".

(Uitgebracht in de Vergadering van 31 Maart 1888).



De Commissie, door U benoemd om verslag uit te brengen over de verhandeling van den Heer V. A. JULIUS, getiteld: *De lineaire spectra der elementen*, heeft de eer het volgende mede te deelen:

Voortdurend blijven bezwaren bestaan tegen de kinetische gastheorie, voornamelijk gelegen in het theorema van BOLTZMANN omtrent het arbeidsvermogen van een atoom. De schrijver merkt op, dat men de aanvaarding van dit theorema ontgaan kon door rekening te houden met de uitwisseling van vibratorisch arbeidsvermogen tusschen de moleculen en den aether. Daarvoor moet echter onze kennis van de vibratorische beweging der moleculen aanmerkelijk worden uitgebreid.

De studie der spectraallijnen schijnt daartoe de aangewezen weg en hiervoor levert de ingezonden arbeid eene belangrijke bijdrage.

Schrijver, die zich tot de lineaire spectra der elementen als de minst zamengestelde bepaalt, geeft in de eerste plaats een uitvoerig overzicht van het belangrijkste, dat op dit gebied door anderen is gevonden en gedacht. Hij doet daarna in de bedoelde richting een oorspronkelijk onderzoek, dat niet zonder resultaten is en van veel beteekenis blijkt.

Wat vooreerst de homologie betreft tusschen de spectraallijnen van verschillende elementen, merkte MASCART op, dat de zes hoofdlijnen van natrium alle dubbel zijn, terwijl hij in het magnesium bij het groen en ultra-violet dergelijke groepen vond; hij meende hier geen toevalligheid te moeten zien en die groepen van overeenkomstige lijnen te moeten vergelijken met boventonen.

Het uitvoerigst hield omstreeks 1869 LECOQ DE BOISBAUDRAN zich met dit onderwerp bezig; in drie mededeelingen aan de Fransche Akademie ontwikkelt hij eene moleculaire theorie, die van de spectraallijnen rekenschap moet geven, doch van vrij willekeurige onderstellingen uitgaat. Van meer gewicht zijn zijne waarnemingen en opmerkingen omtrent de spectra van kalium- en rubidium-chloruur, tusschen wier spectraallijnen hij verband opmaakt.

Later hield CIAMICIAN zich met het zoeken naar homologieën bezig; hij is echter op het punt van de alkalische metalen het niet eens met zijn voorganger; de metalen der alkalische aarden brengen hem in strijd met zich zelven.

Van meer belang zijn de resultaten van CORNU, die, nadat hij in 1871 had opgemerkt, dat niet alle spectraallijnen, afkomstig van eene gloeiende dampmassa van een of ander metaal, gelijk omgekeerd worden, in 1885 op dit ontwerp terugkwam en opmerkte, dat de lijngroepen, welke zich regelmatig herhalen, juist tot de spontaan omkeerbare lijnen behooren. Zij worden aan de meest breekbare zijde het dichtst bij elkander gevonden en nemen in die richting aan intensiteit af.

CORNU toonde aan, dat de door HUGGINS in het spectrum der witte sterren gevonden lijnen tot waterstof behooren en komt tot het besluit, dat in de spectra der metalen zekere reeksen van spontaan omkeerbare lijnen vrij wel dezelfde wetten volgen als de waterstoflijnen, zoodat de wijze van verdeeling over het spectrum door eene zelfde functie, de »function hydrogénique" zou uitgedrukt kunnen worden.

Van veel belang is eindelijk eene verhandeling van GRÜNWALD die in 1887 in de *Astron. Nachrichten* verscheen. Hij hield zich met de spectra van waterstof en waterdamp bezig

en heeft op grond van voorloopige resultaten eene reeks van golflengten opgemaakt, die in het spectrum van waterdamp zouden moeten voorkomen, maar nog niet waargenomen waren, en die werkelijk later gevonden zijn. GRÜNWALD heeft aan zijne onderzoekingen eene theorie vastgeknoopt, omtrent de chemische structuur der elementen waterstof en zuurstof.

Andere natuurkundigen hebben getracht eene betrekking te vinden tusschen de spectraallijnen van een zelfde element. Men tracht aan te toonen, dat de verschillende lijnen harmonisch tot eene zekere grondlijn zijn, analoog met de harmonische tonen, door eene snaar of orgelpijp voortgebracht. In 1871 werd door STONEY zelfs betoogd, dat eene dergelijke harmonische betrekking moet bestaan: daar toch de ather-verstoringen (die gewoonlijk als de oorzaken der spectraallijnen beschouwd worden) periodisch zijn, mag de aether-beweging als de superpositie van enkelvoudige trillende bewegingen worden aangezien, wier perioden, ingevolge het theorema van FOURIER, aan de harmonische reeks voldoen. Intusschen geldt deze redeneering slechts als de enkelvoudige trillingstijden, waaruit de zamengestelde beweging bestaat, onderling meetbaar zijn, en dit schijnt niet noodwendig. Men kan echter van de meening uitgaan, dat tusschen de lijnen van elk spectrum eene harmonische betrekking bestaat. STONEY vindt, dat de drie bekende waterstoflijnen de 20ᵉ, 27ᵉ en 32ᵉ harmonische boventoon van eene zelfde grondlijn zijn.

De lijn H, door HUGGINS in het spectrum der witte sterren gevonden, verhoudt zich tot de bekende waterstoflijn nabij G, als de 35ᵉ tot de 32ᵉ harmonische bovenlijn.

Om zijne theorie verder te toetsen, heeft STONEY met REYNOLDS een onderzoek ingesteld omtrent het absorptiespectrum van damp van chromylchloruur; zij bepaalden de golflengten voor 32 spectraallijnen en vonden voor het verschil tusschen de trillingsgetallen van twee achtervolgende lijnen steeds een zelfde getal; een zeer opvallend resultaat.

SCHUSTER maakte in 1879 eene bijzondere studie van het ijzerspectrum; 7 lijnen kunnen beschouwd worden als bo-

venlijnen van dezelfde grondlijn; bovendien bestaan nog andere merkwaardige betrekkingen tusschen de lijnen van dit metaal. In 1881 hervatte hij dit onderwerp en vroeg naar de waarschijnlijkheid, dat de verhouding van twee grootheden, die willekeurig tusschen twee vaste grenzen verbreid zijn, zamenvalt met eene gegevene breuk. Aan het antwoord op die vraag toetste hij het ijzerspectrum en kwam tot een in hoofdzaak negatief resultaat; hij twijfelt er wel niet aan, dat er eene wet is, die de verdeeling der spectraallijnen beheerscht, doch meent, dat die wel slechts in bijzondere gevallen overgaat in de wet der harmonische verhoudingen.

Later, in 1885, heeft Balmer zonder theoretische beschouwing naar de empirische formule gezocht, die de waterstoflijnen zou omvatten en vond daarvoor eeue zeer eenvoudige betrekking, waaraan de waarnemingen van Huggins en Cornu vrij goed voldoen. De formule heeft echter geene theoretische beteekenis, verklaart dus het verschijnsel niet.

Niet tevreden met het zoeken naar homologieën in de verschillende spectra, heeft men ook getracht eene voldoende theorie van het verschijnsel der spectraallijnen te geven. Hiertoe dienden o. a. de theoriën van Stoney, E. Wiedemann en Schuster. Zij loopen tamelijk uiteen, zijn niet altijd voldoende duidelijk en leiden vooralsnog tot geen bevredigend resultaat.

Van meer belang zijn de bijzondere hypothesen, die tot de verklaring der spectraallijnen den weg banen.

Men kan bij de studie der lineaire spectra twee wegen inslaan: vooreerst kon men trachten empirische betrekkingen te vinden tusschen de golflengten der spectraallijnen van hetzelfde spectrum of tusschen die van verschillende spectra. Cornu meent, dat slechts op deze wijze resultaten te verkrijgen zijn. Doch de methode opent een onafzienbaar veld van getallen-combinatiën, waarin men zonder gids ronddoolt, en de kans, dat men de ware combinatie maakt, wordt uiterst gering. De straks genoemde physici Balmer en Grünwald zijn de eenige, die hierbij op succes kunnen wijzen, al hebben hunne eenvoudige formules geen theoretische waarde.

Daarom schijnt den schrijver de tweede weg beter; dat men uitgaat van eene of andere hypothese en nagaat of zij in overeenstemming is met hetgeen de waarneming omtrent de spectraallijnen leert. Deze weg vordert echter zeer veel arbeid.

De eenvoudigste hypothese is, dat er tusschen de lijnen van hetzelfde spectrum harmonische verhoudingen bestaan. Alleen vaor het ijzerspectrum moest Schuster, die haar toepaste, 20000 quotiënten berekenen.

Het vormen eener voldoende hypothese is verder moeilijk genoeg; die omtrent de harmonische verhoudingen der spectraallijnen schijnt niet rationeel; omtrent de zamenstelling der atomen laat zich evenmin a priori iets vaststellen. Van belang is misschien, in verband met eene door Zöllner gemaakte opmerking, de formule van Wilhelm Weber voor de potentiaal van twee electrische deeltjes; zij kan als uitgangspunt dienen en zou wel resultaten beloven, zoo niet het onderzoek van Schuster bewezen had, dat de analogie der vibratorische beweging der atomen met de trillende beweging van een electrisch atomenpaar onwaarschijnlijk is en dat men in elk geval de moleculen uit een groot aantal electrische atomen zou moeten opbouwen.

Door te onderstellen, dat de atomen elastische bollen zijn of liever kernen met aetherhulsels omgeven, heeft men getracht, doch te vergeefs, de verschijnselen der spectraallijnen te verklaren. Veel verwachting gaf eindelijk de vortex theorie van Thomson; verschillende gronden beletten evenwel den schrijver die verwachting te deelen.

Schrijver wijst nu een geheel nieuwen weg aan, langs welken men, zonder den oorsprong der spectraallijnen geheel te kennen, toch een verband tusschen de verschillende lijnen op het spoor kan komen.

Het valt hem vooral op, dat het aantal spectraallijnen zoo groot is, en de verschillende lijnen zoozeer in intensiteit kunnen uiteenloopen. Hij vraagt daarom, of in een lineair spectrum niet de analogen aanwezig zijn van de combinatie-tonen, allereerst de verschil- en somtonen volgens Helmholtz; zulks is niet onwaarschijnlijk, wanneer van een

lichtuitzendend atoom of molecule de trillingen niet oneindig klein zijn.

Schrijver gaat nu, volgens het door RAYLEIGH ontwikkelde, de mogelijkheid voor het bestaan van dergelijke secundaire trillingen na en betoogt, dat hun optreden zeer waarschijnlijk is. Daar hunne amplitude evenredig is aan het product van de amplituden der primaire trillingen, laat zich bij groote lichtintensiteit verwachten. dat het oog gevoelig genoeg is om die combinatietrillingen waar te nemen.

Hierop volgt de uitvoerige uiteenzetting eener methode van onderzoek naar het bestaan van deze som- en verschillijnen. Wanneer een dergelijk verschil zich tusschen twee spectrale lijnen voordoet, in hoever is dit dan toevallig? Deze vraag wordt in het breede onderzocht, ook volgens eene methode, door den tweeden ondergeteekende van dit verslag aangegeven. Op uitmuntende wijze wordt dit onderzoek, dat van zuiver wiskundigen aard is, doorgevoerd en daarbij berekend, hoeveel coïncidentiën van verschillen bij n grootheden te verwachten zijn; want is het aantal waargenomen coïncidentiën van verschillen grooter dan het aantal, dat men gemiddeld kon verwachten, zoo wordt het vermoeden gevestigd, dat som- of verschillijnen bestaan en hier dus geen louter toeval in het spel is.

Na deze theoretische ontwikkelingen deelt de schrijver de uitkomsten van zijn onderzoek bij waterstof, kalium, natrium, koper, mangaan, zilver, rubidium, zuurstof en waterstof mede. Hij geeft deze in uitvoerige tabellen, waarbij hij uit de waarnemingen der verschillende natuurkundigen de som- en verschillijnen tracht op te sporen.

Hij vindt bij waterstof dat het aantal waargenomen coïncidentiën vrij wat grooter is dan het te verwachten aantal; de waarschijnlijkheid, dat deze coïncidentiën aan toeval moeten worden toegeschreven, is daarom vrij klein.

Het onderzoek bij kalium heeft ook eene uitkomst geleverd, gunstig voor de meening dat in het kaliumspectrum som- en verschillijnen voorkomen; ook voor natrium en de andere genoemde stoffen vindt hij hetzelfde resultaat.

De uitgebreide verhandeling van den Heer JULIUS levert,

behalve zijn oorspronkelijk onderzoek, eene zeer belangrijke bijdrage tot de geschiedenis en kritiek van de theorie der spectraallijnen.

Wij hebben de eer U voor te stellen, deze verhandeling met de daaraan toegevoegde tabellen in de werken der Akademie te doen opnemen.

Amsterdam, 31 Maart 1888.

C. H. C. GRINWIS.
H. A. LORENTZ.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 27 April 1888.



Tegenwoordig de Heeren: BUYS BALLOT, Voorzitter, HOFFMANN, ZEEMAN, BIERENS DE HAAN, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, BAEHR, MAC GILLAVRY, FRANCHIMONT, DE VRIES, HOEK, DONDERS, RAUWENHOFF, HUBRECHT, STOKVIS, A. C. OUDEMANS JR., GRINWIS, DIBBITS, PLACE, ENGELMANN, J. A. C. OUDEMANS, PEKELHARING, FORSTER, VAN DORP, RIJKE, LORENTZ, VAN RIEMSDIJK, MARTIN, VAN DE SANDE BAKHUYZEN, MULDER, KORTEWEG, SCHOUTE en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:
1⁰. H. C. ROGGE, Bibliothecaris der Universiteits-Bibliotheek te Amsterdam, 21 April 1888; 2⁰. A. J. VAN PESCH, Bibliothecaris van het wiskundig Genootschap »Een onvermoeide arbeid komt alles te boven" te Amsterdam, 21 April 1888; 3⁰. A. J. ENSCHEDÉ, Bibliothecaris der Stads-Bibliotheek te Haarlem, 18 April 1888; 4⁰. J. TIDEMAN, Secretaris van het Koninklijk Instituut van Ingenieurs te 's Gravenhage, 19 April 1888; 5⁰. BUYS BALLOT, Directeur van

het Koninklijk Nederlandsch meteorologisch Instituut te Utrecht, 17 April 1888; 6⁰. W. F. C. VAN LAAK JR., Bibliothecaris der Gemeente-Bibliotheek te Arnhem, 1888; 7°. L. BROEKEMA, Directeur der Rijkslandbouwschool te Wageningen, 19 April 1888; 8⁰. H. KNOBLAUCH, Voorzitter der Kais. Leopoldinisch-Carolinischen deutschen Akademie der Naturforscher te Halle a/S., 20 Maart 1888; 9⁰. den Secretaris der Koninklijke Academie van Wetenschappen te Bologna, 25 Mei 1888; 10⁰. H. G. ZEUTHEN, Secretaris der Académie royale danoise des Sciences et des Lettres te Kopenhagen, 12 December 1887; 11⁰. den Directeur ker Nicolai-Hauptsternwarte te Pulkowa, 1888; 12⁰. J. S. BILLINGS, Bibliothecaris van het Surgeon General's Office te Washington, 11 April 1888; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van boekgeschenken van de navolgenden:

1⁰. A. TIELEMANS, Bibliothecaris der Université Catholique te Leuven, Januari 1888; 2⁰. FÖRSTEMANN, Archivaris der kön. sächsische Gesellschaft der Wissenschaften te Leipzig, 25 October, 26 November 1887; 5, 10 Februari 1888; 3⁰. den Secretaris van het historischer Verein für Unterfranken und Aschaffenburg te Würzburg, 1 October 1887; 4⁰. A. S. RILLIET, Secretaris der Société de Physique et d'Histoire naturelle te Genève, 22 Maart 1888; 5⁰. den Bibliothecaris der Società Italiana delle Scienze te Rome, 7 September 1887; 6⁰. den Secretaris der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Bologna, 13 Augustus 1887; 7⁰. H. WILD, Directeur van het physikalisches Central-Observatorium te Petersburg, December 1887; 8⁰. H. C. HEPITES, Directeur van het Institut météorologique de Roumanie te Bucharest, 1888: waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behooren: 1⁰. brieven van de Heeren VAN DE SANDE BAKHUYZEN en VAN DER WAALS, de kennisgeving behelzend, dat zij de op hen in de Maart-vergadering uitgebrachte keuzen tot Voorzitter en Onder-

voorzitter der Afdeeling aannemen; 2^{0}. een schrijven van den Minister van Binnenlandsche Zaken (25 April 1888) waarin wordt meêgedeeld, dat Z. M. de Koning de benoeming van de Heeren H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN en J. D. VAN DER WAALS, respectievelijk tot voorzitter en ondervoorzitter der Afdeeling, heeft goedgekeurd; 3^{0}. kennisgevingen van de Heeren SCHOLS, VAN DIESEN en SURINGAR, dat zij verhinderd zijn de Vergadering bij te wonen; 4^{0}. een brief van het correspondeerend lid, den Heer VAN DER BURG, ter begeleiding van een paar brochures over geneeskundige onderwerpen.

De voorzitter richt eenige waardeerende woorden tot de Heeren VAN DE SANDE BAKHUYZEN en VAN DER WAALS, en wenscht hen zoowel als de Afdeeling met de bekrachtiging door Z. M. den Koning van de op hen uitgebrachte keuzen geluk.

— De Heeren PLACE en KORTEWEG brengen een gunstig rapport uit over de verhandeling van den Heer Dr. J. L. HOORWEG (Experimenteel onderzoek over de polsbeweging), waarna de Vergadering besluit haar in de werken der Akademie op te nemen.

Gunstig ook luidt het verslag, uitgebracht over het opstel van Dr. V. A. JULIUS (Over de trillende beweging van een vervormden vloeistofbol), weshalve ook hieraan eene plaats in de werken der Akademie zal worden ingeruimd.

— De Heer J. A. C. OUDEMANS spreekt over den dubbelebeelden-mikrometer van AIRY en deelt de uitkomst mede van het onderzoek naar de eigenschap, waaraan dit instrument voldoen moet, opdat de waarde eener schroefomwenteling onafhankelijk zij van de accomodatie van het oog. De spreker vond, dat hiertoe de afstand van de 1^{e} tot de 2^{e} lens gelijk moet zijn aan den brandpuntsafstand der 1^{e} lens — eene voorwaarde, die reeds voor een ander doel in den mikrometer vervuld was.

— Door den Heer BIERENS DE HAAN worden, uit naam

van den hoogleeraar LE PAIGE te Luik, voor de boekerij der Akademie eenige overdrukken aangeboden van wiskundige opstellen.

— De Heer LORENTZ biedt ter opneming in de werken der Akademie aan: 1⁰ eene verhandeling van den Heer Dr. V. A, JULIUS, leeraar aan de Hoogere Burgerschool te Delft; »Over de dubbellijnen in de spectra van natrium, magnesium en aluminium"; en 2⁰. eene verhandeling van den Heer Dr. P. H. DOJES: »Over de vermeerdering der maximale spanning van een damp en daarmede samenhangende verschijnselen".

De Voorzitter benoemt tot verslaggevers over de 1e verhandeling de Heeren GRINWIS en LORENTZ, en over de 2e de Heeren VAN DER WAALS en BOSSCHA.

— Daar er verder niets te behandelen is, sluit de Voorzitter de vergadering.

RAPPORT

OVER DE

VERHANDELING VAN DR. J. L. **HOORWEG:**

EXPERIMENTEEL ONDERZOEK NAAR DE POLSBEWEGING.

(Uitgebracht in de vergadering van 27 April 1888).

De verhandeling van den Heer HOORWEG: »Experimenteel onderzoek naar de polsbeweging", welke ons ter beoordeeling is gegeven, heeft in hoofdzaak ten doel, al de verschijnselen der polsbeweging in elastische buizen en in het slagaderstelsel te verklaren: uitsluitend uit de bekende wetten der terugkaatsing en interferentie van golven, en dat wel in tegenstelling met andere onderzoekers, die dikwijls meer op het mechanisme zelf de aandacht gevestigd houden, door hetwelk deze verschijnselen tot stand komen. Wij kunnen de vraag laten rusten òf en in welke mate deze het verwijt verdienen, hun door den Heer HOORWEG gedaan, van vaak, na ter verklaring van hoofdverschijnselen de wetten der golfbeweging te hebben toegepast, nog bijkomende verschijnselen aan de traagheid der stof of de uitrekking van den wand te willen toeschrijven, maar merken op dat, naar onze meening, ook al wordt deze fout vermeden, de methode van HOORWEG veel vóór heeft. Inderdaad toch is de mathematische physica er in geslaagd, de wetten der golfbeweging een zóo eenvoudigen vorm te geven, dat ons voorstellingsvermogen gemakkelijker werkt met die wetten dan met het mechanisme, waardoor zij ontstaan.

In Hoofdstuk I geeft de schrijver een kritisch overzicht

der verschillende sphygmographen en stelt hij de eischen vast, waaraan een goede sphygmograaph moet voldoen. Bij de bespreking van het luchttransport, dat bij het registreeren van den pols wel de beste uitkomsten geeft, gaat de schrijver het onderzoek van DONDERS met stilzwijgen voorbij, dat in deel I der tweede reeks van de »Onderzoekingen gedaan in het physiologisch Laboratorium der Utrechtsche Hoogeschool", te vinden is. Omtrent de voortplantingssnelheid der luchtgolven in elastische buizen, wijken de resultaten van den schrijver van die van DONDERS af.

Aan het slot van dit hoofdstuk wordt nauwkeurig nagegaan, op welke wijze de uitslag van den sphygmograaf afhangt van de kracht, waarmede de veer op den buiswand drukt. De uitkomst wordt in een formule samengevat en experimenteel getoetst.

Het volgende hoofdstuk vangt aan met de mathematische theorie der golfbeweging. Met de wijze, waarop de BESSEL'sche functiën uit de formules (23), (24), (25) verwijderd zijn, kunnen wij ons niet vereenigen. Evenmin houden wij de toepassing der formule (26), door LAMB voor eene geheel andere golfbeweging opgesteld, op polsgolven met wrijving voor geoorloofd. Wij kunnen deze beide punten echter laten rusten, daar zij op het vervolg der verhandeling van geen invloed zijn. Voor zooverre dit gedeelte als inleiding dienen moet van 't geen volgt, kunnen wij er gunstig over oordeelen.

Terecht wijst de schrijver op het belangwekkende feit, dat de formule voor de voortplantingssnelheid van polsgolven, waarvan de ontdekking tot heden aan RESAL werd toegeschreven, reeds bijna zeventig jaar vroeger door THOMAS YOUNG is gevonden. Zonderling is het echter dat YOUNG in dezelfde verhandeling (*Phil. Trans.* 1809, p. 1), waarin hij later de juiste uitkomst geeft, de voortplantingssnelheid op p. 12 ten onrechte uit de »*actual* arterial pressure" berekend wil hebben en dan ook daar ter plaatse tot eene aanzienlijk geringere waarde komt dan die, welke uit de juiste formule volgt (p. 16) en door Dr. HOORWEG wordt aangehaald, en dat wel zonder tusschen beide tegenstrijdige

voorstellingen eene *besliste* keuze te doen, al helt hij blijkbaar tot de juiste over.

Tot zijn eigenlijk onderwerp komt de Heer HOORWEG in § 10. Hier en in § 11 tracht hij door graphische constructies eenige door anderen verkregen sphygmographische krommen als gevolg van meervoudige terugkaatsingen te verklaren. Zonder het welslagen van deze poging in twijfel te willen trekken, meenen wij toch op hare zwakke zijde te moeten wijzen. De schrijver geeft namelijk niet aan, hoe de afneming der intensiteit als gevolg der terugkaatsingen en der wrijving door hem in rekening is gebracht. Waar het proeven van anderen geldt, over wier toestellen men niet te beschikken heeft, is een zekere willekeur niet te vermijden, maar een eigen experimenteel onderzoek zou toch over dit punt allicht meer licht kunnen verspreiden.

In Hoofdstuk III geeft de schrijver verslag van zijne eigen proeven. Door middel van een caoutchouc-ballon, die met de hand wordt samengeknepen, wordt het vocht stootsgewijs voortbewogen door een caoutchouc-buis, waarop twee luchtkussens geplaatst zijn, die door luchttransport twee op een cylinder schrijvende hefboompjes in beweging brengen. De eigenaardigheid van den toestel bestaat voornamelijk daarin, dat het oogenblik der sluiting van de metalen kleppen, vóór en achter den ballon, in de geregistreerde kromme wordt aangegeven door een inductie-vonk, die door het papier slaat. Uit de analyse der kromme leidt de schrijver af, dat de verheffing in het neerdalende deel van de sluiting der klep achter het kunsthart, de nagebootste valvulae semilunares, afhangt. In Hoofdstuk IV wordt de zooeven besproken kromme vergeleken met die, welke men door middel van het luchttransport van de menschelijke carotis kan registreeren. Ook in deze wordt door middel van een inductie-vonk het oogenblik der sluiting van de valvulae semilunares aangeteekend, en wel door den stroom te sluiten telkens wanneer de tweede hartstoon gehoord wordt. De schrijver komt hierbij tot de uitkomst, dat het zoogenaamde dicrotisme een klepgolf is en ontwikkelt alle gronden, waarom die verheffing niet aan een teruggekaatste

golf mag worden toegeschreven. Ook experimenteel wordt de afwezigheid van teruggekaatste golven in het vaatstelsel aangetoond. Hiervoor werd de aorta van een konijn dicht bij het hart afgesneden en door een lange caoutchouc-buis verbonden met het kunsthart. Bij het rhytmisch inpompen van vocht was in de kromme, geregistreerd door middel van een aan het begin der buis geplaatst luchtkussen, nauwelijks een spoor van een teruggekaatste golf te zien.

Eindelijk wordt de vraag besproken, in hoeverre de geregistreerde krommen der polsgolf een aanwijzing kunnen geven van de drukking in de arteries, en aangetoond, dat die drukking niet onmiddellijk uit de krommen is op te maken. Aangezien bij den mensch directe manometrische bepalingen wegvallen, moet men zijn toevlucht tot indirecte bepalingen nemen. De schrijver bespreekt de methode, door anderen gevolgd en de door hem daarin aangebrachte wijzigingen, komt echter tot de slotsom, dat wel is waar bij caoutchouc-buizen, door de kracht te bepalen, die voor dicht drukken noodig is, met tamelijke nauwkeurigheid de spanning van het in de buis bevatte vocht kan worden gevonden, maar dat dezelfde methode ook bij de het best toegankelijke arteries van het menschelijk lichaam slechts zeer onvoldoende resultaten oplevert.

Ten slotte bespreekt de schrijver de mogelijkheid om uit het oppervlak, door de abscissen-as en de polskrommen begrensd, de hoeveelheid bloed te berekenen, die in de arterie is gedrongen, als men den straal van het vat en de vergrooting door den hefboomsarm kent en buitendien een factor in aanmerking neemt, die van de drukking van het luchtkussen op de arterie afhangt.

De bepalingen geschieden in de carotis en daaruit wordt de grootte van de bloedgolf in de aorta: het debiet van den linker ventrikel, berekend met ten gronde legging der door Henle opgegeven waarden voor den diameter der artt. carotis, subclavia, anonyma en aorta. Schrijver vindt daarvoor 68 cM^3, dus veel minder dan men in navolging van Volkmann doorgaans ziet opgegeven, doch niet veel minder als anderen daarvoor hebben gevonden.

Schrijver knoopt daaraan een berekening vast van den arbeid, dien het hart verricht en de warmte, die daardoor wordt ontwikkeld, evenwel zonder nieuwe gezichtspunten te geven.

Het experimenteel onderzoek, door den schrijver uitgevoerd, draagt de kenmerken van groote nauwgezetheid en zijn beschouwingen verdienen alleszins overweging; daarom adviseeren de ondergeteekenden tot opneming van zijne verhandeling in de werken der Akademie.

T. PLACE.
D. J. KORTEWEG.

RAPPORT

OVER DE

VERHANDELING VAN DR. V. A. JULIUS:

OVER DE TRILLENDE BEWEGING VAN EEN VERVORMDEN VLOEISTOFBOL.

(Uitgebracht in de vergadering van 27 April 1888).



De aangeboden verhandeling van den Heer Dr. V. A. JULIUS »*Over de trillende beweging van een vervormden vloeistofbol*" is eene merkwaardige bijdrage tot de toepassing van bolfunctiën bij reeksen-ontwikkeling.

RAYLEIGH had omstreeks 1879, aan het einde van zijne verhandeling over capillaire verschijnselen bij vloeistofstralen, de theorie van de trillende beweging van een vloeistofbol ontwikkeld, die eene oneindig kleine vervorming heeft ondergaan en aan de werking der moleculaire krachten is overgelaten. Terwijl hierbij de vervorming symmetrisch is ten opzichte van eene middellijn, voegt hij hieraan toe, doch zonder zulks te bewijzen, dat de oplossing van het meer algemeene geval eener willekeurige verstoring, tot geheel dezelfde uitkomst zou voeren.

De schrijver meent, dat deze bewering onwaarschijnlijk is en dus betoog behoeft, en hiertoe dient de ingezonden bijdrage.

De schrijver neemt aan, dat de onsamendrukbare vloeistof zonder vortex-beweging is en dus eene snelheidspotentiaal bezit, die aan de bekende partiëele differentiaalvergelijking der tweede orde van LAPLACE voldoet. Dientengevolge laat zij zich in eene reeks volgens de opklimmende machten van

r ontwikkelen, terwijl de coëfficiënten uit producten van bolfunctiën en functiën van den tijd bestaan. Het goed recht dier ontwikkeling wordt betoogd.

Na meer andere herleidingen, die hier onmogelijk kunnen worden wedergegeven, komt de schrijver tot het besluit, dat inderdaad, bij eene willekeurige vervorming, elk punt van het boloppervlak eene samengestelde trillende beweging verkrijgt, die, evenals bij eene symmetrische vervorming, kan ontbonden worden in eene reeks van enkelvoudige trillende bewegingen, waarvoor de trillingstijd bekend is.

De wiskundige ontwikkeling verdient allen lof wegens hare sierlijkheid en kortheid; van belang is daarbij een merkwaardig, naar wij meenen, onbekend theorema omtrent twee bolfunctiën van de n^e orde.

De Commissie adviseert, de bijdrage in de Verslagen en Mededeelingen der Akademie te doen opnemen.

Amsterdam, 27 April 1888.

C. H. C. GRINWIS.
D. J. KORTEWEG.

OVER DE TRILLENDE BEWEGING

VAN EEN

VERVORMDEN VLOEISTOFBOL,

DOOR

V. A. JULIUS.

1. Aan het einde van zijn verhandeling *) over de capillaire verschijnselen bij vloeistofstralen, geeft Rayleigh de theorie van de trillende beweging van een vloeistofbol, die een oneindig kleine vervorming heeft ondergaan en aan de werking der moleculaire krachten is overgelaten †). Hij onderstelt hierbij, dat de vervorming symmetrisch is ten opzichte van een middellijn; hij voegt er aan toe, dat de oplossing van het meer algemeene geval tot geheel dezelfde uitkomst zou voeren.

Deze bewering van Rayleigh kwam mij vreemd voor; in vele gevallen weten wij, dat in een trillend stelsel de aanwezigheid of afwezigheid van zekere partiaal-trillingen ten nauwste samenhangt met de oorspronkelijke vervorming. Dat werkelijk een symmetrische vervorming bij een vloeistofbol geheel dezelfde partiaal-trillingen in het leven roept, als een willekeurige vervorming, scheen mij toe, niettegenstaande het groote gezag, dat ieder aan een uitspraak van Rayleigh zal toekennen, bevestiging te behoeven.

---

*) Rayleigh, On the capillary phenomena of jets, *Proc. Roy. Soc.* 29, p. 71 (1879).

†) l. c. p. 95.

Daarom heb ik de oplossing van het algemeene geval beproefd.

2. Wij nemen aan, dat de vloeistof, waaruit het bolletje bestaat, onsamendrukbaar en zonder vortex-beweging is; er is dus een snelheidspotentiaal U, die voldoet aan de vergelijking

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Indien wij als coördinaten invoeren r, θ en φ, of wel r, μ en φ, terwijl $\mu = \cos \theta$, volgt hieruit:

$$U = p_0 + p_1 r X_1 (\mu, \varphi) + p_2 r^2 X_2 (\mu, \varphi) + \ldots$$
$$\ldots + p_n r^n X_n (\mu, \varphi) + \text{enz.} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

waarin p_0, p_1, enz. grootheden zijn afhankelijk van den tijd en $X_n (\mu, \varphi)$ een bolfunctie voorstelt van de n^{de} orde, onafhankelijk van den tijd.

Dat men werkelijk de functies X zoodanig kan kiezen, dat zij niet afhangen van den tijd, blijkt uit de volgende beschouwing.

Men weet, dat U een funtie is van r, μ, φ en t. Voor een bepaalde waarde van elk der veranderlijken r, μ en φ, kan U als functie van t ontwikkeld gedacht worden in een reeks van den vorm:

$$U = b_0 + b_1 P_1 (t) + b_2 P_2 (t) + \ldots + b_n P_n (t) + \text{enz.} \ldots (3)$$

waarin $P_1 (t)$, $P_2 (t)$, enz. periodieke functies zijn van t, terwijl de coëfficienten b functies zijn van r, μ en φ. De eenige onderstelling, die in (3) ligt opgesloten, is deze, dat de perioden voor alle punten van den vloeistofbol dezelfde zijn.

Voor een bepaalde waarde van r kan elk der coëfficienten b ontwikkeld worden in een reeks van den vorm

$$b = c_0 + c_1 Z_1 (\mu, \varphi) + c_2 Z_2 (\mu, \varphi) + \ldots + c_n Z_n (\mu, \varphi) + \ldots (4)$$

waarin $Z_n (\mu, \varphi)$ een bolfuntie is van de orde n, natuurlijk

onafhankelijk van t. Substitueert men deze waarden van b in (3), dan krijgt men:

$$U = e_0 + e_1\, \Xi_1(\mu, \varphi) + \ldots + e_n\, \Xi_n(\mu, \varphi) + \text{enz.} \ldots (5)$$

waarin de bolfuncties Ξ onafhankelijk zijn van t, terwijl de grootheden e functies zijn van r en t.

Uit de voorwaarde, dat U voldoet aan (1), volgt nu dat e_n evenredig is met r^n; en hierdoor gaat (5) over in den vorm (2).

3. Uit deze beschouwing volgt ook, dat wij voor eenig punt van de oppervlakte van het vervormde bolletje, de waarde van r_0 kunnen brengen in den vorm:

$$r_0 = a_0 + a_1 Z_1(\mu, \varphi) + a_2 Z_2(\mu, \varphi) + \ldots + a_n Z_n(\mu, \varphi) + \text{enz.} \ldots (6)$$

waarin de grootheden a afhankelijk zijn van den tijd en de functies Z hiervan onafhankelijk.

Tusschen (2) en (6) bestaat een zeker verband, daar

$$\frac{d r_0}{d t} = \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7)$$

Nu is

$$\frac{d r_0}{d t} = \frac{d a_0}{d t} + \frac{d a_1}{d t} Z_1 + \ldots + \frac{d a_n}{d t} Z_n + \text{enz.} \ldots (8)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_0 = p_1 X_1 + 2 p_2 r_0 X_2 + \ldots + n p_n r_0^{n-1} X_n + \text{enz.} \ldots (9)$$

De waarde van r_0 uit (6) moet gesubstitueerd worden in de uitdrukking voor $\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_0$. De grootheden a_1, a_2, enz. worden intusschen ondersteld zeer klein te zijn in vergelijking met a_0; met andere woorden, wij nemen aan, dat het bolletje slechts een oneindig kleine vervorming ondergaat. Dan mogen wij in de uitdrukking voor $\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_0$ in plaats van r_0 schrijven a_0 of wel R, den straal van het onvervormde bolletje.

Maar dan kan ook niet voor *alle* waarden van μ en φ voldaan worden aan de vergelijking (7), tenzij voor elke waarde van n

$$X_n(\mu, \varphi) = Z_n(\mu, \varphi)$$

en tevens

$$\frac{d\,a_n}{d\,t} = n\,p_n\,R^{n-1} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (10)$$

Men kan zich hiervan gemakkelijk overtuigen, als men de bolfuncties in den vorm brengt, waarin de veranderlijken μ en φ van elkander gescheiden zijn *). Men kan ook opmerken dat, indien Y_n de twee-assige bolfunctie van de n^{de} orde is, volgens (8) en (9), als wij in (9) r_0 vervangen door R,

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} Y_n \left[\frac{d\,r_0}{d\,t} - \left(\frac{\partial\,U}{d\,r}\right)_0\right] d\,\mu\,d\,\varphi$$

$$= \int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} Y_n \left[\frac{d\,a_n}{d\,t} Z_n - n\,p_n\,R^{n-1}\,X_n\right] d\,\mu\,d\,\varphi$$

Volgens (7) moet deze laatste integraal nul zijn, wat als noodzakelijk gevolg met zich brengt, dat de bolfuncties $\frac{d\,a_n}{d\,t} Z_n$ en $n\,p_n\,R^{n-1}\,X_n$ identisch zijn †).

Wij krijgen dus in plaats van de vergelijking (2):

$$U = p_0 + p_1\,r\,Z_1(\mu, \varphi) + \ldots + p_n\,r^n\,Z_n(\mu, \varphi) + \text{enz.} \,.\,.\,(11)$$

waarin de grootheden p nog voldoen aan de betrekking (10).

Het is duidelijk, dat wij deze eenvoudige uitkomst niet verkregen zouden hebben, indien wij niet hadden aangenomen, dat het bolletje nooit veel van den bolvorm afwijkt.

---

*) Zie TODHUNTER, LAPLACE's functions, p. 155. HEINE, *Handbuch der Kugelfunctionen* 1ster Bnd. p. 312.

†) Zie TODHUNTER, p. 159.

4. Tot het vinden van de uitdrukking voor het arbeidsvermogen van plaats van het vervormde bolletje, zoeken wij de vergrooting, die het oppervlak van het bolletje door de afwijking van den bolvorm ondergaat. De verandering van het arbeidsvermogen van plaats bij vervorming, zal evenredig zijn met deze vergrooting van het oppervlak.

Het geheele oppervlak is

$$\Omega = \int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} d\mu d\varphi \, r_0 \sqrt{r_0^2 + (1-\mu^2)\left(\frac{\partial r_0}{\partial \mu}\right)^2 + \frac{1}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial r_0}{\partial \varphi}\right)^2}$$

of

$$\Omega = \int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} d\mu \, d\varphi \left[r_0^2 + \frac{1}{2}(1-\mu^2)\left(\frac{\partial r_0}{\partial \mu}\right)^2 + \frac{1}{2(1-\mu^2)}\left(\frac{\partial r_0}{\partial \varphi}\right)^2 \right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

als wij de vierde en hoogere machten van $\frac{\partial r_0}{\partial \mu}$ of $\frac{\partial r_0}{\partial \varphi}$ verwaarloozen.

Daar in het algemeen, wanneer m en n verschillende geheele getallen zijn,

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} Z_m Z_n \, d\mu \, d\varphi = 0,$$

is het duidelijk, dat volgens (6)

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} r_0^2 \, d\mu \, d\varphi = 4\pi a_0^2 + a_1^2 \iint Z_1^2 \, d\mu \, d\varphi + \ldots$$

$$\ldots + a_n^2 \iint Z_n^2 \, d\mu \, d\varphi + \text{enz.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Verder is

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} d\mu\, d\varphi \left[(1-\mu^2)\left(\frac{\partial r_0}{\partial \mu}\right)^2 + \frac{1}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial r_0}{\partial \varphi}\right)^2\right]$$

$$=\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} d\mu\, d\varphi \left[(1-\mu^2)\left\{a_1\frac{\partial Z_1}{\partial \mu} + \ldots + a_n\frac{\partial Z_n}{\partial \mu} + \ldots\right\}^2\right.$$

$$\left. + \frac{1}{1-\mu^2}\left\{a_1\frac{\partial Z_1}{\partial \varphi} + \ldots + a_n\frac{\partial Z_n}{\partial \varphi} + \ldots\right\}^2\right] \ldots (14)$$

5. Stel dat X_p een bolfunctie is van de orde p, die dus voldoet aan de vergelijking

$$\frac{\partial}{\partial \mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial X_p}{\partial \mu}\right\} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 X_p}{\partial \varphi^2} + p(p+1)X_p = 0 ..(15)$$

Lost men uit (15) X_p op en substitueert men deze waarde in $\iint X_p Z_n\, d\mu\, d\varphi$, dan vindt men:

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} X_p Z_n\, d\mu\, d\varphi$$

$$= -\frac{1}{p(p+1)}\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial \mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial X_p}{\partial \mu}\right\} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 X_p}{\partial \varphi^2}\right] Z_n\, d\mu\, d\varphi.$$

Integreert men partieel, en houdt men in het oog dat $(1-\mu^2) Z_n \frac{\partial X_p}{\partial \mu}$ voor $\mu = -1$ en voor $\mu = +1$ verdwijnt, evenals $Z_n \frac{\partial X_p}{\partial \varphi}$ tusschen de grenzen 0 en 2π, zoo volgt:

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} d\mu\, d\varphi \left[(1-\mu^2)\frac{\partial Z_n}{\partial \mu}\frac{\partial X_p}{\partial \mu} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial Z_n}{\partial \varphi}\frac{\partial X_p}{\partial \varphi}\right]$$

$$= p(p+1)\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} X_p Z_n\, d\mu\, d\varphi.$$

Wanneer p en n verschillen, heeft men dus:

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} d\mu d\varphi \left[(1-\mu^2)\frac{\partial Z_n}{\partial \mu}\frac{\partial X_p}{\partial \mu} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial Z_n}{\partial \varphi}\frac{\partial X_p}{\partial \varphi}\right] = 0 \,..(16)$$

en verder

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} d\mu\, d\varphi \left[(1-\mu^2)\frac{\partial Z_n}{\partial \mu}\frac{\partial X_n}{\partial \mu} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial Z_n}{\partial \varphi}\frac{\partial X_n}{\partial \varphi}\right]$$

$$= n(n+1)\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} X_n Z_n\, d\mu\, d\varphi \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. (17)$$

Hoewel de theorema's, opgesloten in de vergelijkingen (16) en (17) zeker wel bekend zijn, heb ik ze in de aangehaalde werken van TODHUNTER en HEINE niet aangetroffen. Daarom heb ik de afleiding medegedeeld, hoe eenvoudig zij ook is.

6. Wij passen (16) en (17) toe op (14). Dan wordt

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} d\mu\, d\varphi \left[(1-\mu^2)\left(\frac{\partial r_0}{\partial \mu}\right)^2 + \frac{1}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial r_0}{\partial \varphi}\right)^2\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{n=\infty} n(n+1)\, a_n^2 \iint Z_n^2\, d\mu\, d\varphi.$$

Dus volgens (12) en (13)

$$\Omega = 4\pi a_0^2 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n^2+n+2}{2}\, a_n^2 \iint Z_n^2\, d\mu\, d\varphi \,..(18)$$

7. Wij moeten nu nog de voorwaarde invoeren, dat het vloeistofbolletje niet van volume verandert, omdat de vloeistof onsamendrukbaar is.

Men heeft, als het volume I genoemd wordt:

$$I = \frac{1}{3}\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} r_0^3\, d\mu\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} d\mu\, d\varphi\, [a_0^3 + 3\, a_0^2 \{a_1 Z_1 + \ldots + a_n Z_n + \}$$

$$+ 3\, a_0 \{a_1 Z_1 + \ldots + a_n Z_n + \}^2 + \{a_1 Z_1 + \ldots + a_n Z_n + \}^3].$$

Daar

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} Z_n \, d\mu \, d\varphi = 0 \quad \text{en} \quad \int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} Z_p \, Z_n \, d\mu \, d\varphi = 0,$$

vinden wij bij geoorloofde verwaarloozing:

$$I = \frac{1}{3} a_0^3 \left\{ 4\pi + 3\frac{a_1^2}{a_0^2} \int\int Z_1^2 d\mu d\varphi + \ldots + 3\frac{a_n^2}{a_0^2} \int\int Z_n^2 d\mu d\varphi + \ldots \right\}.$$

Als R de straal is van het onvervormde bolletje, volgt hieruit:

$$R^3 = a_0^3 \left\{ 1 + \frac{3}{4\pi a_0^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n^2 \int\int Z_n^2 \, d\mu \, d\varphi \right\} \quad \ldots (19)$$

en dus

$$a_0^2 = R^2 - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n^2 \int\int Z_n^2 \, d\mu \, d\varphi$$

zoodat (18) wordt:

$$\Omega = 4\pi R^2 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n^2 + n - 2}{2} a_n^2 \int\int Z_n^2 \, d\mu \, d\varphi \quad \ldots (20)$$

8. Is C een constante; noemen wij het arbeidsvermogen van plaats van het vervormde bolletje V; is $\frac{1}{2} H$ de moleculaire constante van de vloeistof; zoo heeft men:

$$V = C + \frac{1}{2} H \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(n-1)(n+2)}{2} a_n^2 \int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} Z_n^2 \, d\mu \, d\varphi \quad \ldots (21)$$

Het arbeidsvermogen van beweging is, wanneer wij de dichtheid der vloeistof ϱ stellen:

$$T = \frac{1}{2} \varrho \int\int\int \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 \right\} dx \, dy \, dz$$

Daar $\Delta^2 U = 0$, kunnen wij volgens het theorema van Green hiervoor schrijven:

$$T = \frac{1}{2} \varrho \int U_0 \left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_0 d\,\Omega$$

als N de normaal aanduidt, in eenig punt op de oppervlakte van het bolletje opgericht.

Maar

$$\left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_0 = \frac{\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_0 - \frac{1-\mu^2}{r_0^2} \frac{\partial r_0}{\partial \mu} \left(\frac{\partial U}{\partial \mu}\right)_0 - \frac{1}{r_0^2(1-\mu^2)} \frac{\partial r_0}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)_0}{\sqrt{1 + \frac{1-\mu^2}{r_0^2} \left(\frac{\partial r_0}{\partial \mu}\right)^2 + \frac{1}{r_0^2(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial r_0}{\partial \varphi}\right)^2}}$$

terwijl

$$d\,\Omega = r_0^2 \sqrt{1 + \frac{1-\mu^2}{r_0^2} \left(\frac{\partial r_0}{\partial \mu}\right)^2 + \frac{1}{r_0^2(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial r_0}{\partial \varphi}\right)^2} \cdot d\mu d\varphi$$

zoodat

$$T = \frac{1}{2} \varrho \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} d\,\mu\, d\,\varphi\, U_0 \left[r_0^2 \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_0 - (1-\mu^2) \frac{\partial r_0}{\partial \mu} \left(\frac{\partial U}{\partial \mu}\right)_0 - \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial r_0}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)_0 \right] \quad \ldots \ldots \ldots (22)$$

Voeren wij nu de waarden in van U uit (11) en die van r_0 uit (6), dan is het gemakkelijk in te zien dat bij de nauwkeurigheid, waarmede wij ons hier tevreden stellen, de vergelijking (22) wordt:

$$T = \frac{1}{2} \varrho \sum_{n=1}^{n=\infty} n\, R^{2n+1} p_n^2 \iint Z_n^2\, d\,\mu\, d\,\varphi.$$

Volgens (10) gaat dit over in

$$T = \frac{1}{2} \varrho\, R^3 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{d\, a_n}{d\, t}\right)^2 \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} Z_n^2\, d\,\mu\, d\,\varphi \, . \, . (23)$$

9. De bewegingsvergelijkingen van Lagrange voor dit geval

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} + \frac{\partial V}{\partial \psi} = 0$$

als ψ een der algemeene coördinaten voorstelt en $\dot{\psi}$ voor $\frac{d\psi}{dt}$ staat, geven nu:

$$\varrho \frac{R^3}{n} \frac{d^2 a_n}{d t^2} + \frac{1}{2} H (n - 1)(n + 2) a_n = 0. \quad . \quad . \quad (24)$$

De grootheden a_n zijn dus onafhankelijk van elkander, terwijl

$$a_n = A_n \cos \left\{ t \sqrt{n(n-1)(n+2) \frac{H}{2 \varrho R^3}} + B \right\} \quad . . (25)$$

Elk punt van de oppervlakte van het bolletje krijgt dus een samengestelde trillende beweging, die ontbonden kan worden in een reeks van enkelvoudige trillende bewegingen, terwijl de trillingstijd is:

$$T_n = \frac{2\pi}{\sqrt{n(n-1)(n+2)}} \sqrt{\frac{2 \varrho R^3}{H}} \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

10. Hiermede is aangetoond, dat werkelijk de bewering van Rayleigh juist is. Natuurlijk zal de relatieve intensiteit van de partiaal-trillingen afhankelijk wezen van de oorspronkelijke vervorming; maar dit neemt niet weg dat bij een willekeurige vervorming geen andere partiaal-trillingen voorkomen als die, welke ook bij een vervorming, symmetrisch ten opzichte van een middellijn, mogelijk zijn.

Delft, Maart 1888.

ONDERZOEK NAAR DE VOORWAARDE,

WAAROP

IN DEN DUBBELE-BEELDEN-MIKROMETER VAN AIRY

DE WAARDE EENER

SCHROEFOMWENTELING ONAFHANKELIJK IS VAN DE ACCOMMODATIE VAN HET OOG,

DOOR

J. A. C. OUDEMANS.



De dubbele-beelden-mikrometer, waarvan de bijgevoegde figuur 1 eene doorsnede op de ware grootte aanbiedt, is door de HH. TROUGHTON en SIMMS te Londen, naar de door AIRY aangegeven beginselen, maar naar de door VALZ voorgestelde en door AIRY overgenomen verhoudingen, in 1855 voor de Leidsche sterrewacht vervaardigd, en heeft wijlen ons medelid KAISER gediend om zijne nauwkeurige bepalingen van de afmetingen der groote planeten te volbrengen, (zie Verhandelingen der Afdeeling Natuurkunde, Koninklijke Akademie van Wetenschappen, Deel VI, en Annalen der Sternwarte zu Leiden, Deel III.)

Zooals de figuur aantoont, bestaat hij uit 4 lenzen. AIRY nummerde deze in de richting van het objectief naar het oog, KAISER in de richting van het oog naar het objectief; om verwarring te voorkomen zullen wij haar aldus benoemen:

Van het objec-ief afgerekend.		Welke soort van lens.
de 1e lens :	de voorste lens,	+ gelijkbol,
» 2e » :	» gespleten lens,	— gelijkbol, *)
» 3e » :	» veldlens,	+ platbol,
» 4e » :	» de ooglens.	+ gelijkbol.

Van deze lenzen zijn de brandpuntsafstanden en onderlinge afstanden, theoretisch, als volgt:

Lens.	Brandpunts-afstand.	Afstand van 2 opvolgende lenzen.
Voorste lens	p (willekeurig)	$a = p$
Gespleten lens	$q = -1$	$b = 1$
Veldlens.	$r = +1$	$c = 3$
Ooglens	$s = +1$	

Het is niet moeilijk na te gaan, hoe Valz aan deze waarden gekomen is. De voorwaarden, waaraan het lenzenstelsel voldoet, zijn, volgens Airy's ontwikkeling, (*Memoirs of the R. A. S.* Deel XV): 1⁰. het achromatisme, dat bedongen wordt door de formule:

$$4abc - 3bcp - 3(a+b)cq - 3a(b+c)r - 3abs + 2cpq + 2(b+c)pr + 2(a+b+c)qr + 2bps + 2(a+b)qs + 2ars - pqr - pqs - prs - qrs = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

2⁰. de eigenschap, dat door de zijdelingsche beweging van eene helft of beide helften der gespletene lens geene kleuring ontstaat, en die uitgedrukt wordt door de formule

$$3bc - 2(b+c)r - 2bs + rs = 0 \quad \ldots\ldots (2).$$

3⁰. dat het door de voorste lens gevormde beeld van het objectief des kijkers, zich bevindt op de plaats der gespletene lens, zoodat beide helften dezer laatste, in alle gevallen, dezelfde hoeveelheid licht ontvangen en de beide beelden

*) Het was het voorstel van Valz, deze lens negatief te nemen. Wij zullen spoedig zien, waarom.

dus even helder zijn. Aan deze eigenschap wordt in voldoende mate voldaan door de vergelijking

$$a = p. \qquad (3)$$

Door substitutie in de vergelijking (1) verkrijgt men:

$$0 = p \{b c - c q - (b + c) r - b s + q r + q s + r s\} \\ + q \{- 3 b c + 2 (b + c) r + 2 b s - r s\}.$$

Daar echter de laatste term dezer uitdrukking, krachtens (2), $= 0$ is, zoo is ook de eerste term $= 0$, of, door p deelende:

$$b c - c q - (b + c) r - b s + q r + q s + r s = 0 \,..\, (4)$$

De vergelijkingen (2) en (4) stellen dus de voorwaarde voor, waaraan b, c, q, r en s moeten voldoen. Elimineeren wij tusschen deze vergelijkingen nog c, dan verkrijgen wij:

$$(r + s) b^2 - (q r + q s + 2 r s) b + (2 q r + q s + r s) r = 0$$

waarin men drie grootheden willekeurig kan aannemen om er de vierde uit te bepalen. Het eenvoudigst zou zijn q, r en $s = + 1$ te stellen, maar dan wordt b onbestaanbaar. Stelt men r en $s = 1$, en laat men q nog onbepaald, dan verkrijgt men

$$b = \frac{q + 1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(q - 2)^2 - 5.}$$

Wil men q positief aannemen, dan moet $q > 2 + \sqrt{5}$, d. i. $>$ 4,236 zijn; Airy nam aanvankelijk $q = 5$; b wordt dan $3 \pm 1 = 4$ of 2, waarvan hij de laatste koos. Wil men echter, zooals Valz voorstelde, q negatief nemen, dan geeft $q = -1$ reeds een bestaanbare uitkomst, nl. $b = \pm 1$; daar nu b noodzakelijk positief moet zijn, is alleen het bovenste teeken geldig; derhalve $b = 1$ en uit (2): $c = 3$, een en ander overeenkomstig de boven medegedeelde, later door Airy aangenome verhoudingen.

In het exemplaar den Leidsche Sterrewacht, mij goed-

gunstig door den Heer BAKHUYZEN ter leen afgestaan, schijnen de vervaardigers voor de eenheid den engelschen duim, (25,4 mm.) genomen te hebben; althans eene bepaling der brandpuntsafstanden en uitmeting der onderlinge afstanden der lenzen heeft mij in millimeters gegeven:

$q = -26,0$,	dikte $= 0,65$	$k = 0,22$
$r = +27,1$,	4,86	1,61
$s = +23,85$,	1,95	0,62
$b = 25,0$,		
$c = 71.0$.		

k is $=$ den afstand der knooppunten, als men den brekingsindex van het glas $= 1,5$ stelt. De brandpuntsafstanden zijn hier gemeten van knooppunt tot brandpunt, en de onderlinge afstanden der lenzen tusschen de naar elkander toegekeerde knooppunten.

Er zijn vier objectieflenzen, die even zoo vele verschillende vergrootingen geven. Zij zijn in buisjes gevat, die met bajonetsluiting bevestigd worden in het buisje $ABCD$, dat onder aan den mikrometer geschroefd is. De figuur vertoont den mikrometer, als de kleinste vergrooting gebruikt wordt; met stippels is aangegeven waar de 2e, 3e en 4e voorste lenzen komen, als de buisjes, waarin zij gevat zijn, in de plaats van de in de figuur aangewezene komen. Voor deze 4 lenzen vond ik, evenzoo in millimeters

N°.	Dikte.	k.	p.	a.
1	4,63	1,44	26,41	27,2
2	4,45	1,37	19,94	21,4
3	4,01	1,23	12,70	12,7
4	4,53	1,24	8,40	8,0

waaruit blijkt dat de gelijkheid van p en a door de vervaardigers vrij wel in acht genomen is,

De waarde van den equivalenten brandpuntsafstand van een uit 4 glazen bestaand oculair is:

$$F = \frac{pqrs}{(p-a)q(r+s-c)+r(s-c)(p+q-a)-b(p+q-a)(r+s-c)}.$$

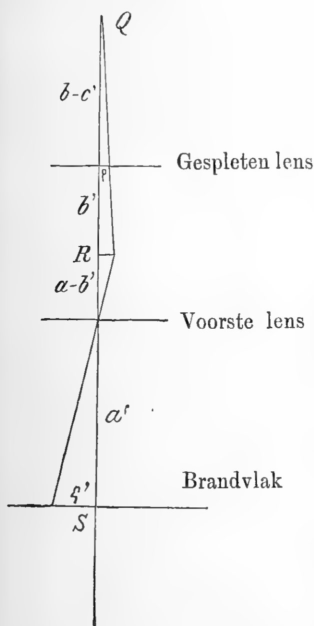
Substitueert men hierin de waarden $p = a$, $q = -1$, $b = r = s = 1$, en $c = 3$, dan verkrijgt men

$$F = -a;$$

het geheele oculair is dus equivalent aan eene negatieve lens met een brandpuntsafstand $= a$, en vertoont dus, evenals een Galileische kijker, de voorwerpen rechtop.

Bij het nauwkeurig beschouwen van dezen mikrometer kwam de vraag bij mij op of de waarde eener omwenteling der mikrometerschroef wel onafhankelijk is van de accommodatiewijdte van het oog. Is dit *niet* het geval, en moet de afstand van het in het brandpunt des kijkers gevormde beeld tot de voorste lens van den mikrometer onveranderd blijven, dan is het gebruik van het instrument aan groote moeielijkheden onderworpen.

Om dit te onderzoeken, ga men den loop der lichtstralen in eene tegengestelde richting na, als waarin zij invallen, dus van het oog uit. Stel dat het oog hypermetropisch is en dat het geaccommodeerd is voor stralen die convergeeren op een afstand D van de ooglens, aan de zijde van den waarnemer; als wij dan deze stralen in omgekeerde richting, dus van het oog naar het objectief vervolgen, zullen zij zich na den doorgang door elke der 4 lenzen vereenigen in 4 punten P, Q, R, S; stel de afstanden dezer vereenigingspunten tot de laatst doorgeloopene lens D', c', b' en a', dan zullen deze grootheden alle afhangen van D. Om nu de door ons gestelde vraag te beantwoorden zijn, in figuur 2, Q, R en S de drie laatste der bedoelde 4 punten, dan bevindt zich in S het door het objectief gevormde beeld, dat door den mikrometer gemeten wordt. Stel dat de ééne



helft der gespletene lens zooveel op zijde geschroefd is, als ééne omwenteling ϱ der mikrometerschroef bedraagt, en dat daarmede overeenstemt eene verplaatsing van het beeld $= \varrho'$, dan is

$$\varrho' = \frac{a'}{a - b'} \cdot \left(1 + \frac{b'}{b - c'}\right) \varrho.$$

Stel $b - c' = E$, dan is

$$b' = \frac{E q}{E - q} \qquad a - b' = a - \frac{E q}{E - q}$$

$$a' = \frac{(a - b') p}{a - b' - p}$$

$$\frac{\varrho'}{\varrho} = \frac{a'}{a - b'} \left(1 + \frac{b'}{E}\right)$$

$$= \frac{p}{a - b' - p} \cdot \frac{E}{E - q} = \frac{p}{(a - p)\left(1 - \frac{q}{E}\right) - q} \,.$$

Zal dus $\frac{\varrho'}{\varrho}$ onafhankelijk van E en dus van D zijn, dan moet $a = p$ zijn, en aan deze voorwaarde is, zooals boven is medegedeeld, reeds, om een ander doel te bereiken, voldaan.

Worden de door Airy aangegeven verhoudingen strikt in acht genomen, dan is, voor een oog, dat voor evenwijdige stralen acommodeert,

$$D = \infty,$$
$$D' = s = 1,$$
$$c - D' = 2,$$
$$c' = 2,$$
$$E = b - c' = -1,$$

en, daar $q = -1$ is:

$$1 - \frac{q}{E} = 0,$$

zoodat ook de tweede factor van den eersten term van den noemer $= 0$ wordt. In die onderstelling heeft men dus

$$\varrho' = -\frac{p}{q} r.$$

In de uitvoering zullen echter de werkelijke waarden van b, c, q, r en s altijd eenigszins van de theoretische waarden verschillen, en de beide factoren van den eersten term van den noemer zullen dus feitelijk niet geheel $= 0$ zijn, maar het product van beide factoren zal ten opzichte van q altijd zeer klein zijn.

Zooals men uit figuur 1 ziet, zijn ooglens en collectieflens in eene en dezelfde uitschuifbare oogbuis bevestigd; is dus de mikrometer, op zeer weinig na, op den behoorlijken afstand van het objectief aangebracht, doch vindt men dan de beelden niet volkomen zuiver, dan kan men de voor het meten noodige scherpte der beelden ook nog verkrijgen, door die oogbuis in of uit te schuiven; het is namelijk duidelijk dat dit op de aanraking der beide beelden, die door de helften der gespletene lens gevormd worden, van geen invloed is.

Utrecht, Mei 1888.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 26 Mei 1888.



Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voorzitter, SCHOUTE, KAPTEIJN, HOOGEWERFF, BAEHR, STOKVIS, FORSTER, VAN DER WAALS, SCHOLS, RIJKE, A. C. OUDEMANS JR., GRINWIS, BUYS BALLOT, MICHAËLIS, VAN DIESEN, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, MULDER, RAUWENHOFF, PEKELHARING, GUNNING, LORENTZ, FRANCHIMONT, MAC GILLAVRY, KORTEWEG, KAMERLINGH ONNES, FÜRBRINGER, PLACE, HOEK, MARTIN, HOFFMANN BEIJERINCK, BEHRENS, ENGELMANN en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

— De Voorzitter wenscht de eerste maal, dat het praesidium door hem zal worden waargenomen, niet voorbij te laten gaan, zonder zijn dank voor de op hem uitgebrachte keuze uit te spreken, en zich in de welwillende samenwerking zijner medeleden aan te bevelen. — Hij vertrouwt dat het hem gelukken zal, de bijeenkomsten met onpartijdigheid te leiden, in overeenstemming met de overlevering, dat geschillen van wetenschappelijken aard in vergaderingen als die der Koninklijke Akademie van Wetenschappen, enkel door argumenten, aan de wetenschap ontleend, beslecht kun-

nen worden. — Hij vertrouwt in den geest der Vergadering te handelen, wanneer hij een woord van dank richt tot den vorigen Voorzitter, den Heer Buys Ballot, wiens 70-jarige leeftijd hem verplichtte tot de rustende leden over te gaan, voor de diensten door hem aan de Akademie bewezen. De genegenheid van de leden dezer Instelling voor zijn persoon, was hem niet lang geleden gebleken, bij de herdenking van zijn 40-jarig hoogleeraarschap. — De Akademie was daarbij — harer overlevering getrouw, waartegen Spreker geen bezwaren konde opperen — niet op officiëele wijze vertegenwoordigd geweest, maar er kan geen twijfel bestaan of alle ambtgenooten van den Jubilaris, en dus ook zij, die de plechtigheid niet persoonlijk konden bijwonen, waren in gedachte in de feestzaal tegenwoordig geweest. Hij hoopt van harte dat het den Heer Buys Ballot nog vele jaren gegeven moge wezen, de bijeenkomsten der Afdeeling bij te wonen.

— Worden gelezen Brieven van dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1°. de Gedeputeerde Staten van Friesland te Leeuwarden, 17 Mei 1888; 2°. A. Kluyver, Bibliothecaris van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden, Maart 1888; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van boekgeschenken van de navolgenden:

1°. J. Bosscha, Secretaris van de Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen te Haarlem, 27 April 1888; 2°. Stricker, Bibliothecaris der Senckenbergische naturforschende Gesellschaft te Frankfurt a.M., 8 April 1888; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behooren: 1°. de mededeeling van Z. Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken, (14 Mei 1888) dat het Z. M. den Koning behaagd heeft, de benoeming van de Heeren Dr. J. C. Kapteijn en Dr. S.

Hoogewerff tot leden, en die des Heeren Dr. Aug. Kekulé, Hoogleeraar in de Scheikunde te Bonn, tot buitenlandsch lid der Akademie goed te keuren; 2°. brieven van de Heeren Kapteijn en Hoogewerff, waarin zij der Afdeeling hun dank betuigen voor de eervolle onderscheiding, hun bewezen.

De Heeren Pekelharing en Martin worden uitgenoodigd, de nieuw benoemde leden ter Vergadering binnen te leiden.

Nadat dit geschied is, worden zij door den Voorzitter verwelkomd en als leden geïnstalleerd.

— De Secretaris deelt mede, dat de Heer Dr. Jan de Vries, leeraar aan de H. B. S. te Kampen, hem een opstel toezond, getiteld: »Over de harmonische configuratie $(24_3, 18_4)$", met verzoek dit ter plaatsing in de werken der Akademie aan te bieden. — De Voorzitter noodigt de Heeren Schoute en Bierens de Haan uit, daarover in de Juni-Vergadering rapport uit te brengen.

Verder, dat de Heer Dr. J. D. van der Plaats de door hem voor de werken der Akademie aangeboden verhandeling: »Over den Secundeslinger; 1e gedeelte" heeft terug verzocht.

— De Heer Grinwis leest, ook uit naam van den Heer Lorentz, het rapport over het opstel van den Heer Dr. V. A. Julius: »Over de dubbellijnen in de spectra van natrium, magnesium en aluminium". De conclusie strekt om aan des Schrijvers verlangen, zijn arbeid in de werken der Akademie opgenomen te zien, gevolg te geven. Aldus wordt besloten.

— De Heer Franchimont herinnert eerst aan zijne mededeelingen van het vorige jaar omtrent de werking van salpeterzuur, bij de gewone temperatuur, op derivaten van het ureum. Het is toen gebleken dat alle ureumderivaten, waarin de ureumrest met de overige elementen een open keten vormt, ontleed worden op de wijze der amiden, ofschoon niet altijd even gemakkelijk, maar dat dit niet gebeurt bij dezulke, waarin de ureumrest met de overige atoomgroepen een gesloten ring vormt. In het laatste geval had òf geene, òf

eene geheel andere werking plaats, welke meestal bestond in de vorming van een nitroderivaat.

Het verder onderzoek, dat met de hulp van den Heer Klobbie werd verricht, heeft geleerd dat de *interne ureïden*, ook door hun gedrag met salpeterzuur, in ten minste drie soorten te onderscheiden zijn:

1⁰. zij, waarin de rest van het ureum alleen met eene koolwaterstofrest verbonden is, zooals het *aethyleencarbamide*, het *glycoluril* enz., die juister *ureïnen* genoemd moeten worden;

2⁰. zij, waarin éëne groep NH van de ureumrest aan eene koolwaterstofrest, de andere aan de groep CO gebonden is, zooals bij de interne ureïden der éénbasische zuren: *hydantoïne*, *lactylureum*, *acetonylureum* enz.;

3⁰. zij, waarin de beide groepen NH der ureumrest alleen aan CO gebonden zijn, zooals bij de interne ureïden der tweebasische zuren: *parabaanzuur* enz.

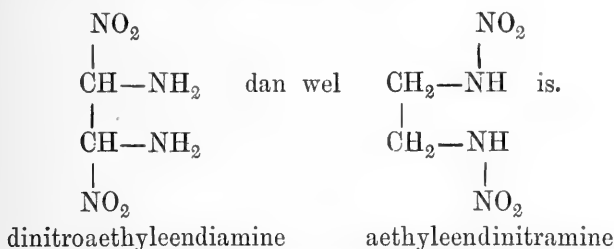
De beide eerste soorten leveren gemakkelijk nitroderivaten, de eerste een dinitro-, de tweede een mononitroderivaat. De derde soort levert alleen dan een nitroderivaat, als tusschen de beide CO-groepen van het tweebasische zuur een met waterstof verbonden C-atoom zich bevindt. Zulk een nitroderivaat heeft andere eigenschappen dan die, welke uit de beide andere soorten van interne ureïden ontstaan en wordt voorloopig niet verder besproken.

Van de 1ste soort van interne ureïden werd vooreerst het *aethyleencarbamide* onderzocht; dit geeft uiterst gemakkelijk een kleurloos dinitroderivaat, dat in water niet oplosbaar is, maar uit kokenden absoluten alcohol, waarin het een weinig oplost, kan omgekristalliseerd worden. Het geeft met 4 molec. NaOH een kleurloos oplosbaar natriumderivaat, waaruit door zilvernitraat de correspondeerende Ag.-verbinding als wit poeder wordt neërgeslagen, dat in drogen toestand bij zachte verwarming heftig ontploft.

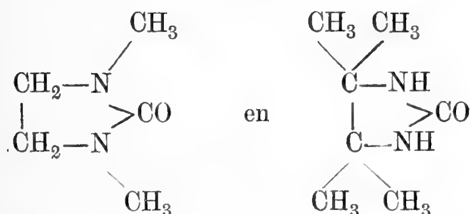
Het *dinitroaethyleencarbamide* wordt door koken met water ontleed; onder opneming van één molec. H_2O geeft het één molec. CO_2 af en er ontstaat een fraai kristalliseerend kleurloos lichaam, dat in koud water weinig oplost, en eene sterk zure reactie heeft. Het wordt door kali niet ontleed, maar

geeft een kaliumderivaat met 2 Ka, dat uit alcohol omgekristalliseerd kan worden.

De sterk zure reactie van dit lichaam deed de vraag opwerpen of de nitrogroepen hierin, en dus ook in het dinitroaethyleencarbamide, aan koolstof of aan stikstof gebonden zijn; met andere woorden of het product



De sterk zure reactie maakt de eerste opvatting minder waarschijnlijk en pleit niet tegen de tweede. Tweeërlei wegen kunnen ingeslagen worden om de vraag op te lossen. De eerste is de reductie; deze zou alleen dan tot het doel leiden, als er gemakkelijk een hydrazine ontstond, hetgeen de tweede opvatting zou bewijzen. Het is echter de vraag of het te verwachten hydrazine, dat niet bekend is, bestaanbaar is onder de aan te wenden omstandigheden en niet ontleed wordt in aethyleendiamine en NH_3: de producten die ook uit het eerste lichaam te verwachten zijn en volgens voorloopige proeven ook werkelijk bij de reductie schijnen te ontstaan. De tweede weg is het onderzoek van het gedrag der methylderivaten van het aethyleencarbamide



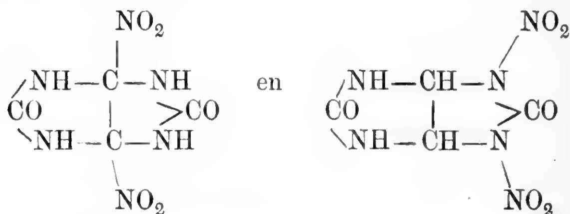
welke beiden onbekend zijn, tegenover salpeterzuur.

Het is tot nog toe niet gelukt deze lichamen te bereiden, ofschoon reeds eene aanwijzing voor de vorming van het eerste verkregen is.

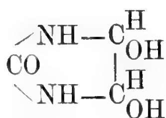
De buitengewone kostbaarheid van het aethyleencarbamide, waarvan aanzienlijke hoeveelheden noodig zouden zijn, deed besluiten eerst met andere lichamen eenige opheldering aan te brengen.

Hiertoe kon zich wellicht het *glycoluril* leenen; dit levert eveneens een dinitroderivaat, dat ongekleurd en onoplosbaar is in de gewone oplosmiddelen. Door koking met water wordt het ontleed, doch behalve één molec. CO_2, ontwikkelen er zich nog twee molec. N_2O en er ontstaat een fraai kristalliseerend lichaam, dat isomeer is met het hydantoïnezuur, en zich, behalve in vorm enz., daarvan onderscheidt in het gedrag met salpeterzuur, waarmede het geen gas ontwikkelt, terwijl hydantoïnezuur dadelijk CO_2 en N_2O levert.

Twee formules kunnen dus weer voor het *dinitroglycoluril* in aanmerking komen



terwijl voor het ontledingsproduct door water deze

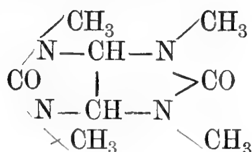


de meest waarschijnlijke kan geacht worden.

Om tusschen de beide formules voor het dinitroglycoluril te kunnen beslissen, werden de methylderivaten van het glycoluril bereid en aan de werking van het salpeterzuur onderworpen.

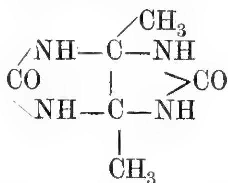
Glycoldimethyluril (uit glyoxaal en monomethylureum) gaf een dinitroderivaat, en wel een wit, in water en alcohol geheel onoplosbaar poeder, dat door koken met water in 't geheel niet veranderd werd.

Glycoltetramethyluril (uit glyoxaal en symetrisch dimethylureum) dus



wordt door salpeterzuur aangetast onder oxydatie; en naar gelang der omstandigheden schijnen er verschillende nitroderivaten uit te ontstaan met geringer C-gehalte.

Dimethylglycoluril (uit diacetyl en ureum)

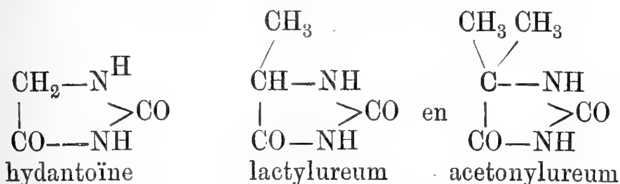


schijnt een nitroderivaat te kunnen geven, zonder dat oxydatieverschijnselen zich daarbij openbaren.

Deze feiten schijnen er voorloopig op te wijzen, dat in de nitroverbindingen dezer ureïden de nitrogroepen zich aan de stikstof bevinden.

Een analoog resultaat werd verkregen bij de tweede soort van ureïden.

Hier werden de drie volgende onderzocht

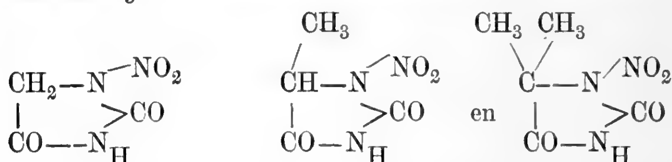


die alle drie een *mono*nitroderivaat geven.

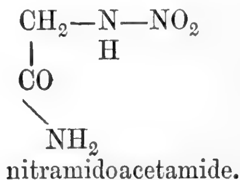
Deze nitroderivaten zijn kleurlooze, goed kristalliseerende lichamen, die door koken met water ontleed worden, ofschoon niet even gemakkelijk. Het *nitrohydantoïne* wordt het moeielijkst door kokend water aangegrepen en geeft daarbij CO_2 af, waarbij op 't laatst eenig N_2O komt; en er blijft een lichaam terug dat, na omkristalliseering uit alcohol, de samenstelling heeft van nitrohydantoïne — $CO + H_2$. Iets gemakkelijker wordt het *nitrolactylureum* ontleed en geeft in den beginne veel meer CO_2 dan N_2O. Ten slotte echter

komt er meer N_2O; zoodat uit één molecuul bijna 1 CO_2 en 1 N_2O ontwikkeld worden. Het residu dat zeer zuur reageert geeft eene reactie op melkzuur met kobaltacetaat. Veel gemakkelijker dan de beide voorgaande wordt het *nitroacetonylureum* door kokend water ontleed en geeft van 't begin af CO_2 en N_2O in bijna gelijke volumina; terwijl er oxyisoboterzuur schijnt gevormd te worden.

Het bestaan van het nitroacetonylureum en de vorming van oxyisoboterzuur er uit kunnen als bewijs dienen dat de groep NO_2 aan de N gebonden is, zoodat dit en vermoedelijk ook de beide andere nitrolichamen *nitro-ureïden* of *nitrureïden* zijn.



Het uit nitrohydantoïne met H_2O verkregen product wordt dan

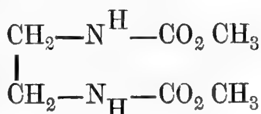


nitramidoacetamide.

Uit de verkregen resultaten, in verband met het feit dat parabaanzuur en cholestrophaan door salpeterzuur niet veranderd worden, kan afgeleid worden dat de groep NH tusschen 2 CO groepen geplaatst in een ring van atomen door salpeterzuur niet aangegrepen wordt, maar dat zij, gebonden aan 1 CO en aan éene koolwaterstofrest, haar H-atoom tegen de groep NO_2 kan inruilen, zoodat ook hier weder de groote invloed der zoogenaamde negatieve groepen op de eigenschappen der verbindingen blijkt. Ook uit de ontleding der verschillende nitro-ureïden met H_2O, zijn omtrent dien invloed belangrijke gevolgtrekkingen te maken.

Bij de bereiding van aethyleencarbamide (uit aethyleendiamine en aethylcarbonaat) werd eens, in plaats van aethyl-

carbonaat, methylcarbonaat genomen, en toen, reeds in de koude, een ander fraai kristalliseerend lichaam verkregen, dat aan deze formule



$$\begin{array}{l} CH_2—N^H—CO_2\,CH_3 \\ | \\ CH_2—N_H—CO_2\,CH_3 \end{array}$$

beantwoordde. Het gaf met salpeterzuur een dinitroderivaat, dat door koken met water niet ontleed werd. Dit gaf aanleiding, den methylamidomierenzuren methylaether te bereiden, die eveneens een nitroderivaat schijnt te geven.

Eenige jaren geleden was de werking van salpeterzuur op symetrisch dimethylureumnitraat onderzocht, en toen was gevonden dat deze zeer langzaam plaats had. Zij werd nu op andere wijze herhaald. Toen nl. de gasontwikkeling begon, werd de oplossing in water gegoten, waarbij zich eene vloeistof afscheidde; deze werd door koken met water ontleed onder ontwikkeling van CO_2. Vermoedelijk is zij dus een *nitrodimethylureum* geweest. Het product, dat door de ontleding met H_2O ontstond en met aether afgezonderd werd, was vloeibaar en vermoedelijk het *monomethylnitramine* $CH_3—N^H—NO_2$. Toen beproefd werd het te distilleeren, ontplofte het met een buitengewoon heftigen knal. Dit onderzoek zal echter worden voortgezet.

— De Heer Schols spreekt over de berekening van de afschuivende krachten en de buigingsmomenten, die bij spoorwegbruggen worden opgewekt door eene belasting bestaande uit locomotieven. De onregelmatige verdeeling van de drukkingen, op de verschillende assen van een locomotief uitgeoefend, maakt die berekening vrij omslachtig. Spreker heeft zich nu ten doel gesteld om na te gaan in hoeverre uit die onregelmatig verdeelde belasting toch eenvoudige formules zijn af te leiden voor de berekening van de genoemde krachten en momenten. Daar men bij de berekening van beiden te maken heeft met de som van de momenten ten opzichte van het steunpunt van de krachten die tusschen dat steunpunt en het beschouwde punt op den ligger werken,

worden die momenten in de eerste plaats beschouwd. Het blijkt nu dat die som van momenten in twee deelen gesplitst kan worden: in een hoofddeel dat door eene eenvoudige formule wordt voorgesteld en in een periodiek gedeelte. Boven het steunpunt bevindt zich namelijk een locomotief die slechts gedeeltelijk op de brug rust; stelt men de lengte van dat gedeelte door c en het moment van de as-drukkingen op dat gedeelte van de brug ten opzichte van het steunpunt door m voor en noemt men Q het gewicht van een locomotief, b haar lengte en b' de afstand van het zwaarte punt tot het midden van de locomotief, dan wordt het periodieke gedeelte van de som der momenten voorgesteld door:

$$m_p = m - \frac{Q}{2\,b}(c^2 + 2\,b'\,c).$$

Dit periodieke gedeelte bevat hoofdzakelijk de onregelmatigheden die voortspruiten uit de onregelmatige verdeeling van de locomotief-belasting, het is betrekkelijk gering en voor het grootste gedeelte negatief. Voor de locomotief, die bij de berekening van de bruggen voor de Staatsspoorwegen als type is voorgeschreven, wisselt de waarde daarvan af tusschen — 24,591 en + 2,058 ton meter.

Beschouwt men nu het geval dat de maximum waarde van de afschuivende kracht V ontstaat wanneer de brug slechts aan eene zijde van het beschouwde punt belast is, in welk geval de voorste locomotief met hare vooras bij dat punt staat, dan vindt voor de berekening daarvan de volgende formule:

$$V\,L = \frac{Q}{2\,b}(X + a)(X + a + 2\,b') + m_p$$

waarin X de lengte van het belaste gedeelte en L de totale lengte van den ligger voorstellen en waarin a de afstand aangeeft van vooras tot voorkant buffer. Daar nu het periodieke gedeelte m_p van het moment klein en meestal negatief is, kan dit ten opzichte van den hoofdterm worden weggelaten en vindt men dus voor de berekening van de afschuivende kracht V de volgende eenvoudige formule:

$$VL = \frac{Q}{2\,b}(X + a)(X + a + 2\,b')$$

waaruit blijkt, dat behalve het gewicht van de locomotief per strekkende eenheid, vooral ook de ligging van het zwaarte punt en de afstand van de vooras tot den voorkant buffer van invloed zijn op de waarde van V.

De hier beschouwde wijze van belasting geeft niet altijd de allergrootste waarde van V; er kunnen zich andere wijzen van belasting voordoen, die eene eenigszins grootere waarde van V opleveren; het verschil is echter steeds gering en kan dus wanneer de lengte L van den ligger niet al te klein is, verwaarloosd worden, te meer daar dit verschil alleen van eenige beteekenis is voor die punten van den ligger waar V zelve eene groote waarde bereikt. Bij de vroeger genoemde locomotief blijft dat verschil beneden de 5 ton.

Maakt men de formule op voor het buigingsmoment in een punt van een ligger op eene afstand X_l van het linker en X_r van het rechter uiteinde, dan kan die onder den volgenden vorm gebracht worden:

$$M = A + B + C$$

$$A = \tfrac{1}{2}\,X_r\,X_l\,\frac{Q}{b} \cdot \frac{L + 4\,b'}{L}$$

$$B = \frac{Q}{2\,b}\,c^2 - m + \frac{Q\,b'\,c}{b} \cdot \frac{X_r - X_l}{L}$$

$$C = \frac{X_l}{L}\,m_r + \frac{X_r}{L}\,m_l,$$

waarin m_r en m_l voorstellen de periodieke gedeelten van de momenten voor de locomotieven, die zich respectievelijk boven het rechter en het linker uiteinde bevinden, en waarin c en m dezelfde beteekenis hebben als boven bij m_p, maar nu betrekking hebben op de locomotief boven het beschouwde punt van den ligger en wel op het deel rechts van dat punt gelegen; de locomotief zelve is ondersteld met het vooreinde naar rechts gekeerd te zijn.

Het eerste gedeelte A is de hoofdterm, en komt overeen met het moment opgewekt door eene gelijkmatig verdeelde belasting, gelijk aan het gewicht van de locomotief per strekkende eenheid vermeerderd in reden van L tot $L + 4\,b'$.

De twee overige deelen hangen naauw samen met het periodieke gedeelte van het moment van de locomotief. De waarde van C zal steeds blijven binnen de grenzen van dat periodieke gedeelte en dus slechts eene kleine positieve waarde kunnen verkrijgen. Het gedeelte B verkrijgt haar grootste waarde voor $X_r = L$, $X_l = 0$ en wordt dan juist gelijk aan het periodieke gedeelte maar met het omgekeerde teeken, zoodat de grootste positieve waarde van B niet grooter kan worden dan de grootste negatieve waarde van het periodieke gedeelte. De waarde van beide termen te zamen kan dus nooit grooter worden dan het verschil van de twee uiterste waarden van het periodieke gedeelte; voor den vroeger genoemden locomotief dus nooit grooter dan $24{,}591 + 2{,}058 = 26{,}649$ ton meter.

Deze grootste waarde zal echter nooit bereikt worden, omdat wanneer B hare grootste waarde bereikt, C juist dezelfde negatieve waarde verkrijgt. Bij eene eenigszins groote brug kan dus het weglaten van de twee termen geen bezwaar opleveren. Ook niet dicht bij de uiteinden alwaar, zooals uit den hoofdterm A blijkt, het moment zelve klein wordt, omdat in dat geval B wel eene groote positieve waarde kan bereiken, maar C dan tevens eene groote negatieve waarde bezit. Het weglaten van beide termen voert tot de eenvoudige uitdrukking:

$$M = \tfrac{1}{2}\, X_r\, X_l\, \frac{Q}{b}\, \frac{L + 4\,b'}{L}.$$

Bestaat de belasting gedeeltelijk uit locomotieven gedeeltelijk uit zwaar beladen goederen-wagens, dan worden de formules natuurlijk iets samengestelder; zij leiden echter eveneens tot eenvoudige eindformules. Stelt men het aantal locomotieven gelijk n en het gewicht der wagens per strekkende eenheid gelijk q dan vindt men voor de berekening van V en M:

$$VL = \frac{1}{2}\, q\,(X + a - n\,b)^2 + n\,Q\,(X + a - \tfrac{1}{2}\,n\,b + b')$$

$$M = \tfrac{1}{2}\, X_r\, X_l \left[q + \frac{2\,n\,(Q - q\,b)}{L} - \frac{n^2 b\,(Q - q\,b) - 4\,n\,Q\,b'}{L^2} \right].$$

De hierbij verwaarloosde termen bereiken ongeveer hetzelfde bedrag als boven voor eene belasting enkel uit locomotieven bestaande is aangegeven. Het weglaten daarvan heeft hier te minder bezwaar, omdat men hier steeds met groote bruggen en dus met groote waarden van V en M te maken heeft.

— De Heer Pekelharing spreekt over woekering van het endothelium in slagaderen.

In de laatste jaren heeft Thoma door een uitgebreid onderzoek aangetoond, dat woekering van het endothelium, 'twelk den wand der slagaderen van binnen bekleedt, bij den mensch niet slechts onder pathologische, maar ook onder normale omstandigheden voorkomt. Zij komt op den voorgrond en vertoont zich duidelijk als ziekelijk verschijnsel bij de chronische endarteriitis, maar zij is evenzeer aan te toonen als een normale verandering, die reeds zeer spoedig na de geboorte begint, in dat gedeelte van de slagaderlijke bloedbaan, 'twelk tusschen den ductus arter. Botalli en de arteriae umbilicales gelegen is. Zoowel onder normale als onder pathologische omstandigheden ontstaat zij dáár, waar de slagader te wijd dreigt te worden of reeds geworden is. Zoo vond Thoma deze woekering ook in de slagaderen van extremiteiten, waarvan een gedeelte geamputeerd was, en wel in de hoofdslagader over haar geheele lengte en in die takken, welker gebied door de amputatie verkleind was, maar niet in de takken, die een ongedeerd stroomgebied behouden hadden. De vermeerdering van het endothelium, die tot woekering van fibrillair bindweefsel leidt, draagt daardoor het karakter van een compenseerende verandering. De vraag, welke de onmiddellijke oorzaak is van deze proliferatie van cellen, wordt door Thoma in dien zin beantwoord, als zou verlangzaming van den bloedstroom daarbij de hoofdrol spelen. Maar hij toont niet aan, dat verlangzaming van den

stroom mag worden aangenomen in al die gevallen, waarin de woekering van endothelium gezien wordt. Wel echter is de drukking, die op het endothelium wordt uitgeoefend, verminderd, ten minste bij het afnemen van de grootte en volkomenheid van de elasticiteit van den slagaderwand, en evenzeer bij de vormverandering van den oorsprong van een slagadertak, waarop door kronkeling van den hoofdstam een trekking wordt uitgeoefend.

Inderdaad is nu gebleken, dat vermindering van de drukking op het endothelium van arteriën tot proliferatie van cellen aanleiding geeft. Wanneer bij konijnen of honden twee gelijknamige slagaderen, beide carotiden of beide arteriae crurales, te gelijker tijd dubbel worden afgesnoerd, en wel zóó dat de eene arterie eerst peripherisch en daarna centraal, en de andere eerst centraal en daarna peripherisch dichtgebonden wordt; dan staat tusschen de twee ligaturen in beide slagaderen het bloed stil, maar in het eerste geval blijven de endotheliumcellen onder een drukking, nagenoeg gelijk aan die, welke zij bij den ongestoorden bloedstroom ondervonden, in het andere daarentegen is de vaatwand geplooid en de drukking op het endothelium veel geringer.

Wanneer nu het dier na één of meer weken gedood wordt, dan kan in de afgesnoerde slagaderen zeer duidelijk woekering van bindweefsel worden aangetoond in de gecollabeerde vaten, terwijl zij in de vaten, die in gespannen toestand gebleven zijn, geheel, of zoo goed als geheel ontbreekt. Dat het nieuw gevormde bindweefsel inderdaad van endothelium afkomstig is, 'twelk in een staat van woekering verkeerde, blijkt hieruit, dat in de eerste week na de afsnoering in het gecollabeerde vat mitosen in de endotheliumcellen aangetroffen worden. De woekering staat met de door het afsnoeren van het vat opgewekte ontsteking in geen verband. Dicht bij de ligaturen vertoont zij zich zoowel in de met, als in de zonder spanning afgesnoerde slagaderen, terwijl zij midden tusschen de een tot twee ctm. van elkaar gelegen ingesnoerde plaatsen in het gerekte vat ontbreekt.

Het schijnt niet wel mogelijk, hier een andere oorzaak voor de vermeerdering der cellen aan te nemen, als vermin-

dering van de drukking. De rekking van den vaatwand, waar de afsnoering eerst peripherisch en daarna centraal plaats had, is door het aanstroomende bloed zelf teweeggebracht, en kan niet van dien aard zijn, dat de voeding daardoor eenige storing van beteekenis ondergaat. Men zou wellicht op deze wijze kunnen redeneeren: De endotheliumcellen worden tot woekering geprikkeld zoodra het bloed stil staat. Maar in het gerekte vat kunnen zij aan die prikkeling geen gehoor geven, omdat de spanning van den wand een krachtigen stroom van het voedingsvocht belet. Zulk een meening echter zal men niet vasthouden, wanneer men denkt aan de hypertrophie der slagaderwanden bij de ontwikkeling van collaterale circulatie, waarmede noodzakelijk vermeerdering van het aantal endotheliumcellen gepaard moet gaan. Men zou dus moeten aannemen, dat in de normale slagader de endotheliumcellen steeds de neiging bezitten tot woekering, maar dat zij daarin door de drukking, waaraan zij blootgesteld zijn, worden tegengehouden.

Bij aderen heeft spreker tot nog toe slechts woekering van endothelium kunnen waarnemen, die met het door de afsnoering opgewekte ontstekingsproces in verband stond. Intusschen zijn de veranderingen van het endothelium in aderen na afsnoering niet voldoende door spreker onderzocht om daarover een goed oordeel te vellen. Slechts wordt er op gewezen, dat er voor het oogenblik geen grond is om voor andere endotheliumcellen als voor die der slagaderen aan te nemen, dat zij door mechanische drukking worden tegengegaan in de neiging tot proliferatie. Ook wijst spreker er op, dat de endotheliumcellen van slagaderen niet enkel door het wegvallen van een weerstand tot woekering geraken, maar ook, naar zijn meening, door irritatie. Immers, in slagaderen, in welker omtrek ontsteking heerscht, kunnen alle stadia van endarteriitis, van kerndeelingsfiguren af tot vorming van fibrillair bindweefsel toe, worden waargenomen. Daar is toch het verminderen van een weerstand, die zich tegen den groei verzet, niet op goede gronden aan te nemen.

— De Heer van der Waals bespreekt den samenhang

tusschen de wijze, waarop de dichtheid verandert in de overgangslaag van vloeistof op damp en de wijze der werking der molekulaire krachten. Dit verband wordt gevonden door toepassing van de stelling, dat de stof zich bij gegeven temperatuur en in gegeven volume aldus schikt, dat de totale vrije energie een minimum is. (Door vrije energie wordt aangeduid de functie, welke GIBBS door ψ heeft voorgesteld).

Noemt men de dichtheid ϱ, en stelt men de LAPLACE'sche coëfficiënten uit de theorie der capillariteit $\int f(x)\, d\, x$ en $\int x f(x)\, d\, x$ door c_0 en c_1 voor — voert men evenzoo in $\int x^2 f(x)\, d\, x$ enz. door de teekens c_2 enz., dan vindt men:

$$2\, \Sigma\, \frac{c_{2n}}{2n\,!} \cdot \frac{d^{2n}\varrho}{dh^{2n}} = f(\varrho) - \text{constante.}$$

De functie $f(\varrho)$ is de thermodynamische potentiaal, beantwoordende aan een gelijkmatige dichtheid ϱ.

Alleen dus als al de LAPLACE'sche coëfficiënten $c_2 \ldots c_{2n}$ gelijk nul zijn, zal de dichtheid discontinue veranderen. Ingeval alleen c_2 nog waarde heeft, of in aanmerking behoeft genomen te worden. is de discussie der differentiaalvergelijking gemakkelijk, en vindt men een zeer eenvoudig beloop van de dichtheidsverandering.

De capillaire constante is dan

$$c_2 \int \left(\frac{d\varrho}{dh}\right)^2 d\, h.$$

wat bij discontinue verandering der dichtheid overgaat in

$$c_1\, \frac{\varrho_1{}^2 - \varrho_2{}^2}{2}.$$

— De Heer FÜRBRINGER biedt, uit naam van den Heer Dr. J. T. OUDEMANS, voor de werken der Akademie eene verhandeling aan, getiteld: »Beiträge zur Kenntniss des

Chiromys madagascariensis". Op verzoek des Voorzitters, zullen de Heeren FÜRBRINGER en HOFFMANN daarover verslag uitbrengen in de volgende vergadering.

— Voor de boekerij der Akademie wordt door den Voorzitter aangeboden een exemplaar van: »Uitkomsten der Rijkswaterpassing, ontworpen en aangevangen door L. COHEN STUART, en voortgezet en voltooid door H. J. VAN DE SANDE BAKHUYZEN en G. VAN DIESEN 1875—1885."

— Daar er verder niets te verhandelen is, wordt de vergadering gesloten.

RAPPORT

OVER DE VERHANDELING VAN DEN HEER

Dr. V. A. JULIUS

OVER DE DUBBELLIJNEN IN DE SPECTRA VAN NATRIUM, MAGNESIUM EN ALUMINIUM.

(Voorgedragen in de vergadering van 26 Mei 1888).

De thans ingediende bijdrage van den Heer Dr. V. A. Julius »*Over de dubbellijnen in de spectra van natrium, magnesium en aluminium*" kan als een naschrift beschouwd worden tot zijne uitvoerige verhandeling »*Over de lineaire spectra der elementen*", waaromtrent de ondergeteekenden in de Maart-vergadering l.l. verslag uitbrachten. Doch zij is meer dan een naschrift; zij bevat eene belangrijke uitbreiding van de theorie des schrijvers omtrent som- en verschiltonen en bevestigt zijn theoretisch onderzoek.

Wanneer tot de primaire trillingen van een atoom een paar behoort, waarvan het verschil gering is en wier trillingen te langzaam zijn om te worden waargenomen, zoo kunnen zij, gevoegd bij de aanwezige trillingen, nieuwe tonen geven; voor iedere toon ontstaan dan twee nieuwe trillingen, die waarneembaar zijn en hetzelfde kleine verschil bezitten. Er treden dus in het spectrum dubbellijnen op van constant verschil. Waren er *drie* zulke primaire trillingen aanwezig, zoo zouden deze, analoog aan de somto-

nen, meerdere identische groepen van drievoudige lijnen in het spectrum doen ontstaan.

Het is daarom van belang, de dubbele en meervoudige lijnen uit dit oogpunt te onderzoeken, wat, daar men de golflengte niet nauwkeurig kent, eene eigenaardige methode met zich brengt, die voldoende wordt uiteengezet.

De schrijver past deze methode toe op de spectra van *vier* elementen: *natrium*, *magnesium*, *aluminium* en *thallium*.

Bij *natrium* zijn de spectraallijnen, op eene enkele uitzondering na, alle dubbellijnen. — Van de erkende 13 dubbellijnen maken er 10 deel uit van dezelfde reeks, daar hunne leden een standvastig trillingsverschil bezitten. Zij kunnen dus als summatielijnen beschouwd worden.

Het *magnesium*-spectrum bevat eene bekende groep van drie lijnen; later bemerkte men, dat deze zich in het violet verscheidene malen herhaalt. De 10 drievoudige lijnen, die in het spectrum voorkomen, schijnen alle tot eene zelfde reeks te behooren; zij zijn dus de summatietonen van drie weinig verschillende primaire trillingen, die zich op verschillende plaatsen van het spectrum herhalen.

Het spectrum van *aluminium* vertoont volgens Cornu 7 dubbellijnen; voor de golflengten van beide leden eener dubbellijn geeft hij empirische formules, doch meer gaf hij niet. Nader blijkt, dat er 11 dubbellijnen zijn en daarbij is geen enkel geval, dat de afwijking hunner trillingen aan het niet constant zijn van het trillingsverschil doet twijfelen. Zij alle behooren dus tot somtonen.

Cornu vond eindelijk in het ultra-violette spectrum van *thallium* eene reeks dubbellijnen en gaf hunne empirische formulen; hierbij is echter geen constant verschil merkbaar. Doet de bijgevoegde afbeelding zulks vermoeden, de rekening bevestigt die meening niet.

Bij de drie eerste elementen wordt de onderstelling, dat men combinatietrillingen waarneemt, door het optreden der meervoudige lijnen bevestigd, welke onderstelling daardoor zeer waarschijnlijk wordt.

De verhandeling van den Heer Julius munt uit door groote duidelijkheid. De Commissie stelt voor haar in de

werken der Akademie op te nemen, liefst als vervolg op de genoemde grootere bijdrage: »*Over de lineaire spectra der elementen*" van denzelfden schrijver.

Amsterdam, 26 Mei 1888.

C. H. C. GRINWIS.
H. A. LORENTZ.

OVER DE

KWANTITATIEVE BEPALING VAN RAFFINOSE.

DOOR

Dr. J. W. GUNNING.

Het is bekend, dat de fiscus in de landen, waar van de suiker accijns wordt geheven, het polarisatiewerktuig aanwendt om het bedrag daarvan te bepalen; evenzeer, dat de uitkomsten van het onderzoek met dit werktuig (de polarisatiepercenten) daartoe in den regel niet ongecorrigeerd worden aangewend (gelijk gesteld met de saccharosepercenten). Meestal worden correctiën voor de invertsuiker en voor de zouten aangebracht. Voor de beetwortelsuiker heeft alleen de laatste beteekenis, de eerste niet, daar dat artikel in den regel vrij van invertsuiker is.

In den laatsten tijd wordt door sommigen nog eene andere correctie geeischt, namelijk voor de raffinose *). Dit bestanddeel verhoogt de rechtsdraaing der suikers of andere

*) Tegenwoordig is vrij algemeen aangenomen, dat raffinose een normaal bestanddeel van den beetwortel is, niet een product der fabrieksbewerkingen. De omstandigheid, dat zij, hoewel op zich zelve zeer goed kristalliseerbaar en minder oplosbaar in water dan saccharose, zich uit eene saccharosehoudende vloeistof moeilijk afscheidt, was oorzaak, dat zij tot dusver in de moederloog der fabrieken, in de melassen, onopgemerkt terugbleef. Uit sterk daarmede belaste melassen zet zij zich soms bij aanzienlijke koude af, en zoo is de raffinose het eerst ontdekt (Loiseau 1876 *Compt. rend.* 82. p. 1058). — De verwerking van melassen door praecipitatie daaruit van de saccharose heeft later de algemeene aandacht op haar gevestigd en tegenwoordig kan bij het onderzoek van elk product der suikerfabriekatie de vraag naar hare aanwezigheid oprijzen.

producten, waarin het voorkomt en het is noodig, dien invloed nauwkeurig te kennen om hem desvereischt in rekening te kunnen brengen. Daarop is de aandacht der scheikundigen, die zich met saccharimetrie bezighouden, sedert geruimen tijd gevestigd, maar tot eene algemeen als juist erkende oplossing van het vraagstuk is men nog niet gekomen. Dit blijkt duidelijk uit de besprekingen, die daarover zijn gehouden in de algemeene vergadering van het »Verein für die Rübenzucker-Industrie in Deutschland" in Mei 1888 te Cassel en die geleid hebben tot het verzoek aan het Bestuur om aan eene Commissie de studie van dit punt op te dragen.

Inmiddels is voor den Duitschen Bond eene nieuwe regeling van den suikeraccijns tot stand gekomen, die in Augustus 1888 wordt ingevoerd en in de daarbij gevoegde instructiën heeft de Administratie den weg voorgeschreven, hoe bij het ondersteldc voorkomen van raffinose in suikerproducten moet worden gehandeld, om de hoeveelheid daarvan te bepalen.

In de onder mijne hoofdleiding staande Rijks-suikerlaboratoria in ons land is dit vraagstuk insgelijks behandeld en, naar ik meen, tot eene voorloopig bevredigende oplossing gebracht, dank zij vooral den ijver en de bekwaamheid van den Heer Jhr. W. Alberda van Ekenstein, die sedert de oprichting als scheikundige aan het Laboratorium te Amsterdam werkzaam is. Inzonderheid na het verschijnen der zoo even genoemde Duitsche instructie acht ik den tijd gekomen, om deze onderzoekingen te publiceeren en daar het een Rijksbelang geldt dat met hulpmiddelen, door het Rijk verschaft, behartigd wordt, schijnt het niet ongepast, daarvoor eene plaats te vragen in de werken van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen.

Het komt mij doelmatig voor, tot het geven van een geregeld overzicht de bedoelde Duitsche instructie als uitgangspunt te nemen. Zij maakt gebruik van het bekende feit, dat saccharose en raffinose o. a. hierin verschillen, dat beider rechtsdraaing in oplossing door zuren vermindert — wat de eerstgenoemde betreft, zelfs in linksdraaing overgaat — en dat deze verandering voor de beide koolhydraten verschil-

lend, maar voor elk hunner bepaald en in voldoende mate constant is. Bij de daardoor ontstaande glycosen hebben wij ons niet op te houden. Alleen zij herinnerd, dat het bedrag van het draaiend vermogen na de inversie bij saccharose en bij raffinose blijkt in niet onbelangrijke mate afhankelijk te zijn van de wijze waarop deze plaats heeft gehad, zoodat het noodig is, daarvoor steeds een bepaald voorschrift in acht te nemen; eveneens, dat de draaing na inversie met de temperatuur in vrij sterke mate varieert, wat, gelijk bekend is, bij de rechtsdraaing der oorspronkelijke koolhydraten, niet merkbaar het geval is, zoodat het noodig is, òf steeds bij eene zelfde temperatuur te polariseeren, òf van eene correctietafel gebruik te maken. Met inachtneming van deze en nog andere voorzorgen, geeft de Duitsche instructie — of Dr. Scheibler, dien wij meenen als den auteur der methode te mogen aanmerken — de volgende formulen:

$$S \text{ (procentisch saccharosegehalte)} = \frac{0.5188\,P - I}{0.845}$$

$$R \text{ (procentisch raffinosegehalte *))} = \frac{P - S}{1.85}$$

waarin P de rechtsdraaing in wateroplossing (normaalgewicht 26,048 gram) en I de polarisatie dierzelfde wateroplossing na inversie, met omgekeerd teeken, beduidt.

Dat de methode zeer goede uitkomsten kan opleveren, wordt in de instructie zelve door eenige voorbeelden gestaafd:

kunstmatige mengsels van		gaven bij onderzoek:	
Saccharose	Raffinose	Saccharose	Raffinose
97.0 pCt	3.0 pCt.	97.02 pCt.	2.98 pCt.
91.0 »	9.0 »	90.99 »	8.95 »
85.0 »	15.0 »	85.06 »	14.97 »

Hoe gunstig deze cijfers ook spreken, Scheibler vertrouwt toch de methode niet geheel en verlangt ze slechts toegepast te zien in de gevallen, waarin de hoeveelheid raffinose meer dan $^1/_3$ pCt. zou bedragen, d. i. wanneer de

*) Hier is de raffinose watervrij bedoeld.

grootheid $P—S$ (het verschil tusschen de rechtstreeksche polarisatie en het met behulp van deze en van de polarisatie na de inversie berekende gehalte aan saccharose) grooter dan 0.6 wordt bevonden *). Hij verzekert trouwens, dat er geene methode ter bepaling van kleinere hoeveelheden raffinose bekend is, en voegt er zelfs als gevolgtrekking bij — wat natuurlijk een lapsus calami is — dat de suikerproducten des handels, indien zij raffinosehoudend zijn, daarvan altijd meer dan $^1/_3$ pCt. bevatten. Het is van het meeste belang, het volkomen onbewezen zijn van deze bewering

---

*) In de gevallen waarin $P—S$ 0,6 of minder bedraagt, moet de expert verklaren: „dat geene raffinose in het onderzochte monster aangetoond kan worden". De instructie zegt zelfs, dat er, zoolang $P—S$ niet het bedrag 1 bereikt, nog onzekerheid blijft, d. i. de uitkomst behoeft dan niet te wijzen op de raffinose, maar kan ook een gevolg zijn van het gebrekkige der methode. Eigenaardig is de wijze, welke in die gevallen voorgeschreven wordt om uit de onzekerheid te geraken. Er wordt dan „aangenomen" dat de „organische niet-suiker", dat is: hetgeen aan 100 ontbreekt, als de percentische gehalten aan asch en water met de polarisatiepercenten worden samengeteld, aan het bedrag der asch zelf gelijk is, alzoo dat, wanneer a de asch en b de vochtigheid in percenten voorstellen

$$P + 2a + b = 100$$

zal moeten wezen. Wanneer nu bij de volledige analyse, welke in die gevallen noodig is, blijkt, dat die grootheid $>$ 100 is, dan bestaat er reden om „te vermoeden", dat P te groot gevonden en dat er dus raffinose aanwezig is; is zij $>$ 100,3 dan bestaat daarvoor „zekerheid", en de hoeveelheid raffinose zou dan zelfs kunnen worden bepaald, waarvoor ook eene formule gegeven wordt. Maar dit is niet de bedoeling dezer „rekenmethode". Zij dient er alleen toe, den scheikundige de vrijheid te geven om, wanneer $P—S$ = of $>$ 0.6 is gevonden, de waarde van $\frac{P—S}{1.85}$ voor R als juist aan te nemen en zij „moet" tot dat doel aangewend worden in die gevallen waar de waarde van $P—S$ tusschen 0.6 en 1 gevonden wordt.

Om mij zooveel noodig te verdedigen, wanneer ik in deze instructie de hoogte geteekend meen te zien, tot waar men het elders heeft gebracht in de kwantitatieve bepaling der raffinose, zij hier herinnerd, dat het met betrekking tot dit punt uit die instructie aangehaalde niet bestemd is voor ambtenaren der Administratie, maar voor de beëedigde handelsscheikundigen, aan wie de Administratie verplicht de analyse *volgens deze voorschriften* op te dragen. Deze handelscheikundigen zijn, gelijk bekend is, in den regel, personen, die hunne opleiding aan de Universiteit hebben genoten.

uit te spreken. Ware zij juist, dan zouden de belastingschuldigen steeds met grond kunnen beweren, dat zij door de Administratie, wanneer deze geene correctie voor de raffinose aanwendt, meer dan 0.5 pCt. te hoog worden aangeslagen.

In de Rijks-suikerlaboratoria wordt, strikt genomen, dezelfde methode van onderzoek, die oorspronkelijk van CREYDT *) is en gevoegelijk de »inversiemethode" heeten kan, gevolgd, maar met belangrijke wijzigingen. Daarnevens wordt in sommige gevallen, doch slechts ter controle, de dusgenaamde slijmzuurmethode gebezigd, die van denzelfden CREYDT afkomstig is en dit tot grondslag heeft: dat raffinose tot de koolhydraten behoort, welke bij behandeling met salpeterzuur het vrij moeilijk oplosbare slijmzuur opleveren, wat met de saccharose niet het geval is, en van dat oxydatieproduct onder bepaalde omstandigheden een vrij constant bedrag oplevert. Voor mengsels van enkel saccharose en raffinose is deze methode ook ons bij herhaling gebleken, zeer geschikt te zijn. Maar tot algemeen gebruik bij het onderzoek der suikerproducten kan zij, in haren tegenwoordigen vorm, om verschillende, thans niet nader te bespreken redenen, niet aanbevolen worden.

Om tot de inversiemethode terug te keeren, het is, na de inzage van het hierboven gegeven tafeltje, dat met een groot aantal er even gunstig voor getuigende gegevens, uit onze Laboratoria afkomstig, vermeerderd zou kunnen worden, volkomen duidelijk, dat zij eene algemeen bruikbare en juiste methode voor de analyse der suikerproducten zijn kan, mits men er in slaagt, door eene voorafgaande behandeling er al de raffinose, met zoo weinig saccharose, uit te trekken, dat de samenstelling van dit mengsel binnen de grenzen valt, tusschen welke de methode bewijsbaar juiste uitkomsten geeft. Slechts zij men er op bedacht, dat de organische niet-suiker nevens raffinose, nog andere bestanddeelen bevat, die het gepolariseerde licht op krachtige en eigenaardige wijze aandoen en de raffinose niet zelden in hoeveel-

---

*) CREYDT, *Vereinszeitschrift*. Bd. XXXVII, 153.

heid overtreffen. Bij het concentreeren van deze laatste moet er dus tegen gewaakt worden dat die niet-suikerbestanddeelen met de raffinose medegaan.

Ziedaar de hoofdlijnen waarlangs het onderzoek in onze Suikerlaboratoria zich heeft bewogen.

Wat het concentreeren van de raffinose aangaat, SCHEIBLER zelf heeft daartoe den weg gewezen, door de aandacht te vestigen op het groote verschil in oplossend vermogen voor saccharose en raffinose, dat aan methylalcohol eigen is. Ziehier bepalingen van den Heer ALBERDA, die dit punt in het licht stellen.

100 cM^3 methylalcohol van de aangewezen sterkte (in volumenprocenten) lossen bij 15^0 van saccharose en van raffinose (deze laatste in gekristalliseerden, waterhoudenden staat) de volgende hoeveelheden op:

Sterkte	Saccharose	Raffinose
100 pCt.	0.3 gram.	10.2 gram *).
95 »		7.5 »
90 »	0.6 »	2.4 »
85 »		1.8 »
80 »	3.8 »	1.8 »
60 »		2.8 »
20 »		5.0 »

Het eigenaardig dalen en weder rijzen van het oplossend

*) Wegens de kostbaarheid van methylalcohol kan ook houtgeest (een aceton-, allylverbindingen en dusgenaamde houtoliën bevattende methylalcohol) voor dit doel in aanmerking komen. Daarom laat ik een tweede tafeltje van den Heer ALBERDA volgen, daarop betrekking hebbende:

Sterkte	Saccharose	Raffinose
watervrij	0.42 gram	3.10 gram
met 5 pCt. water (in vol.)		1.80 "
" 10 " "	2.25 "	0.83 "
" 15 " "		0.75 "
" 20 " "	5.20 "	0.90 "
" 40 " "		1.90 "
" 80 " "		4.00 "

vermogen dezer vloeistoffen bij afnemende sterkte, houde ons niet op *). Wij constateeren slechts het belangrijke verschil en leiden daaruit af, dat zeer sterke methylalcohol, met gedroogde raffinosehoudende suiker geschud, daaruit een mengsel van saccharose en raffinose kan opnemen, waarin deze laatste de overhand heeft. SCHEIBLER zelf heeft hiervan reeds op de volgende wijze partij getrokken: hij verzadigde methylalcohol met saccharose, schudde met eene bepaalde hoeveelheid dezer oplossing, na er het draaiend vermogen van bepaald te hebben, eene bepaalde hoeveelheid der gedroogde suiker en stelde zich nu voor, dat deze laatste hierbij aan het vocht al de daarin bevatte raffinose en niets dan raffinose af zou staan, zoodat de vermeerderde rechtsdraaiing der vloeistof daarvan de maat zijn zoude.

Deze methode heeft SCHEIBLER in 1886 †) aanbevolen, maar haar weder verlaten, na dat hij ingezien had, dat zij om eene, naar 't schijnt, hem onbekend gebleven reden veel te hooge raffinosegehalten deed vinden.

Later heeft de Heer LOTMAN, handelsscheikundige te Amsterdam, in eene circulaire aan den handel bekend gemaakt, dat hij een middel wist om die methode van haar gebreken te ontdoen. Hij had nl. gevonden, dat methylalcohol, met gedroogde suiker geschud en daaruit raffinose opgenomen hebbende, door toevoeging van zooveel mogelijk geconcentreerden loodazijn het geheele opgeloste gehalte aan raffinose weder liet praecipiteeren. Het lag voor de hand, dat hiervan partij kon worden getrokken; polarisatie vóór en na de behandeling met loodazijn zou het bedrag der raffinose kunnen doen kennen.

SCHEIBLER heeft echter verklaard, dat ook deze handelwijze aan groote onnauwkeurigheden onderhevig is en liet zich nog

---

*) Waarschijnlijk onttrekt watervrije methylalcohol aan de gekristalliseerde raffinose het water dat zij bevat en is de watervrije raffinose oplosbaarder in methylalcohol dan de waterhoudende. Hiervoor pleit de volgende proef: eene oplossing van watervrij gemaakte raffinose in watervrijen methylalcohol geeft na toevoeging van $^1/_5$ van haar volumen water onmiddellijk eene overvloedige kristallisatie van waterhoudende raffinose.

†) *Neue Zeitschr. f. Rubz. Ind.*, XVII. blz. 233.

onlangs over de aanwending van methylalcohol tot het beoogde doel uit als over een wel veel belovend middel, maar voor welks toepassing nog vele experimenteele onderzoekingen vereischt zouden worden *).

Het is de bizondere verdienste van den Heer ALBERDA, te hebben aangetoond, dat en waarom de methoden van SCHEIBLER en van LOTMAN niet tot het beoogde doel kunnen leiden en daarmede baande hij tevens den weg tot de juiste wijze van aanwending van den methylalcohol.

De zaak is deze. Methylalcohol lost uit suikers niet slechts raffinose op, maar ook het grootste deel — en bij aanwezigheid van eenig water zelfs het geheele bedrag — der stroopbestanddeelen. Onbekend was dit feit niet. De Amerikaansche scheikundige CASAMAJOR heeft er reeds voor jaren gebruik van willen maken tot bepaling van de saccharose in ruwsuikers †) en er zijn ook patenten opgenomen voor het zuiveren van deze in het groot. — ALBERDA vond, dat afgewerkte beetwortelmelasse, met zand gemengd en sterk gedroogd, zich in watervrijen methylalcohol tot de helft van zijn gewicht oplost; dat melasse, met zijn eigen gewicht aan water verdund, in elke verhouding met methylalcohol kan worden vermengd, zonder dat er iets anders praecipiteert dan dextran, pektinlichamen en soortgelijke stoffen, benevens kaliumsulfaat, wanneer het in genoegzame hoeveelheid aanwezig is. — Suikerproducten van eenigzins hooge gehalten en goed gekristalliseerd, kunnen door ééne enkele afwassching met methylalcohol geheel van hun stroopgehalte bevrijd worden en laten een suiker terug, die boven 99 polariseert, terwijl het aschgehalte daalt van b.v. 1 tot 0.1 pCt. Lagere producten laten zich echter niet op die wijze onmiddellijk van hun stroopgehalte ontdoen; dit gelukt eerst na ze drie of viermaal stoffijn gewreven en met verschen methylalcohol behandeld te hebben §).

---

*) *Deutsche Zucker-Industrie.* XIII, N°. 24 (Mei 1888).

†) CASAMAJOR. *Journ. of the Amer. Soc.,* Vol. I.

§) De aanwijzing is belangrijk, daar zij de van verschillende zijden

Ook de chemische verbindingen van citroenzure, wijnsteenzure, appelzure, barnsteenzure, glutaminzure, asparaginezure, azijnzure en mierezure alkalizouten met saccharose, wier bereiding door mij beschreven is in *Tijdschrift van Nijverheid*, Dl. XVI, St. 3 (1875) gedragen zich tegenover methylalcohol en tegenover houtgeest juist zooals de natuurlijke stroopen. Hetzelfde geldt van invertsuiker, van tarwestroop en dergelijke producten (met uitzondering natuurlijk van hare dextrineachtige bestanddeelen), en dus ook van de exotische melassen, zoodat ook rietsuikers zich tegenover deze vloeistoffen evenzoo gedragen als die van beetwortel.

Het is derhalve duidelijk, dat het onderzoek met het polarisatiewerktuig van een met saccharose verzadigden hoogpercentigen methylalcohol, vóór en nadat men dien met gedroogde suiker heeft geschud, gelijk SCHEIBLER's voorstel luidde, dáárom niet tot bepaling der raffinose leiden kan, omdat, behalve raffinose, ook nog saccharose in den vorm van stroop en bovendien nog allerlei bestanddeelen, die invloed kunnen hebben op gepolariseerd licht, in de waschvloeistof worden opgelost. Voor zoover men aan de alzoo verkregen uitkomsten beteekenis heeft gehecht, vloeit er uit voort,

---

geopperde onderstelling schijnt te bevestigen, dat slechts de goedgevormde en geïsoleerde suikerkristallen, al zijn zij ook klein, door uitwassching vrij van moederloog te verkrijgen zijn, maar dat dit met de conglomeraten, waaruit de naproducten bestaan, niet meer het geval is. Het is eene reden, waarom men op uitwaschstelsels, zooals zij tot dusver voor saccharimetrische doeleinden zijn aanbevolen, alleen bij de hoogere producten vertrouwen kan stellen.

Mochten zoodanige stelsels weder eens in aanmerking komen, — wat zeer wel het geval wezen kan — dan zal het geraden zijn, voor waschvloeistof in plaats van aethylalcohol, methylalcohol te nemen.

De toevoeging van eenig azijnzuur maakt ook bij de lagere producten de oplossing van de stroopbestanddeelen sneller en volkomener. Overigens meent de Heer ALBERDA bemerkt te hebben, dat zoowel aethyl- als methylalcohol, azijnzuurhoudend en met saccharose verzadigd, na stroopbestanddeelen opgenomen te hebben, bij aanraking met saccharose van deze opnieuw eene, zij het dan ook geringe, hoeveelheid, oplossen kan, iets wat, indien het nader wordt bevestigd, zou bewijzen, dat de stroopvormende zouten, als kaliumacetaat enz., in alcoholische oplossing meer saccharose kunnen binden, dan in waterige.

dat het raffinosegehalte ook der betere suikerproducten in den regel veel te hoog is geschat.

In hoogpercentigen methylalcohol, die met ruwsuiker is geschud en nevens raffinose en saccharose in vrijen toestand, ook saccharose in verbindingen met organischzure alcalizouten en waarschijnlijk nog andere organische stoffen bevat, brengt zooveel mogelijk geconcentreerde loodazijn een praecipitaat te weeg, dat van zeer complexen aard is. Het bevat stellig, indien genoeg loodzout is toegevoegd, *al* de raffinose; de afscheiding van deze uit soortgelijke vloeistoffen laat niets te wenschen over en in zoover was de gedachte, die ten grondslag ligt aan Lotman's wijziging van Scheibler's waschmethode niet onjuist. Maar onjuist is de meening, dat het loodzout aan de vloeistof geene andere het gepolariseerde licht aandoende stoffen ontneemt, dan raffinose. Niet slechts wordt ook bijna al de organische niet-suiker (bepaaldelijk de organische zuren) mede neergeslagen, maar ook eene aanzienlijke hoeveelheid saccharose zelf. De mede neergeslagen hoeveelheid saccharose kan, gelijk bij onderzoek gebleken is, in genoegzaam watervrije oplossingen, tienmaal die der raffinose bedragen. — Zeer aanzienlijk is echter de invloed, die de verdunning met water, vóór de praecipitatie met loodazijn, op de samenstelling van het neerslag heeft. De hoeveelheid gepraecipiteerde saccharose vermindert dan met het watergehalte der vloeistof. In methylalcohol van 95 pCt. is de verhouding tusschen saccharose en raffinose in het neerslag ongeveer 5 : 1, in methylalcohol van 90 pCt. ongeveer 3 : 1. Bij verdere verdunning wordt ook het raffinosegehalte van het praecipitaat geringer, in methylalcohol van 80 pCt. heeft geene volledige praecipitatie van raffinose meer plaats en in methylalcohol van 70 pCt. wordt geen spoor meer, noch van saccharose, noch van raffinose, door loodazijn nedergeslagen. Talrijke onderzoekingen zijn in het werk gesteld om, zoo mogelijk, een grens te vinden, waar raffinose zonder saccharose werd neergeslagen, maar zonder gevolg. Doch al ware de uitkomst anders geweest, de methode van Lotman had daarmede niet gered kunnen worden. Want, in welke verdunning ook het praecipitaat ontsta, het blijft de draaiende organische

zuren bevatten en in geen geval kan derhalve het rotatievermogen der oplossing door loodazijn alleen met het aandeel, dat de raffinose daarin heeft, worden verminderd.

De gemaakte ervaringen toonden echter duidelijk den weg langs welken het beoogde doel kon worden bereikt. De behandeling der gedroogde suikers met zooveel mogelijk watervrijen methylalcohol of dito houtgeest leidt tot het verkrijgen van eene vloeistof, wier rotatievermogen van complexen oorsprong is. Dit wordt daarom ook niet bepaald, dan nadat: 1° de vloeistof met zooveel water is verdund, tot dat het alcoholische oplosmiddel eene sterkte heeft van 60 à 70 pCt. en 2° in dien toestand door loodazijn van de daarmede praecipiteerbare stoffen is bevrijd. De nu overblijvende vloeistof dankt haar rotatievermogen zoo goed als uitsluitend aan saccharose en aan raffinose, en de betrekkelijke hoeveelheden van dezen laten zich thans nauwkeurig door de inversiemethode bepalen. Daar de handelwijze toelaat, groote hoeveelheden suiker aan de proef te onderwerpen is het niet moeilijk, ook bij de hoogere producten, nauwkeurig na te gaan of en hoeveel raffinose zij bevatten. Opzettelijk daartoe ingerichte proeven hebben geleerd, dat men met zekerheid in die suikers 0.05 pCt. raffinose, indien zij aanwezig is, kan aantoonen *).

---

*) Noodzakelijk voor den scheikundige, die deze opgave zou willen controleeren door de analyse van synthetische mengsels van zuivere saccharose en raffinose, is de opmerking, dat zoodanig mengsel aan methylalcohol de raffinose vooral dan gemakkelijk afstaat wanneer het oplosmiddel eenig kaliumacetaat of ander stroopvormend zout bevat. Raffinose vormt nog gemakkelijker dan saccharose met kaliumacetaat enz. stroopen (op de wijze zooals door mij is aangegeven, zie blz. 185) en deze faculteit schijnt een bevorderende factor te zijn bij het scheiden van raffinose en saccharose door methylalcohol.

De suikers van den handel bevatten in den regel genoeg stroopvormende zouten om de oplossing der raffinose zonder toevoeging van kaliumacetaat te verzekeren. Alkalische suikers moeten echter vooraf met azijnzuur (of nog bete. met aluin) worden geneutraliseerd. Deze ervaringen ondersteunen de opvatting, dat het bij de vaste zonder melasseverwerking verkregen suikerproducten de stroop is, die de raffinose bevat, niet de suikerkristallen zelve. De eindbeslissing hieromtrent wordt echter nog

Er is reeds medegedeeld, dat van de lagere suikers (de naproducten) het raffinosegehalte niet door eene eenvoudige wassching met methylalcohol of houtgeest, ook niet na toevoeging van azijnzuur of kaliumacetaat, geheel en in korten tijd in oplossing kan worden gebracht *).

Dit gelukt echter met zekerheid wanneer zoodanige suiker in een weinig water wordt opgelost, en deze oplossing met eene overvloedige hoeveelheid van de bedoelde vloeistoffen wordt vermengd. Na eenigen tijd — indien men haar met eenige suikerkristallen in een gesloten vat schudt, zelfs in ongeveer één uur — kristalliseert dan ten minste $^{4}/_{5}$ van de voorhanden saccharose uit en laat al de raffinose in de oplossing, die vervolgens tot bepaling daarvan op dezelfde wijze wordt behandeld als de vloeistof, verkregen bij de hoogere suikers. Proeven met synthetische mengsels van saccharose, raffinose en kaliumacetaat (voor de stroopvorming), waarbij 50 gram van het mengsel aan de proef werden onderworpen, bewezen, dat de nauwkeurigheid hier gerust op 0.1 pCt. mag worden gesteld.

Bij melassen is concentratie van het raffinosegehalte op deze wijze niet mogelijk, daar zij zelve, gelijk reeds vroeger is opgemerkt, na toevoeging van eenig water in elke verhouding in methylalcohol of houtgeest oplosbaar zijn (op dextran, galactan en soortgelijke stoffen, alsmede eventueel op kaliumsulfaat na). Er blijft dan niet anders over, dan op die oplossingen in methylalcohol de zuivering met loodazijn en daarna de inversiemethode toe te passen.

De nauwkeurigheid, waarmede de bepaling van raffinose in de natuurlijke melassen kan geschieden, mag op 0.2 pCt. worden geschat.

---

eenigzins belemmerd door de moeilijkheid, die de kwalitatieve erkenning van zeer kleine hoeveelheden raffinose in ruwsuikers aankleeft.

*) Als voorbeeld (uit zeer vele onzer proeven) wordt hier aangehaald een STEFFEN' suiker 4e product, die bij de behandeling, in den tekst aangegeven, bleek 3.23 pCt. raffinose te bevatten, en bij de eerste behandeling met de waschvloeistof daarvan 2.1, bij de tweede 0.7, bij de derde 0.3 en bij de vierde 0.1 pCt. opleverde.

In het voorgaande is de wordingsgeschiedenis dezer raffinosebepaling in de hoofdtrekken beschreven, terwijl in eene bijlage de nadere voorschriften voor de uitvoering worden medegedeeld.

Het is hier de plaats niet, om de resultaten, waartoe het onderzoek naar het raffinosegehalte der handelsuikers heeft geleid, mede te deelen. Het is echter niet overbodig te verklaren, dat er geene reden bestaat, om bij het saccharimetrisch onderzoek nog eene correctie voor een mogelijk gehalte aan raffinose aan te brengen dan alleen bij de slechts zelden voorkomende spitse suikers, bij welke de afwezigheid van raffinose zich reeds op het oog door dien gewijzigde kristalvorm openbaart.

Ik laat nu nog eenige kritische opmerkingen betreffende het onderwerp volgen, in de eerste plaats ten aanzien van de door loodazijn praecipiteerbare bestanddeelen der organische niet-suiker.

Herinnerd worde, dat deze stoffen bij het gewone saccharimetrisch onderzoek uit de wateroplossing door loodazijn worden neergeslagen en dat de hoeveelheid daarvan, die tengevolge van de onvolkomen praecipitatie in die vloeistof kan verblijven, te klein is om het resultaat der polarisatie te storen. Dit is gebleken door het onderzoek van die praecipitaten zelve; na ontleding met zwavelwaterstof enz, leveren zij eene vloeistof op, wier invloed op het gepolariseerde licht slechts merkbaar gemaakt kan worden door haar vele malen geconcentreerder te nemen, dan correspondeert met de sterkte der oplossing, waarin de ruwe suiker aan het gewone onderzoek in het polarisatiewerktuig onderworpen wordt.

Het raffinoseonderzoek verschilt echter van het gewone in drie, hier in aanmerking komende punten: 1°. de vloeistof is (bij de rechtstreeksche polarisatie) niet water, maar methylalcohol; 2°. het is een concentratiesysteem, ook voor de organische niet-suiker; en 3°. bij het gewone saccharimetrische onderzoek heeft geene inversie plaats.

Over elk dezer drie punten een woord.

Wat het eerste betreft, zij opgemerkt, dat het natuurlijk noopt tot grootere voorzorgen tegen verdamping, die zich

echter van zelf aanwijzen en geene moeilijkheid van belang kunnen baren. Maar iets anders is de invloed, dien het oplosmiddel heeft op de draaing. Oplossingen van saccharose en van raffinose in houtgeest, draaien iets sterker dan die in water. Het verschil is door den Heer ALBERDA bepaald en gevonden:

$[\alpha]_D$ voor saccharose	in houtgeest	68.0,	in water		66.6
» » » raffinose	» »	105.5,	»	»	104.4

de houtgeest was van 65 en 70 pCt. zooals die in toepassing komt, en de verschillen zijn constant bevonden voor oplossingen van 2 tot en met 16 pCt.

Ten aanzien van het tweede punt zij opgemerkt, dat de hoeveelheid organische niet-suiker, aanwezig in de oplossingen bij het raffinose-onderzoek van vaste suikers, ongeveer viermaal zooveel zal bedragen, als bij de gewone polarisatie; bij het onderzoek van stroopen bestaat er geen verschil. Daartegenover staat, dat de praecipitatie dezer stoffen met loodazijn in methylalcoholoplossing veel vollediger plaats heeft dan in waterige *) en dat de oplosbaarheid van het neêrslag in een overmaat van loodazijn bij de eerstgenoemde veel geringer is dan bij de laatste. Hieruit mag worden afgeleid, dat, ofschoon men in beide gevallen de volkomen zekerheid mist, dat alle draaiende niet-suikerbestanddeelen door loodazijn worden afgescheiden, hieraan met betrekking tot de polarisatie vóór inversie bij het raffinose onderzoek nog minder bedenkingen kunnen worden ontleend dan ten aanzien van het gewone onderzoek in wateroplossingen. — Anders is het evenwel gelegen met de polarisatie na inversie. Dit brengt ons tot het

Derde punt. De polarisatie na inversie brengt, als zij voor het saccharimetrisch onderzoek noodig is, een factor van onzekerheid mede. Niet alleen door de reeds gememoreerde afhankelijkheid der draaing van de wijze van inversie en door

*) Eene wateroplossing van lage producten (16.26 gr. op 100 cM^3), met loodazijn zooveel mogelijk uitgepraecipiteerd, geeft, na filtratie, met methylalcohol een nieuw praecipitaat van loodzouten.

hare veranderlijkheid met de temperatuur, maar ook omdat, indien er na de praecipitatie met loodazijn nog organische niet-suiker mocht overgebleven zijn, deze, zoo zij niet reeds op zich zelve draaiend is, in den regel door de inwerking van het zuur in stoffen overgaat, die een merkbaar draaiend vermogen hebben *).

Hier zij tevens herinnerd aan de mogelijkheid, dat dextran, galactan †) pektinlichamen en soortgelijke, benevens saccharine en saccharinezure verbindingen, die alle draaiend vermogen bezitten, in beetwortelsuiker voorkomen §). Deze laatste zouden vooral te vreezen zijn. Saccharine heeft een sterk rechtsdraaiend vermogen, bijna 1.5 maal dat van saccharose, en wordt, ook in alcoholische oplossingen, niet door loodzouten nedergeslagen Doch men bedenke: 1°. dat saccharine in invertsuikervrije beetwortelsuikers hoogst waarschijnlijk niet voorkomt en dat, mocht dit het geval wezen, zij moeilijk anders dan in den vorm van saccharinezure zouten aanwezig zijn kan. Deze nu worden, naar Degener's eigen onderzoekingen, door loodazijn wel nedergeslagen, ofschoon, volgens Alberda's ondervinding, niet volkomen, terwijl het neerslag in alcoholische oplossingen in overmaat van het praecipiteermiddel tamelijk oplosbaar is.

Dextran, galactan en soortgelijken zijn bij het raffinose-onderzoek, tengevolge der behandeling met methylalcohol of met houtgeest, geheel buitengesloten.

Nog zouden bedenkingen ontleend kunnen worden aan de beweringen van Leplay en Maumené omtrent inactieve saccharose, die door zuren actief zou worden. Maar die beweringen hebben tot dusver bij andere scheikundigen, die er zich mede hebben beziggehouden, niets dan tegenspraak ontmoet.

Dit alles overziende kan moeilijk worden ontkend, dat

---

*) Onze ondervinding is deze: de praecipitaten met loodazijn geven na behandeling met H^2S in zwak azijnzure oplossing òf geene òf eene hoogst geringe linksdraaing, die echter door de inversie in eene veel sterker rechtsdraaing overgaat.

†) Zie Degener, *Vereins. Zeitschrift.* N°. 35, pag. 121.

§) Lippman B. B. XX. 1001.

eene kwalitatief en kwantitatief zékere methode om de raffinose als zoodanig af te scheiden *) de voorkeur zou verdienen boven deze en elke andere, die het vinden en bepalen van dat bestanddeel uitsluitend afhankelijk maakt van het kwantitatieve verschil, dat eene, enkel saccharose houdende, oplossing vóór en na inversie aanbiedt met de oplossing der te onderzoeken suiker vóór en na inversie. Voor de zekerheid, die verlangd wordt, komt er hier alles op aan, in hoever men er in slaagt, het objekt van het onderzoek door zuiveringsmiddelen te doen naderen tot een mengsel van enkel saccharose en raffinose. Daarvoor nu kunnen geen volkomen afdoende kenteekenen worden aangegeven.

Dit is en blijft een bezwaar maar het weegt bij onze methode stellig veel minder dan bij eenige andere. Het gebruik van methylalcohol of van houtgeest heeft ten gevolge dat veel zuiverder vloeistoffen aan de inversie worden onderworpen dan bij de overige methoden, bepaaldelijk bij die van de duitsche instructie, waar de inversie plaats grijpt met de zelfs niet door loodazijn gezuiverde oplossing †).

Voorts wensch ik nog een oogenblik stil te staan bij de formule voor de berekening, die door ons wordt aangewend. Noemt men:

*) De hoop bestaat nog, dat de praecipitatie der raffinose door loodazijn in methylalcohol- oplossing daaraan dienstbaar gemaakt zal kunnen worden, gelijk zij misschien ook zal kunnen dienen om de raffinose rechtstreeks in den beetwortel (en in rietsuiker) aan te wijzen en kwantitatief te bepalen.

†) Er mag nog op worden gewezen, dat de met loodazijn uitgepraecipiteerde houtgeest-oplossing na de inversie in den regel zonder verdere voorbereiding in het polarisatieapparaat kan worden onderzocht. De geïnverteerde wateroplossing is, zelfs als behandeling met loodazijn is voorafgegaan (in de duitsche instructie wordt dit niet eens voorgeschreven), gewoonlijk zoo donker gekleurd, dat dit onderzoek zonder gedeeltelijke ontkleuring met kool onuitvoerbaar is, waardoor een nieuwe reden van onzekerheid wordt ingevoerd. Kool toch (uitgewasschen beenkool) absorbeert, gelijk opzettelijke proeven ons hebben geleerd, eene merkbare hoeveelheid suiker, zoodra zij in grooter hoeveelheid dan van één gram wordt aangewend.

x het aantal grammen saccharose op 100 cM^3 der vloeistof;

y het aantal grammen raffinose in dezelfde hoeveelheid vloeistof;

P de polarisatie vóór inversie;

p de polarisatie na inversie

en t de temperatuur van het vocht bij de bepaling van p, dan hebben wij:

$$102\,x + 158.4\,y = 16.26\,P$$

en

$$-(44 - {}^1/_2\,t) + (75 + {}^1/_4\,t)\,y = 16.26\,p$$

Hierbij zij herinnerd dat het apparaat van LAURENT gebruikelijk is waarin 16.26 saccharose, in water tot 100 cM^3 opgelost, 100 polarisatie geven; 16.26 raffinose (waterhoudende) geven op dezelfde wijze 157. Omtrent de verandering van 100 en van 157 in 102 en 158.4, zie blz. 190. Bij 20^0 C. geven 16.26 saccharose na onze wijze van inversie — 34; 16.26 raffinose + 80. Deze beide cijfers varieeren, naar eigen onderzoekingen, gelijkmatig met de temperatuur tot het bedrag, in de vergelijking aangegeven, zoodat p bij 0^0 voor saccharose is 44, voor raffinose 75.

In den vorm der Duitsche vergelijkingen gebracht en onderstellend, dat de P in wateroplossing wordt bepaald, worden de onze:

$$S = \frac{0.51\ P - p}{0.85} \quad \text{en} \quad R = \frac{P - S}{1.57}.$$

De Duitsche formulen zijn echter berekend op watervrije raffinose, omgerekend tot waterhoudende, worden zij:

$$S = \frac{0.5189\,P - p}{0.8459} \quad \text{en} \quad R = \frac{P - S}{1.57}.$$

Creydt's constanten komen met deze nagenoeg overeen. Zijne vergelijkingen zijn:

$$S = \frac{0.5135\,P - p}{0.829}. \quad R = \frac{P - S}{1.57}.$$

Ten slotte nog een woord over het onderzoek der invertsuikerhoudende suikerproducten. Dat daarover tot dusver het stilzwijgen is bewaard, heeft zijn grond hierin, dat geene inversiemethode met eenige zekerheid kan worden toegepast op suikerproducten die invertsuiker bevatten, tenzij de hoeveelheid van deze zoo gering zij, dat zij in elk opzicht verwaarloosd kan worden. Dit moge misschien het geval zijn bij sommige der enkele malen voorkomende invertsuikerhoudende beetwortelproducten, de koloniale suiker is van deze onderzoekingswijze ten eenenmale uitgesloten, omdat voor de polarisatie van de daarin bevatte invertsuiker, zoowel vóór als na de inversie, geene ook maar eenigermate betrouwbare cijfers zijn op te geven. De kwestie van het voorkomen van raffinose in rietsuikerproducten is daarom nog geheel open.

Bijlage.

OMSCHRIJVING VAN DE METHODE VOOR RAFFINOSE-BEPALING IN RUWSUIKERS EN STROOPEN, AFKOMSTIG VAN BEETWORTEL.

Hoogpercentige ruwsuiker. 100 gram ruwsuiker wordt gebracht in een nauwmondsstopflesch van ca. 250 cM^3 inhoud en gedurende eenigen tijd geschud met 150 c. c. houtgeest (van den handel), waaraan eventueel zooveel oplossing van kali aluin is toegevoegd als noodig is om de alkaliteit van de suiker te neutraliseeren. Daarna filtreert men 100 cM^3 van de vloeistof in een wijdhalzig kolfje van 100 cM^3 en destilleert hiervan 40 cM^3 af. Bij de overgebleven vloeistof voegt men weder 20 cM^3 water, vervolgens zooveel loodazijn, tot er zich geen p. p. meer vormt, daarna eenig geprecipiteerd aluinaardehydraat, vult met water aan tot de deelstreep, schudt de vloeistof goed dooreen, filtreert in zooveel mogelijk gesloten toestellen en polariseert.

Van deze polarisatie-vloeistof wordt tegelijkertijd 50 cM^3 ingedampt tot de alkohol verwijderd is; de overgebleven vloeistof brengt men met water terug op 50 cM^3, voegt 5 cM^3 zoutzuur van ca. 36 pCt. HCl toe en inverteert nu gedurende 10 minuten bij 68° C., koelt af tot $\pm$ 20° en polariseert deze vloeistof, zooals ze daar is, in een glazen buis van 22 cM. Het gewicht der gevonden hoeveelheid raffinose in grammen moet in dit geval met $1^1/_2$ vermenigvuldigd worden om het percentisch bedrag te vinden.

Laagpercentige ruwsuikers. 30 gram van de te onderzoeken ruwsuiker wordt gebracht in een kolfje van 150 cM^3 en overgoten met, al naarmate de hoeveelheid stroop, in de ruwsuiker voorhanden, 6—9 cM^3 water, waaraan zooveel kali-aluin is toegevoegd als noodig is om de alkaliteit van de suiker te neutraliseeren.

Nu wordt de suiker onder zachte verwarming hierin opgelost en bij de nog heete vloeistof kleine hoeveelheden houtgeest gevoegd onder voortdurend dooreenschudden. Daarna wordt de vloeistof afgekoeld, en de kolf tot de deelstreep met houtgeest aangevuld.

Na een weinig poedersuiker in de kolf te hebben gebracht, wordt zij gedurende een uur in schuddende beweging gehouden en daarna opnieuw tot de deelstreep aangevuld. Met 100 cM^3 van de gefiltreerde vloeistof wordt gehandeld als bij de hoog percentige suiker is beschre-

ven. Bij de berekening van het percentisch raffinosegehalte dient men rekening te houden met het volumen dat de uitgekristalliseerde suiker inneemt, hetgeen geschieden kan, door de uitkomsten met 0,88 à 0,92 te vermenigvuldigen.

De gevonden hoeveelheid raffinose wordt tot het vinden van het percentisch bedrag vermenigvuldigd met 5.

Stroopen. Men weegt 12 gram van deze af in een kolfje van 150 cM^3, voegt 12 cM^3 water toe met zooveel kali-aluin als noodig is om de alkaliteit van de stroop te neutraliseeren, lost de stroop hierin op en vult daarna de kolf aan met methylalcohol tot de deelstreep. De goed dooreengeschudde vloeistof wordt gefiltreerd en met 100 cM^3 van dit filtraat gehandeld als bij de ruwsuiker is beschreven.

De gevonden hoeveelheid raffinose wordt tot het vinden van het percentisch gehalte vermenigvuldigd met 100 en gedeeld door 8.

Bij bovenbeschreven bepalingen is gebruik gemaakt van kali-aluin voor het neutraliseeren, omdat de daardoor ontstane zwavelzure zouten bij hunne praecipitatie met methylalcohol veel kleurstof meêslepen.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 30 Juni 1888.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DER WAALS, Ondervoorzitter, ENGELMANN, MARTIN, HOFFMANN, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, BIERENS DE HAAN, PLACE, HUBRECHT, FÜRBRINGER, RAUWENHOFF, BUYS BALLOT, ZEEMAN, VAN BEMMELEN, MULDER, BEYERINCK, RIJKE, J. A. C. OUDEMANS, MAC GILLAVRY, VAN DIESEN, PEKELHARING, VAN RIEMSDIJK, MICHAËLIS, FORSTER, STOKVIS en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1°. G. C. W. BOHNENSIEG, Conservator van de Bibliotheek van Teyler's Stichting te Haarlem, 28 April 1888; 2°. G. J. W. BREMER, Secretaris van het Bataafsch Genootschap der proefondervindelijke Wijsbegeerte te Rotterdam, 29 Mei 1888; 3°. P. G. TAIT, Secretaris der royal Society te Edinburg, 7 Juni 1888; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1°. GUYE, Redacteur van het Nederlandsch Tijdschrift voor

Geneeskunde te Amsterdam, 29 Mei 1888; 2°. den Directeur der Service de la Statistique générale de Belgique te Brussel, 19 Mei 1888; 3°. A. AUWERS, Voorzitter der Commission für die Beobachtung des Venus-Durchgangs te Berlijn, Mei 1888; 4°. HETTNER, Secretaris der Gesellschaft für nützliche Forschungen te Trier, 7 Mei 1888; 5°. den Directeur van het Musée public te Moscou, 11 Juni 1888; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behooren: 1°. een brief van den Hoogleeraar KEKULÉ te Bonn (11 Juni 1888), waarin dank betuigd wordt voor zijne benoeming tot buitenlandsch lid der Akademie; 2°. de kennisgeving van Mevr. de Wed. Mr. C. VOSMAER, geb. CLANT, van het overlijden van haren echtgenoot, lid der Akademie. Zij zal met een adres van rouwbeklag worden beantwoord; 3°. de mededeeling van den Heer DONDERS, dat hij den 27sten Mei ll. den 70-jarigen leeftijd bereikte; 4°. kennisgevingen van de Heeren VAN DE SANDE BAKHUYZEN, HOOGEWERFF, HOEK en SCHOLS, dat zij verhinderd werden de vergadering bij te wonen; 5°. een brief van den Heer H. P. J. MOONEN te VENLO (23 Juni 1888) ter begeleiding van een opstel, getiteld: »Iets over geluidgolven". De schrijver wenschte het door de Akademie beoordeeld te zien. — De Voorzitter draagt deze taak op aan de Heeren GRINWIS en LORENTZ; 6°. een brief van den Heer Dr. G SCHOUTEN, leeraar aan de H. B. S. te Amsterdam, ter begeleiding van eene verhandeling, getiteld: »Algemeene eigenschappen van de zuiver rollende beweging van een omwentelingslichaam op een horizontaal vlak, toegepast op de beweging van een omwentelingslichaam om een vast punt van zijne as", die hij gaarne in de werken der Akademie wenschte opgenomen te zien. — Als rapporteurs over dezen arbeid worden benoemd de Heeren KORTEWEG en SCHOLS.

— Het rapport van de Heeren BIERENS DE HAAN en VAN DEN BERG over de verhandeling van den Heer Dr. JAN DE VRIES (Over de harmonische configuratie 24_3, 18_4), en dat van de Heeren FÜRBRINGER en HOFFMANN over de verhandeling

van den Heer Dr. J. T. Oudemans (Beiträge zur Kenntniss des Chiromys madagascariensis) luidt gunstig. De conclusie om beide verhandelingen op te nemen in de werken der Akademie wordt zonder discusie aangenomen.

— De Heeren van der Waals en Bosscha, rapporteurs over het opstel van den Heer Dr. P. H. Dojes (Over de vermindering der maximale spanning van een damp en daarmede samenhangende verschijnselen) stellen voor, dit opstel wel voor de Verslagen en Mededeelingen te bestemmen, maar den Heer Dojes vooraf kennis te doen nemen van hun verslag, opdat hij met de Commissie in overleg zou kunnen treden over aan te brengen verbeteringen. — Deze conclusie wordt aangenomen.

— De Heer van der Waals, zich grondende op de beschouwingen van Gibbs, toont aan dat de voorwaarden, waaraan voldaan moet worden als een gegeven stof zich bij gegeven temperatuur T_k in een gegeven ruimte in evenwicht schikt, gevonden kunnen worden door de voorwaarden te zoeken, onder welke de functie

$$\int \varrho \, (\varepsilon - T_k \, \eta) \, d\,k$$

een minimumwaarde verkrijgt.

In deze functie stelt ϱ voor de dichtheid, $d\,k$ het volume-element, ε en η de energie en entropie per gewichtseenheid. De laatste twee grootheden worden beschouwd als functiën van T, ϱ en andere parameters x, die den toestand ondubbelzinnig bepalen (bijv. betrekkelijk aantal gesplitste molekulen) — terwijl, als er uitwendige krachten werken, ε bovendien een functie van de coördinaten der ruimte is.

Zal $\int \varrho \, (\varepsilon - T_k \, \eta) \, d\,k$ een minimumwaarde hebben, dan moet, volgens de regels der variatierekening, $\delta \int \varrho \, (\varepsilon - T_k \, \eta) \, dk$ gelijk nul zijn. Er is, behalve het onveranderd blijven der ruimte, geen andere nevenvoorwaarde dan dat $\delta \int \varrho \, d\,k$ mede gelijk nul zij.

Daaruit besluiten wij, dat de partiëele differentaalquotiënten van $\varrho\,(\varepsilon - T_k\,\eta)$ ten opzichte van T en de verschillende parameters x gelijk nul moeten zijn, en dat ten opzichte van ϱ gelijk constante.

Of voor elk punt der ruimte geldt:

$$\frac{\delta\,\varrho\,(\varepsilon - T_k\,\eta)}{\delta\,\tau_{\rho\,x_1\,x_2\,\text{enz.}}} = 0 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,,\,.\,(1)$$

$$\frac{\delta\,\varrho\,(\varepsilon - T_k\,\eta)}{\delta\,x_{1\;\tau\,\rho\,x_2\,\text{enz.}}} = 0 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(2)$$

$$\frac{\delta\,\varrho\,(\varepsilon - T_k\,\eta)}{\delta\,\varrho_{\tau\,x_1\,x_2\,\text{enz.}}} = C \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(3)$$

Uit (1) vindt men $T = T_k$, of er is geen evenwicht mogelijk zonder gelijkheid van temperatuur.

(2) leert ons bijv. voor de gedissocieërden toestand, hoe de graad van dissociatie met de densiteit samenhangt.

(3) leert ons welke densiteiten naast elkander bestaan kunnen.

Gezamenlijk leeren deze vergelijkingen ons kennen, welke phasen kunnen coëxisteeren — een aantal, dat in het bijzonder als er uitwendige krachten zijn, oneindig groot is.

Daar voor elk punt der ruimte de volgende differentiaalvergelijking geldt:

$$d\,\varepsilon = T\,d\,\eta - p\,d\,V + \varphi_1\,d\,x_1 + \varphi_2\,d\,x_2 \text{ enz.}$$

en uit (1) gebleken is, dat overal T gelijk T_k moet zijn, leeren ons de vergelijkingen (2) dat

$$\frac{d\,(\varepsilon - T_k\,\eta)}{d\,V} = -\,p$$

met inachtneming daarvan, wordt (3):

$$\varepsilon - T_k\,\eta + \varrho\,\frac{\delta\,(\varepsilon - T_k\,\eta)}{\delta\,\varrho_{\tau\,x_1 x_2}} = \varepsilon - T_k\,\eta - V\,\frac{\delta\,(\varepsilon - T_k\,\eta)}{d\,V}$$

of

$$\varepsilon - T_k\,\eta + p\,V = C \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(4)$$

Bestaat ε nu uit twee deelen, nl. ε' de thermodynamische energie en P de potentiaal der uitwendige krachten, dan vindt men:

$$\varepsilon' - T_k \eta + pV = C - P$$

of: bij afwezigheid van uitwendige krachten moet de dichtheid in de ruimte zoodanig zijn, dat de thermodynamische potentiaal standvastig zij.

Dat dan ook p (de druk) in de ruimte standvastig moet zijn, blijkt o. a. als men (4) aldus transformeert:

$$\varrho (\varepsilon - T_k \eta) = C \varrho - p.$$

In verband met de vergelijkingen (1), (2) en (3) blijkt, dat p als een constante moet behandeld worden.

Zijn er uitwendige krachten, en heeft P dus een waarde van de coördinaten der punten in de ruimte afhangende, dan vinden wij p niet standvastig, maar

$$V dp = - dP$$

of

$$dp = - \varrho \, dP$$

een vergelijking, in de hydrostatica bekend.

Het geval, dat in ε behalve ϱ ook afgeleiden van ϱ ten opzichte van de coördinaten voorkomen, een geval dat strikt genomen telkens zal voorkomen als de densiteit in de ruimte niet overal gelijk is, is in de vorige vergadering besproken.

De voorwaarde $\delta \int \varrho (\varepsilon - T_k \eta) \, dk$ gelijk nul, leert echter, behalve de minimumwaarde, ook de maximumwaarde kennen.

Zijn er dus meerdere oplossingen, dan moet die genomen worden, welke de integraal de kleinste waarde geeft.

Zoo zal bijv. (3) leeren, dat bij een niet dissociëerende stof de densiteit zoo verdeeld is, dat

$$p \, V - \int p \, d \, V = \text{constant.}$$

Dit kan, als er geen uitwendige krachten werken òf het

het geval zijn als de stof zich homogeen schikt, òf zich in de 2 bekende densiteiten splitst. Voor het laatste geval is de integraal zoo klein mogelijk.

— De Heer Beijerinck deelt de uitkomst mede van kruisingsproeven met Kultuurgerst (*Hordeum vulgare*, *H. hexastichon*, *H. distichon*, *H. Zeocriton* en *H. trifurcatum*), sedert 1884 door hem in het groot genomen, en heldert zijne voordracht op door gedroogde voorwerpen en andere op spiritus. Hij beschrijft de voorzorgen, bij die kruisingsproeven te nemen, en leidt uit zijne proeven deze gevolgtrekkingen af:

1⁰. al de hierboven genoemde soorten van Gerst laten zich gemakkelijk door elkander bevruchten;

2⁰. de daardoor verkregen bastaarden zijn zeer volkomen zelf-fertiel; die tusschen *H. vulgare* (vr.) en *H. distichum* (m.) en die tusschen *H. vulgare* (vr.) en *H. Zeocriton* (m.) zelfs kleistogaam;

3⁰. de bastaarden der 1ste generatie zijn over 't algemeen middelvormen tusschen de beide ouders. Eene uitzondering op dien regel vormden die van *H. nudum* (vr.) en *H. trifurcatum* (m.), welke voor een groot deel bleken te behooren tot den niet verwachten gewonen *intermedium*-vorm (den tusschenvorm tusschen *H. vulgare* en *H. distichum*). Enkele exemplaren behoorden tot den wèl verwachten *cornutum*-vorm;

4⁰. de zaailingen, uit bastaarden door zelfbevruchting ontstaan, zijn zeer veranderlijk. De spreker verkreeg, behalve enkele reeds bekende, eenige geheel nieuwe verscheidenheden. Zeer merkwaardig was, dat de 3de generatie eener kruising van *H. vulgare* (vr.) en *H. Zeocriton* (m.) hem *H. hexastichon* opleverde;

5⁰. in den loopenden zomer werd uit de in 1884 uitgevoerde kruising tusschen *H. distichum* (vr.) en *H trifurcatum* (m.) een bijna volkomen ongenaalde vorm geteeld.

De Heer Fürbringer deelt den korten inhoud mede van onderzoekingen van den Heer Dr. J. F. van Bemmelen, over den oorsprong van de voorste ledematen en de tongspieren bij Reptilen.

Het onderzoek geschiedde aan embryonen van *Lacerta muralis* en *Tropidonotus natrix*.

In het jongste stadium, dat voor het onderzoek ter beschikking stond, was de vierde kieuwzak juist aangelegd, terwijl de vijfde nog niet aanwezig was. *Op dezen trap van ontwikkeling wordt de aanleg van het mesodermaal bestanddeel der voorste ledematen niet alleen bij de Hagedis, maar ook bij de Slang aangetroffen, en wel bij beide in volkomen overeenkomstigen vorm.*

Het eerste rompsomiet ziet men op korten afstand achter het gehoorblaasje; het is zwakker ontwikkeld dan de volgende. Langs den oralen rand van dit somiet buigt zich de Vagus naar buiten om en loopt naar de 3de en 4de kieuwspleet, waar hij met het ectodermaal epitheel van den achterwand der spleten versmelt. De Vagus met den Accessorius ontspringt uit het verlengde merg over eene vrij groote uitgestrektheid, evenwijdig aan de lengteas van den romp, zoodat zijn oorsprongslijn naar achteren reikt tot aan de grens tusschen het 5de en 6de somiet. Over dezen afstand zijn de spinaal-gangliën niet ontwikkeld; alleen het 5de is zichtbaar, maar zeer rudimentair. Bij het vierde somiet is een dorsale zenuwwortel duidelijk, maar geen gangliëncellen.

Deze voorste vijf somieten vormen elk naar de buikzijde eene strengvormige uitgroeiing. De vijf strengen convergeeren en smelten samen tot een cellige strook, die achter den laatsten kieuwzak om naar de buikzij loopt en zich vervolgens naar voren begeeft, zoodat zij de onderkaak bereikt. Deze strook bevat het materiaal, waaruit zich de tongspieren ontwikkelen zullen. Zij loopt op de grens tusschen den onderrand der branchiaalstreek en den bovenrand van de pericardiaalholte, in de »schouder-tong-lijst" van Froriep. Zij wordt begeleid door den Hypoglossus. Deze zenuw ontstaat uit de samengroeiing van ventrale ruggemergs-wortels, behoorende bij eenige der voorste somieten. Hun aantal kon nog niet met volkomen zekerheid bepaald worden, maar waarschijnlijk gaan de ventrale wortels van het 2de tot 4de segment in den Hypoglossus op en geeft die van het vijfde er een tak aan af, terwijl de vijfde spinaalzenuw overigens

tot eerste cervicaalzenuw wordt. Hiervoor pleit, dat in oudere stadiën de voorste halszenuw geen spinaalganglion heeft. Bij het eerste somiet komt geen zenuw voor. Dit stemt overeen met de waarnemingen van Dr. van Wijhe.

Het 6de tot en met het 13de somiet, dus in 't geheel 8 somieten, vormen eveneens aan hunne ventrale zijde steelvormige uitgroeisels, maar deze vereenigen zich niet met die der voorste vijf somieten. Zij wijken eenigszins aboraal af en lossen zich op in één gemeenschappelijke celmassa, die zich van het omliggende bindweefsel alleen door dichtere opeenhooping der kernen onderscheidt.

Deze celmassa ligt aan weerszijden van het lichaam dicht onder de huid en veroorzaakt een flauwe verheffing der lichaamsoppervlakte, waardoor de aanleg van het voorste lidmaat uitwendig te herkennen is.

In een iets ouder stadium van ontwikkeling, wanneer de vijfde kieuwzak en de zesde aortaboog juist aangelegd zijn, is deze verdikking van den lichaamswand bij de Hagedis grooter geworden en naar achter en rugwaarts vrij uitgegroeid; bij de Slang daarentegen reeds weder spoorloos verdwenen.

Uit dezen dichten celklomp ontwikkelen zich bij de Hagedis de spieren en waarschijnlijk ook het geraamte van het voorste lidmaat. De eerste konden dus een voortbrengsel van de spierknoppen van acht lichaamssegmenten zijn; met het oog op de innervatie is het echter waarschijnlijk, dat niet alle knoppen zich tot spieren ontwikkelen De »schoudertong-lijst" ligt wel in het verlengde van deze lidmaats-verdikking — de zoogenoemde »extremiteits-lijst van Wolff" — maar het materiaal voor de tongspieren groeit niet in haar naar binnen, van het vooreinde van den lidmaatsaanleg uit, zooals Froriep beweert. Het is integendeel, zooals boven bleek, eene voortzetting van de spierknoppen der voorste vijf myotomen, welke knoppen gelegen zijn in de »Kopfnickerwulst" van Froriep.

Van de voorste vier dezer vijf somieten zelve gaan waarschijnlijk de sclerotomen op in den aanleg van 't achterhoofd, terwijl het sclerotoom van het vijfde atlas wordt.

De myotomen der twee of drie voorste gaan waarschijnlijk te gronde, op hun spierknop voor den tong na. Uit die der achterste ontwikkelen zich wellicht halsspieren. Dit werd nog niet uitvoerig nagegaan.

— Voor de Boekerij worden aangeboden: door den Heer PLACE, uit naam van Dr. VAN REES, diens »Beiträge zur Kenntniss der innern Metamorphose von Musca vomitoria" en door den Heer VAN BEMMELEN een door hem in »Die landwirtschaftlichen Versuchs-Stationen, XXXV" openbaar gemaakte verhandeling, getiteld: »Die Absorptionsverbindungen und das Absorptionsvermögen der Ackererde."

— De Heer GUNNING zond voor de Verslagen en Mededeelingen aan den Secretaris toe twee opstellen, getiteld: 1°. »Over afscheiding en bepaling van Raffinose"; 2°. »Over het gebruik van kaliumhydrosulfaat bij het onderzoeken van organische stoffen."

— Daar er verder niets te behandelen is, wordt de vergadering gesloten.

RAPPORT

OVER EENE

VERHANDELING VAN DEN HEER DR. J. DE VRIES

„OVER DE HARMONISCHE CONFIGURATIE $(24_3, 18_4)$".

(Uitgebracht in de Vergadering van 30 Juni 1888).

Volgens opdracht der Afdeeling hebben wij de eer over genoemde verhandeling rapport uit te brengen.

Dit opstel sluit zich dan ook aan een vorig van den zelfden schrijver »Over vlakke configuraties", waarover wij pas onlangs een gunstig bericht mochten geven.

In dit laatste toch kwam de configuratie $(24_3, 18_4)$ ter sprake, gevormd door twee geassocieerde conf. $(12_4, 16_3)$ van de soort A met hare gemeenschappelijke diagonalen. Aangezien elk harer lijnen vier harmonische punten bevat, noemt schrijver haar de *harmonische configuratie.* Zij bevat 32 driepuntige configuratie-diagonalen D (de lijnen de beide conf. $(12_4\ 16_3)$), en 72 tweepuntige diagonalen T, ontstaan door de verbinding van elk punt der eene conf. $(12_4, 16_3)$ met een punt der andere.

Schrijver bewijst daarop, dat in elk punt der harmonische configuratie de 6 tweepuntige diagonalen T van de 3 conf. lijnen harmonisch worden gescheiden door de 6 paren, welke uit de 4 driepuntige diagonalen D kunnen gevormd worden; — dat de diagonalen T op de diagonalen D 96 punten h bepalen, die met de drietallen punten, op die lijnen D gelegen, harmonische groepen vormen; — dat elke diago-

naal T 4 zulke punten h bevat; — dat elk dier punten h met 3 diagonalen T incident is; — dat dus deze punten h met de tweepuntige diagonalen T eene configuratie $(96_3, 72_4)$ vormen; — dat de punten der harmonische configuratie tot 32 conf. $(12_4, 16_3)$ gebracht kunnen worden, welke ieder 9 lijnen en 7 driepuntige diagonalen D met haar gemeen hebben; — en daarop, door middel der geassocieerde configuratie dier conf. $(12_4, 16_3)$, dat elk drietal collineaire punten eener conf. $(12_4, 16_3)$ eene configuratie van dezelfde soort vormt met de 9 punten, door welke zij op de in hen zamenkomende conf. lijnen tot harmonische groepen worden aangevuld; — en ten slotte, dat uit de punten der harmonische configuratie en der daarbij behoorende conf. $(96_3, 72_4)$ 32 configuratiën $(12_4, 16_3)$ A kunnen gevormd worden, welke ieder met deze beide 3 en 9 punten gemeen hebben.

Van de lijnen H, die in de conf. $(12_4, 16_3)$ tot de restfiguur der lijnen dier configuratie behooren (haar aantal is 96), gaan er telkens 6 door hare punten h. De 48 punten h, die tot eene configuratie $(12_4, 16_3)$ A behooren, de 96 lijnen H, en de 16 lijnen der configuratie vormen eene nieuwe conf. $(48_7, 112_3)$: van de 216 diagonalen dezer nieuwe configuratie gaan er 18 door elk punt der conf. $(12_4, 16_3)$: zijn er 72, die tevens diagonalen zijn van de andere configuratie $(48_7, 112_3)$, die aan de geassocieerde configuratie $(12_4, 16_3)$ toekomen; en deze 72 diagonalen vormen met de beide groepen van punten h de vroegere configuratie $(96_3, 72_4)$. Laat men echter de 16 lijnen der conf. $(12_4, 16_3)$ weg, dan ontstaat er een nieuwe configuratie $(48_6, 96_3)$.

Elk paar driepuntige diagonalen D der harmonische configuratie, welke geassocieerde lijnen zijn der conf. $(15_4, 20_3)$, bevat een zestal onderling gescheiden punten; wordt dit uit de harmonische configuratie verwijderd, dan ontstaat eene merkwaardige configuratie $(18_3, 18_3)$, waarvan er 16 uit de harmonische configuratie kunnen gevormd worden, en waarvan ieder uit twee drietallen van driehoeken bestaat; zoodat elke hoekpunt van een driehoek in één groep op eene zijde van een driehoek van de andere groep ligt.

Brengt men nu zes der driepuntige diagonalen D bij deze

conf. $(18_3, 18_3)$, dan ontstaat eene configuratie $(18_4. 24_3)$, die niet meer regelmatig is en niet reciprook met de harmonische configuratie overeenkomt, en waarvan elk punt behoort tot 7 configuratie driehoeken. Brengt men nog de zes andere driepuntige diagonalen D daarbij, dan ontstaat er eene conf. $(18_5, 30_3)$, waarin elk punt tot 15 conf. driehoeken behoort. De punten der harmonische configuratie geven nu aanleiding tot 64 conf. zoowel van de eerste, als van de tweede soort.

Zondert men daarentegen van onze configuratie $(18_3, 18_3)$ een zestal onderling gescheiden punten af, dan blijft er eene configuratie $(12_3, 18_2)$; en voegt men weder hierbij de negen nevenhoekpunten der harmonische configuratie, en drie gescheiden lijnen der door hen bepaalde conf. $(9_2, 6_3)$, zoo ontstaat er eene nieuwe evenzeer merkwaardige configuratie $(21_3, 21_3)$. Wanneer men echter weder zeven driepuntige diagonalen D daarbij voegt, ontstaat er eene conf. $(21_4, 28_3)$.

Wanneer men in de harmonische configuratie de punten van een der beide conf. $(12_4, 16_3)$ vervangt door de negen nevenhoekpunten met drie gescheiden lijnen der door hen bepaalde conf. $(9_2, 6_3)$, dan ontstaat er ook eene configuratie $(21_3, 21_3)$, die echter met de vorige niet gelijksoortig is. Voegt men hierbij 7 driepuntige diagonalen, dan ontstaat weder eene conf. $(21_4. 28_3)$, die met de vorige 26 lijnen gemeen heeft. Het aantal conf. driehoeken, waarin de conf. punten voorkomen, is voor de laatste conf. 9 of 4, voor de eerstgenoemde 5 of 0.

Uit de punten der harmonische configuratie en hare nevenhoekpunten kunnen nu 240 conf. $(21_3, 21_3)$ worden gevormd, die van elke der beide geassocieerde conf. $(12_4, 16_3)$ zes punten en alle nevenhoekpunten bevatten, en 4 conf. $(21_3, 21_3)$, die met de vorige ongelijksoortig zijn, en, behalve alle nevenhoekpunten, alle punten van eene der beide conf. $(12_4, 16_3)$ bevatten. Voegt men nu hierbij telkens 7 nieuwe diagonalen, dan kan men 272 conf. $(21_4, 28_3)$ vormen, waarvan de laatste 32 in samenstelling verschillen van de eerste 240.

In de vroeger gevonden conf. (48_7, $\mathbf{112_3}$) komen lijnen voor, die met 15 lijnen uit de conf. (48_6, 96_3) eene groep van 16 gescheiden lijnen vormen, welke samen alle punten der conf. (48_7, 112_3) bevatten. Laat men nu deze lijnen uit de conf. (48_7, 112_3) weg, dan ontstaat er eene nieuwe conf. (48_6, 96_3). De eerstgenoemde conf. (48_6, 96_3) heeft 144 tweepuntige diagonalen T, die in twaalftallen incident zijn met de punten der oorspronkelijke conf. (12_4, 16_3). Neemt men deze 144 lijnen in de configuratie op, dan ontstaat er eene conf. (60_{12}, 240_3), voor welke de lijnen der conf. (12_4, 16_3) zespuntige diagonalen zijn.

Schrijver besluit zijn verhandeling met eene stelling, die zijne methode van afzonderen en toevoegen van elementen verklaart.

Wegens de merkwaardigheid der uitkomsten, de eenvoudigheid en helderheid der toegepaste methoden komt, naar ons oordeel, aan dit opstel een plaats toe naast de voorgaande verhandeling. Wij meenen dan ook de Afdeeling gerustelijk te kunnen aanraden, het een eervolle plaats te gunnen in hare Verslagen en Mededeelingen.

Leiden en *Rotterdam*,
Juli 1888.

D. BIERENS DE HAAN,
F. J. VAN DEN BERG.

OVER DE HARMONISCHE CONFIGURATIE
$(24_3, 18_4)$.

DOOR

J. DE VRIES.



1. In mijn opstel »Over vlakke configuraties" (Versl. en Meded. d. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 3[de] Reeks Deel V), heb ik aangetoond, dat de punten van twee geassocieërde cf. $(12_4, 16_3)$ A met hare gemeenschappelijke diagonalen eene cf. vormen, welke ik de »harmonische" $(24_3, 18_4)$ zal noemen, omdat elke harer lijnen vier harmonische punten bevat. Zij bezit cf diagonalen van tweeërlei soort, n.l. 32 »driepuntige" (de lijnen der beide $(12_4, 16_3)$) en 72 »tweepuntige", welke elk een punt der eene $(24_4, 16_3)$ met een punt der andere verbinden.

In de volledige vierzijde $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $c_1 c_2$ *) is α_2 (het snijpunt der diagonalen $b_1 b_2$, $c_1 c_2$) harmonisch gescheiden van de diagonaal $a_1 a_2$; deze beschouwing levert voor het punt a_1 de volgende harmonische vierstralen.

$a_1\ \alpha_2$	$a_1\ a_2$	$a_1\ b_1\ c_1$	$a_1\ b_2\ c_2$
$a_1\ \alpha_3$	$a_1\ a_3$	$a_1\ b_1\ c_1$	$a_1\ b_3\ c_3$
$a_1\ \alpha_4$	$a_1\ a_4$	$a_1\ b_1\ c_1$	$a_1\ b_4\ c_4$
$a_1\ \delta_2$	$a_1\ a_2$	$a_1\ b_3\ c_3$	$a_1\ b_4\ c_4$
$a_1\ \delta_3$	$a_1\ a_3$	$a_1\ b_2\ c_2$	$a_1\ b_4\ c_4$
$a_1\ \delta_4$	$a_1\ a_4$	$a_1\ b_2\ c_2$	$a_1\ b_3\ c_3$

. . . . . (I)

*) De letters hebben hier dezelfde beteekenis als in het genoemde opstel. (Tabellen B, E, F).

»In elk punt der harmonische $(24_3, 18_4)$ worden de 6 »tweepuntige diagonalen T van de 3 cf. lijnen harmonisch »gescheiden door de 6 paren, welke uit de 4 driepuntige »diagonalen D kunnen gevormd worden."

2. De snijpunten $(b_1 c_2)$ en $(b_2 c_1)$ van $a_2 b_1 c_2$ en $a_2 b_2 c_1$ met $a_1 \alpha_2$ zijn aan a_2 harmonisch toegevoegd ten opzichte van de paren b_1, c_2 en b_2, c_1. De diagonalen T bepalen dus op de diagonalen D 96 punten h, welke de drietallen van punten, op de lijnen D gelegen, tot harmonische groepen aanvullen. Daar elke T ook met een volledige vierzijde der geassocieërde $(12_4, 16_3)$ in verband kan gebracht worden, bevat zij vier der punten h. Het punt a_1 is b. v. als snijpunt der diagonalen $\beta_3 \gamma_3$, $\beta_4 \gamma_4$ in de vierzijde $(\alpha_2 \delta_2$, $\beta_3 \gamma_3$, $\beta_4 \gamma_4)$ harmonisch gescheiden van de diagonaal $\alpha_2 \delta_2$, zoodat $a_1 \alpha_2$ op de zijden $\beta_3 \beta_4$, $\gamma_3 \gamma_4$ de punten $(\beta_3 \beta_4)$, $(\gamma_3 \gamma_4)$ bepaalt, welke ten opzichte van de paren β_3, β_4 en γ_3, γ_4 aan het punt δ_2 harmonisch zijn toegevoegd.

Elke diagonaal D behoort tot drie volledige vierzijden der overeenkomstige $(12_4, 16_3)$: elk der punten h is dus met drie diagonalen T incident. De lijn $a_2 b_1 c_2$ wordt b. v. in het punt $(b_1 c_2)$ gesneden door de lijnen $a_1 \alpha_2$, $a_3 \gamma_4$, $a_4 \gamma_3$.

»De punten h, welke op de driepuntige diagonalen der »harmonische $(24_3, 18_4)$ hare punten tot harmonische groe»pen aanvullen, vormen met de tweepuntige diagonalen dezer »cf. eene $(96_3, 72_4)$. Op elke lijn der laatste cf. zijn de »vier cf. punten tot twee paren eener kwadratische involutie »vereenigd, waarvoor twee punten der $(24_3, 18_4)$ de coïn»cidentiepunten zijn."

3. Het tweede tiental lijnen van tabel D *) vormt met de lijnen van tabel C †) de volgende $(12_4, 16_3)$ A:

$\delta_2\ \delta_3\ \delta_4$	$a_2\ \delta_3\ a_4$	$b_2\ \delta_3\ b_4$	$c_2\ \delta_3\ c_4$	
$\delta_2\ a_3\ a_4$	$a_2\ a_3\ \delta_4$	$b_2\ a_3\ c_4$	$c_2\ a_3\ b_4$	. . . (II)
$\delta_2\ b_3\ b_4$	$a_2\ b_3\ c_4$	$b_2\ b_3\ \delta_4$	$c_2\ b_3\ a_4$	
$\delta_2\ c_3\ c_4$	$a_2\ c_3\ b_4$	$b_2\ c_3\ a_4$	$c_2\ c_3\ \delta_4$	

*) l. c. § 4.

†) l. c. § 3.

Zij bevat 9 punten der oorspronkelijke en 3 punten der geassociëerde $(12_4, 16_3)$ A, terwijl van hare lijnen 6 tot de oorspronkelijke, ééne tot de geassociëerde en de overige 9 als diagonalen tot beide cf. behooren.

»De punten der harmonische $(24_3, 18_4)$ kunnen tot 32 »cf. $(24_4, 16_3)$ A gebracht worden, welke ieder 9 lijnen en »7 driepuntige diagonalen met haar gemeen hebben."

Met het oog op de §§ 4 en 5 van het aangehaalde opstel bevat de volgende tabel de drietallen van diagonalen der $(12_4, 16_3)$ van tabel (II), welke in één punt samenkomen; 9 dezer punten behooren als doorsneden van eene T met eene D tot de punten h.

Diag.	Diag.	Diag.	Snijpunt.
$b_2\ c_2$	$b_3\ c_3$	$b_4\ c_4$	a_1
$c_2\ a_2$	$c_3\ a_3$	$c_4\ a_4$	b_1
$a_2\ b_2$	$a_3\ b_3$	$a_4\ b_4$	c_1
$b_2\ c_2$	$a_3\ \delta_3$	$a_4\ \delta_4$	$(b_2\ c_2)$
$c_2\ a_2$	$b_3\ \delta_3$	$b_4\ \delta_4$	$(c_2\ a_2)$
$a_2\ b_2$	$c_3\ \delta_3$	$c_4\ \delta_4$	$(a_2\ b_2)$
$a_2\ \delta_2$	$b_3\ c_3$	$a_4\ \delta_4$	$(b_3\ c_3)$
$b_2\ \delta_2$	$c_3\ a_3$	$b_4\ \delta_4$	$(c_3\ a_3)$
$c_2\ \delta_2$	$a_3\ b_3$	$c_4\ \delta_4$	$(a_3\ b_3)$
$a_2\ \delta_2$	$a_3\ \delta_3$	$b_4\ c_4$	$(b_4\ c_4)$
$b_2\ \delta_2$	$b_3\ \delta_3$	$c_4\ a_4$	$(c_4\ a_4)$
$c_2\ \delta_2$	$c_3\ \delta_3$	$a_4\ b_4$	$(a_4\ b_4)$

. . . (III)

Hieruit volgt, met behulp van tabel E, voor de geassociëerde der $(12_4, 16_3)$ van tabel (II) dit overzicht:

a_1	b_1	c_1	$(b_2\ c_2)$	b_1	$(a_2\ b_2)$	
a_1	$(a_2\ c_2)$	$(a_2\ b_2)$	$(b_2\ c_2)$	$(a_2\ c_2)$	c_1	
a_1	$(a_3\ c_3)$	$(a_3\ b_3)$	$(b_2\ c_2)$	$(a_3\ c_3)$	$(a_4\ b_4)$	
a_1	$(a_4\ c_4)$	$(a_4\ b_4)$	$(b_2\ c_2)$	$(a_4\ c_4)$	$(a_3\ b_3)$	(IV)
$(b_3\ c_3)$	b_1	$(a_3\ b_3)$	$(b_4\ c_4)$	b_1	$(a_4\ b_4)$	
$(b_3\ c_3)$	$(a_2\ c_2)$	$(a_4\ b_4)$	$(b_4\ c_4)$	$(a_2\ c_2)$	$(a_3\ b_3)$	
$(b_3\ c_3)$	$(a_3\ c_3)$	c_1	$(b_4\ c_4)$	$(a_3\ c_3)$	$(a_2\ b_2)$	
$(b_3\ c_3)$	$(a_4\ c_4)$	$(a_2\ b_2)$	$(b_4\ c_4)$	$(a_4\ c_4)$	c_1	

Deze tabel vertoont eene merkwaardige overeenkomst met de tabel B *), welke de lijnen der uit de punten $(a_i\ b_i\ c_i)$ gevormde $(12_4, 16_3)$ A bevat; zij ontstaat uit de laatste, wanneer men a_i, b_i, c_i $(i = 2, 3, 4)$ achtereenvolgens door $(b_i\ c_i)$, $(c_i\ a_i)$, $(a_i\ b_i)$ vervangt.

»Elke drie collineaire punten eener $(12_4, 16_3)$ A vormen »met de 9 punten, door welke zij op de in hen samenko»mende cf. lijnen tot harmonische groepen worden aange»vuld, eene cf. van dezelfde soort."

Wordt deze beschouwing toegepast op alle lijnen van twee geassociëerde $(12_4, 16_3)$ A, dan heeft men:

»Uit de punten der harmonische $(24_3, 18_4)$ en der bij»behoorende $(96_3, 72_4)$ kunnen 32 cf. $(12_4, 16)$ A ge»vormd worden, welke ieder met deze beide cf. 3 resp. 9 »punten gemeen hebben."

4. Elke lijn H, welke in de $(12_4, 16_3)$ van tabel (IV) tot de restfiguur van $a_1\ b_1\ c_1$ behoort, verbindt drie punten van drie onderling gescheiden lijnen der $(12_4, 16_3)$ van tabel B †).

Daar nu elke lijn der laatste cf. in twee kwadrupels van onderling gescheiden lijnen voorkomt, dus van zes paren gescheiden is, zullen de 96 lijnen H, tot welke de cf. $(a_i\ b_i\ c_i)$ aanleiding geeft, zes aan zes door hare 48 punten h gaan.

*) l. c. § 3.
†) l. c. § 3.

Elke der 9 lijnen, welke in de cf. van tabel IV met $a_1 b_1 c_1$ verbonden zijn, is in eene volledige vierzijde harmonisch toegevoegd aan eene zijde ten opzichte van eene andere zijde en eene diagonaal; $a_1 (a_2 c_2) (a_2 b_2)$ wordt b.v. door $a_1 b_1 c_1$ harmonisch gescheiden van $a_2 b_2 c_2$ en $a_1 a_2$. Daar a_1 tot 6 volledige vierzijden der oorspronkelijke cf. behoort, komen in dat punt, behalve de in § 2 besproken 6 lijnen T, nog 12 door paren van punten h getrokken lijnen samen.

»De 48 tot eene $(12_4, 16_3)$ A behoorende punten h vor-»men met de 96 lijnen H en de 16 cf. lijnen eene $(48_7, 112_3)$; »van de 216 diagonalen dezer nieuwe cf. gaan er 18 door »elk punt der $(12_4, 16_3)$; onder deze diagonalen bevinden »zich 72, die tevens diagonalen der aan de geassocieerde »$(12_4, 16_3)$ A toekomende $(48_7, 112_3)$ zijn en met de beide »groepen van punten h de boven besproken $(96_3, 72_4)$ vor-»men".

»Door weglating van de 16 lijnen der $(12_4, 16_3)$ ontstaat »uit de $(48_7, 112_3)$ eene $(48_6, 96_3)$".

5. Elk paar driepuntige diagonalen der harmonische $(24_3, 18_4)$, welke geassocieerde lijnen eener $(15_4, 20_3)$ zijn, bevat een zestal onderling gescheiden punten; wordt zulk een zestal uit de harmonische cf. verwijderd, dan ontstaat eene merkwaardige cf. 18_3. Door weglating van de punten $a_1 b_1 c_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4$ uit de tabel F,*) verkrijgt men b. v. de cf.

$a_2\ \beta_2\ \gamma_2$	$b_2\ \alpha_2\ \gamma_2$	$c_2\ \alpha_2\ \beta_2$	
$a_3\ \beta_3\ \gamma_3$	$b_3\ \alpha_3\ \gamma_3$	$c_3\ \alpha_3\ \beta_3$	
$a_4\ \beta_4\ \gamma_4$	$b_4\ \alpha_4\ \gamma_4$	$c_4\ \alpha_4\ \beta_4$	. . . . (V)
$a_2\ a_3\ \alpha_4$	$b_2\ b_3\ \beta_4$	$c_2\ c_3\ \gamma_4$	
$a_3\ a_4\ \alpha_2$	$b_3\ b_4\ \beta_2$	$c_3\ c_4\ \gamma_2$	
$a_4\ a_2\ \alpha_3$	$b_4\ b_2\ \beta_3$	$c_4\ c_2\ \gamma_3$	

Deze cf. bestaat uit twee drietallen van onderling gescheiden driehoeken,

*) l. c. § 5.

$$\begin{array}{ccc|ccc} a_2 & a_3 & a_4 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ b_2 & b_3 & b_4 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 & \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \end{array} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(VI)}$$

welke zoodanige plaatsing ten opzichte van elkander hebben, dat elke zijde en het overstaande hoekpunt van iederen driehoek van eene groep met een hoekpunt en de overstaande zijde van een driehoek der andere groep incident zijn.

Elk punt der 18_3 komt evenals elke lijn slechts in een cf. driehoek voor. Van de 32 driepuntige diagonalen der harmonische cf. bevat deze 18_3 er nog de volgende twaalf,

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc||ccc|ccc} a_2 & b_4 & c_3 & \alpha_2 & \beta_4 & \gamma_3 & a_2 & b_3 & c_4 & \alpha_2 & \beta_3 & \gamma_4 \\ a_3 & b_2 & c_4 & \alpha_3 & \beta_2 & \gamma_4 & a_3 & b_4 & c_2 & \alpha_3 & \beta_4 & \gamma_2 \\ a_4 & b_3 & c_2 & \alpha_4 & \beta_3 & \gamma_2 & a_4 & b_2 & c_3 & \alpha_4 & \beta_2 & \gamma_3 \end{array}\right| . \text{(VII)}$$

welke blijkbaar in vier verschillende zestallen van onderling gescheiden lijnen kunnen gerangschikt worden.

»Uit de punten en lijnen der harmonische $(24_3, 18_4)$ »kunnen 16 cf. 18_3 gevormd worden, van welke ieder uit »twee drietallen van driehoeken bestaat, zoodat elk hoek»punt van een driehoek der eene groep op eene zijde van »een driehoek der andere groep ligt".

6. Door toevoeging van de eerste zes lijnen van tabel VII ontstaat uit de cf. 18_3 eene $(18_4, 24_3)$, welke niet meer regelmatig is, daar zij wel ten opzichte van elk harer punten, maar niet ten opzichte van elke harer lijnen, op gelijksoortige wijze is samengesteld, dus niet reciprook overeenkomt met de harmonische $(24_3, 18_4)$. Elk punt behoort tot 7 cf. driehoeken; voor a_2 zijn het de driehoeken $a_2\ a_3\ a_4$, $a_2\ b_4\ \alpha_4$, $a_2\ b_4\ \beta_2$, $a_2\ c_3\ \alpha_3$, $a_2\ c_3\ \gamma_2$, $a_2\ \alpha_3\ \beta_2$, $a_2\ \alpha_4\ \gamma_2$.

Wordt ook het tweede zestal lijnen van tabel VII in de figuur opgenomen, dan ontstaat eene $(18_5, 30_3)$, waarin elk punt tot 15 cf. driehoeken behoort; voor het punt a_2 komen bij de bovengenoemde 7 nog deze: $a_2\ b_3\ b_4$, $a_2\ c_3\ c_4$, $a_2\ b_3\ \alpha_3$, $a_2\ b_3\ \beta_2$, $a_2\ c_4\ \alpha_4$, $a_2\ c_4\ \gamma_2$, $a_2\ \alpha_3\ \gamma_2$, $a_2\ \alpha_4\ \beta_2$.

»De punten der harmonische (24_3, 18_4) geven aanleiding »tot 64 cf. (18_4, 24_3) en even zoovele cf. (18_5, 30_3)".

7. Zondert men van de cf. 18_3 een zestal onderling gescheiden punten af, dan blijft eene (12_3, 18_2) over, waaruit door toevoeging van de nevenhoekpunten p_i q_i r_i der harmonische (24_3, 18_4) en van drie gescheiden lijnen der door hen bepaalde (9_2, 6_3) eene cf. 21_3 ontstaat. Zoo levert de vervanging van de punten a_2 b_3 c_4 α_2 β_3 γ_4 door p_i q_i r_i het volgende overzicht (l. c. § 8).

p_2 β_2 γ_2	q_2 b_2 γ_2	r_2 c_2 β_2	
p_3 a_3 γ_3	q_3 α_3 γ_3	r_3 c_3 α_3	
p_4 a_4 β_4	q_4 b_4 α_4	r_4 α_4 β_4	
p_4 a_3 α_4	q_4 b_2 β_4	r_4 c_2 c_3	. . . (VIII)
p_3 a_4 α_3	q_3 b_2 b_4	r_3 c_2 γ_3	
p_2 a_3 a_4	q_2 b_4 β_2	r_2 c_3 γ_2	
p_2 q_3 r_4	p_3 q_4 r_2	p_4 q_2 r_3	

In deze cf. behoort geen der punten p, q, r tot een cf. driehoek, terwijl de overige punten ieder in twee driehoeken voorkomen.

De cf. gaat over in eene (21_4, 28_3), wanneer men de volgende 7 driepuntige diagonalen als cf. lijnen beschouwt:

a_3 b_4 c_2		
a_4 b_2 c_3	p_2 q_4 r_3	
α_3 β_4 γ_2	p_3 q_2 r_4	. . . . (IX)
α_4 β_2 γ_3	p_4 q_3 r_2	

Uit de harmonische (24_3, 18_4) kan eene 21_3 afgeleid worden, welke van de 21_3 van tabel VIII in samenstelling verschilt, door de punten van een der geassociëerde (12_4, 16_3) A weg te laten en de nevenhoekpunten p, q, r met drie gescheiden lijnen der door hen bepaalde (9_2, 6_3) in de figuur op te nemen. Hierdoor ontstaat b.v. de tabel:

$a_1\ a_2\ p_2$	$b_1\ b_2\ q_2$	$c_1\ c_2\ r_2$	
$a_1\ a_3\ p_3$	$b_1\ b_3\ q_3$	$c_1\ c_3\ r_3$	
$a_1\ a_4\ p_4$	$b_1\ b_4\ q_4$	$c_1\ c_4\ r_4$	
$a_2\ a_3\ p_4$	$b_2\ b_3\ q_4$	$c_2\ c_3\ c_4$	. . . . (X)
$a_2\ a_4\ p_3$	$b_2\ b_4\ q_3$	$c_2\ c_4\ r_3$	
$a_3\ a_4\ p_2$	$b_3\ b_4\ q_2$	$c_3\ c_4\ r_2$	
$p_2\ q_3\ r_4$	$p_3\ q_4\ r_2$	$p_4\ q_2\ r_3$	

Dat deze 21_3 niet met de 21_3 van tabel VIII gelijksoortig is, blijkt terstond uit het aantal cf. driehoeken, waartoe de cf. punten behooren: naarmate zij tot de $(12_4, 16_3)$ cf. of tot hare nevenhoekpunten gerekend moeten worden, komen zij in 9 of 4 cf. driehoeken voor.

Uit deze 21_3 kunnen 8 cf. $(21_4, 28_3)$ afgeleid worden door toevoeging van 7 driepuntige diagonalen; elk der 8 kwadrupels van gescheiden lijnen der $(12_4, 16_3)$ waarvan de 21_3 de punten bevat, kan daartoe, in verband met de overige drie lijnen van de $(9_2, 6_3)$ der nevenhoekpunten, gebezigd worden. De 7 nieuwe lijnen kunnen b.v. zijn:

$a_1\ b_1\ c_1$		
$a_2\ b_3\ c_4$	$p_2\ q_4\ r_3$	
$a_3\ b_4\ c_2$	$p_3\ q_2\ r_4$	. . . . (XI)
$a_4\ b_2\ c_3$	$p_4\ q_3\ r_2$	

De beide cf. $(21_4, 28_3)$ hebben blijkbaar 26 lijnen gemeen; het aantal cf. driehoeken, waarin de cf. punten voorkomen, is voor de laatst beschouwde 9 of 4 (evenals voor de 21_3, waaruit zij afgeleid werd), voor de eerstgenoemde 5 of 0.

» Uit de punten der harmonische $(24_3, 18_4)$ en hare neven-»hoekpunten kunnen 240 cf. 21_3 gevormd worden, welke »van elke der beide geassocieerde $(12_4, 16_3)$ 6 punten en »alle nevenhoekpunten bevatten, en 4 met de vorige onge-»lijksoortige 21_3, welke de nevenhoekpunten en alle punten

»van eene der beide (12_4, 16_3) bevatten. Door toevoeging »telkens van een stel van 7 nieuwe lijnen kunnen uit deze »cf. (240 + 32) cf. (21_4, 28_3) gevormd worden; de laatste »32 verschillen in samenstelling van de 240 der eerste groep".

8. De in den aanhef van § 4 gemaakte opmerking geeft het middel om gemakkelijk een tabel voor de lijnen der aldaar gevonden cf. (48_6, 96_3) te verkrijgen. Daarbij blijkt, dat van de 16 restfiguren (9_2, 6_3) A, waaruit deze cf. is samengesteld, er slechts drie behoeven opgeschreven te worden, daar de overige door verschikking van letters en indices uit deze voortvloeien.

Deze zijn:

$$
\begin{array}{l|l}
(a_2\ b_2)\ (b_3\ c_3)\ (a_4\ c_4) & (a_2\ b_2)\ (b_4\ c_4)\ (a_3\ c_3) \\
(a_3\ b_3)\ (b_4\ c_4)\ (a_2\ c_2) & (a_3\ b_3)\ (b_2\ c_2)\ (a_4\ c_4) \\
(a_4\ b_4)\ (b_2\ c_2)\ (a_3\ c_3) & (a_4\ b_4)\ (b_3\ c_3)\ (a_2\ c_2) \\
\\
(a_1\ b_1)\ (b_2\ c_3)\ (a_3\ c_2) & (a_1\ b_1)\ (b_3\ c_2)\ (a_2\ c_3) \\
(a_2\ b_2)\ (b_3\ c_2)\ (a_1\ c_4) & (a_2\ b_2)\ (b_1\ c_4)\ (a_3\ c_2) \\
(a_3\ b_3)\ (b_1\ c_4)\ (a_2\ c_3) & (a_3\ b_3)\ (b_2\ c_3)\ (a_1\ c_4) \\
\\
(a_1\ b_2)\ (b_1\ c_4)\ (a_3\ c_1) & (a_1\ b_2)\ (b_4\ c_1)\ (a_2\ c_4) \\
(a_2\ b_1)\ (b_4\ c_1)\ (a_1\ c_3) & (a_2\ b_1)\ (b_2\ c_3)\ (a_3\ c_1) \\
(a_3\ b_4)\ (b_2\ c_3)\ (a_2\ c_4) & (a_3\ b_4)\ (b_1\ c_4)\ (a_1\ c_3).
\end{array}
\qquad ..(\mathrm{XII})
$$

Het eerste zestal lijnen staat op zichzelf; uit het tweede kunnen nog 8, uit het derde nog 5 zestallen afgeleid worden; dit hangt hiermede samen, dat de lijnen der oorspronlijke (12_4, 16_3), waarvoor deze getallen de restfiguren zijn, tot de grondvormen $a_1\ b_1\ c_1$, $a_1\ b_i\ c_i$ ($a_i\ b_1\ c_i$, $a_i\ b_i\ c_1$), $a_i\ b_k\ c_l$ (i, k, $l = 2$, 3, 4) kunnen gebracht worden.

Met behulp van de volledige tabel der bedoelde (48_6, 96_3) vindt men gemakkelijk, dat zij vijftientallen van onderling gescheiden lijnen bezit. Als voorbeeld diene de volgende groep.

$$
\left.\begin{array}{ll}
(a_1\ b_2)\ (b_1\ c_4)\ (a_3\ c_1) & (a_1\ b_3)\ (b_1\ c_2)\ (a_4\ c_1) \\
(a_2\ b_1)\ (b_4\ c_1)\ (a_1\ c_3) & (a_3\ b_1)\ (b_2\ c_1)\ (a_1\ c_4) \\
(a_3\ b_4)\ (b_2\ c_3)\ (a_2\ c_4) & (a_2\ b_4)\ (b_3\ c_2)\ (a_3\ c_4) \\
(a_4\ b_3)\ (b_2\ c_4)\ (a_2\ c_3) & (a_4\ b_2)\ (b_3\ c_4)\ (a_3\ c_2) \\
(a_1\ b_4)\ (b_1\ c_3)\ (a_2\ c_1) & (a_2\ b_2)\ (b_3\ c_3)\ (a_4\ c_4) \\
(a_4\ b_1)\ (b_3\ c_1)\ (a_1\ c_2) & (a_3\ b_3)\ (b_4\ c_4)\ (a_2\ c_2) \\
(a_2\ b_3)\ (b_4\ c_2)\ (a_4\ c_3) & (a_4\ b_4)\ (b_2\ c_2)\ (a_3\ c_3) \\
(a_3\ b_2)\ (b_4\ c_3)\ (a_4\ c_2) &
\end{array}\right\} \quad \text{(XIII)}
$$

Het is dus niet mogelijk, om uit deze cf. door de bovengebezigde methode van afzondering eener groep van cf. lijnen, eene eenvoudiger cf. verkrijgen. Maar door op te merken, dat in de cf. $(48_7,\ 112_3)$ van § 4 de lijn $(a_1\ b_1)$, $(b_1\ c_1)$, $(a_1\ c_1)$ voorkomt, die met bovenstaand vijftiental eene groep van 16 onderling gescheiden lijnen vormt, welke samen alle punten der cf. bevatten, komt men tot eene nieuwe $(48_6,\ 96_3)$ door deze 16 lijnen weg te laten.

De eerstgenoemde $(48_6,\ 96_3)$ heeft 144 tweepuntige diagonalen, die in twaalftallen met de punten der oorspronkelijke $(12_4,\ 16_3)$ incident zijn; daar zij elk twee punten der $(48_6,\ 96_3)$ bevatten, komen in elk dezer punten 6 zulke diagonalen samen. Door deze 144 lijnen in de cf. op te nemen, verkrijgt men dus eene cf. $(60_{12},\ 240_3)$, voor welke de lijnen der $(12_4,\ 16_3)$ zespuntige diagonalen zijn.

9. Met het oog op de uitkomsten der vorige §§ zal bij het onderzoek van cf. met vrucht gebruik gemaakt kunnen worden van deze regels.

»Bezit eene cf. $(p\,x_q,\ q\,x_p)$ eene groep van x onderling »gescheiden lijnen, dan levert de afzondering dezer lijnen »eene cf. $(p\,x_{q-1},\ (q-1)\,x_p)$ Heeft zij x diagonalen, welke »ieder eene verschillende groep van p cf. punten bevatten, »dan ontstaat door het toevoegen dezer p=puntige diago»nalen eene cf. $(p\,x_{q+1},\ (q+1)\,x_p)$."

RAPPORT

OVER DE VERHANDELING VAN DEN HEER DR. **J. T. OUDEMANS,**

GETITELD :

BEITRÄGE ZUR KENNTNISS DES CHIROMYS MADAGASCARIENSIS.

(Uitgebracht in de Vergadering van 30 Juni 1888).

De ondergeteekenden hebben de eer, over deze in hunne handen gestelde verhandeling, het volgende mede te deelen.

Genoemde verhandeling, groot 38 folio-pagina's schrift en vergezeld van 3 platen, bevat anatomische onderzoekingen en biologische aanteekeningen over Chiromys madagascariensis, van welke belangwekkende en zeldzame Prosimia van Madagascar tot nog toe slechts weinige exemplaren bekend zijn, terwijl slechts enkele schrijvers zich met haar anatomie hebben beziggehouden. Elk nieuw onderzoek over dit belangrijk dier is dan ook met vreugde te begroeten.

Den schrijver stonden 2 vrouwelijke exemplaren ten dienste. Het eene, in den tuin van het Kon. zoöl. Gen. Natura Artis Magistra gestorven, werd gedeeltelijk versch onderzocht; het andere exemplaar was in alcohol bewaard. Het onderzoek strekte zich uit over het spierstelsel, het oog, de hersenen, het darmkanaal, de bronchiaalvertakkingen, de tepels, alsmede over de wijze waarop het dier zich voedt. Van de figuren behooren er 9 bij het spierstelsel, 4 bij de hersenen, 1 bij het darmkanaal en 1 bij de voedingswijze van het dier.

Aan de behandeling van het spierstelsel is het grootste gedeelte van het onderzoek van den Heer Oudemans gewijd; met uitzondering van de aangezichtsspieren, die kortelings door Ruge zeer volledig bewerkt zijn en van de romp- en staartspieren, heeft de schrijver van het spierstelsel van Chiromys, in 't bizonder van dat der ledematen eene uitvoerige en nauwkeurige beschrijving geleverd. Bij vergelijking met oudere onderzoekingen zooals b. v. met die van Owen, Murie and Mivart en Alix, onderscheidt zich de hier voor ons liggende verhandeling door groote nauwkeurigheid. Het meest stemmen de door den schrijver verkregen resultaten met die van Murie and Mivart overeen. In menig opzicht bevat evenwel het onderzoek van den Heer Oudemans tal van nieuwe bizonderheden. De innervatie der spieren is in hoofdzaak niet nagegaan, hetgeen echter ten volle te verontschuldigen is, wanneer men bedenkt dat bij een dier als Chiromys, het homologiseeren der spieren zoo goed als geen bezwaren oplevert.

Bij de behandeling van het oog bespreekt de schrijver wel de oogleden en de oogspieren, maar van een speciaal onderzoek van den bulbus moest hij door den minder goeden conservatietoestand afzien.

Van de hersenen, (voor de eerste maal dat de hersenen van een Chiromys in verschen toestand onderzocht zijn), werden de grootte, de vorm, de convexiteit der hemisphaeren en de kleine hersenen meer speciaal behandeld, waarbij de schrijver tevens eenige vergelijkingen met de door Owen onderzochte hersenen van een spiritusexemplaar van Chiromys en met de hersenen van Lemur catta en die van Perodicticus Potto ten beste geeft. De nomenclatuur van de sleuven der hemisphaeren ontleent de schrijver aan Krueg, maar onthoudt zich van voorbarige vergelijkingen met bij den mensch voorkomende toestanden.

De door den Heer Oudemans aan het darmkanaal zijner beide exemplaren verrichte metingen doen ons zien, ook wanneer hij ze met de uitkomsten van Owen en Peters vergelijkt, dat de lengte der verschillende onderafdeelingen belangrijk afwisselt. Het onderzoek der bronchiaalvertakkin-

gen stemt overeen met de uitkomsten van PETERS, dat der tepels met de beschrijving van KLAATSCH.

Daar er veel tegenstrijdigheid heerscht over het voedsel van Chiromys, heeft de schrijver de litteratuur daarover nauwkeurig nagegaan en komt op grond van eigen waarnemingen tot de slotsom, dat Chiromys een frugivoor is, ofschoon zij evenwel sommige insecten niet versmaadt. De wijze waarop een nu nog in den Amsterdamschen dierentuin levend voorwerp haar voedsel (appelen en walnoten) tot zich neemt, wordt uitvoerig uiteengezet en door een afbeelding opgehelderd.

De litteratuur is uitvoerig en op doeltreffende wijze behandeld. De afbeeldingen zijn fraai en voortreffelijk uitgevoerd.

Wij zien in de verhandeling van den Heer OUDEMANS een zeer belangrijke en te waardeeren bijdrage tot de kennis van Chiromys, die vele nieuwe feiten aan het licht brengt en verder vele onderdeelen grondiger behandelt dan tot dusver geschied is. Wij aarzelen dan ook niet het onderzoek van den Heer OUDEMANS ter opneming in de Verhandelingen aan de Afdeeling aan te bevelen.

Amsterdam en Leiden,
Juni 1888.

M. FÜRBRINGER,
C. K. HOFFMANN.

RAPPORT

OVER EENE

VERHANDELING VAN DEN HEER DR. **P. H. DOJES**

„OVER DE AFHANKELIJKHEID DER OPLOSBAARHEID VAN DRUK EN TEMPERATUUR".

(Uitgebracht in de Vergadering van 30 Juni 1888).



De verhandeling van den Heer DOJES, waarover ons is opgedragen rapport uit te brengen, heeft tot titel: »de afhankelijkheid der oplosbaarheid van druk en temperatuur". Had de schrijver nauwkeurig willen zijn, dan had hij er wel mogen bijvoegen »der zouten"; immers alleen de oplosbaarheid daarvan wordt behandeld; doch ook dan ware o. i. de titel nog niet juist.

Het volgende geeft beter den inhoud der verhandeling weder: »een betrekking tusschen de verandering in de oplosbaarheid der zouten en de verandering in de spanning van den damp boven die oplossingen". Een vraag, betrekking hebbende op de verandering der electromotorische kracht van enkele cellen met de temperatuur, wordt aan het einde dezer niet zeer groote verhandeling mede door den schrijver behandeld.

In de eerste plaats zoekt de schrijver de betrekking tusschen de verandering in de oplosbaarheid bij drukverhooging en de vermindering in de spanning van den waterdamp boven een geconcentreerde zoutoplossing, vergeleken bij die boven zuiver water. Langs twee verschillende wegen wordt die betrekking verkregen, nl. met behulp van de theorie

van de thermodynamische potentiaal en door de beschouwing van een omkeerbaar isothermisch kringproces, waarbij eerst door druk zout uitgescheiden wordt, daarna water verdampt en ten laatsten het verdampte water weder met het uitgescheiden zout tot de vroegere oplossing wordt teruggebracht. Bij zulk een omkeerbaar isothermisch kringproces is de som der verrichte hoeveelheden arbeid gelijk nul, en het is van deze eigenschap, dat de schrijver gebruik maakt om de formule te vinden, die hem tot de slotsom leidt: dat bij alle zouten, die onder contractie oplossen, de oplosbaarheid bij verhooging van druk vermeerdert en omgekeerd.

Het schijnt ons toe, dat de schrijver dit resultaat als het voornaamste beschouwt wat uit de gevonden formule volgt. Ten minste dit is het eenige gevolg dat afzonderlijk aangeduid en in het licht gesteld wordt. Is dit zoo, dan zou niet veel nieuws gevonden en de formule van niet veel beteekenis zijn, want reeds vóór 15 à 16 jaren is door Gibbs de algemeene regel uitgesproken, waaronder dit als bijzonder geval behoort, nl. »bij verhooging van druk verdwijnt die phase die het grootste volumen heeft, en treedt in de plaats die van het kleinste volumen". Een ander gevolg der gevonden formule echter is óf nieuw óf ten minste veel minder algemeen bekend, nl. hoe de verandering der oplosbaarheid met verhoogden druk berekend zou kunnen worden, indien bekend is de mate waarin de spanning van den waterdamp met het zoutgehalte der oplossing samenhangt. Mocht men, zooals de schrijver doet, aannemen dat de druk regelmatig met aangroeiend zoutgehalte en evenredig daaraan afneemt, — iets dat approximatief bij zeer verdunde oplossingen geldt en wel eens de wet van Wüllner genoemd wordt, — dan liet de gevonden formule ook de bovengenoemde berekening toe. De schrijver waagt zich dan ook aan enkele berekeningen. Maar de overeenstemming met de ervaring is niet zeer groot en dit wordt door hem toegeschreven aan mogelijke fouten der waarneming. Wij schrijven ze toe aan het *niet* gelden der wet van Wüllner.

In de tweede plaats wordt behandeld de verandering der oplosbaarheid met de temperatuur, of liever deze verande-

ring wordt in verband gebracht met de vermindering der dampspanning.

Maar wij zullen niet verder in bijzonderheden treden en liever tot de formuleering van ons advies overgaan.

De verhandeling bevat iets nieuws of ten minste weinig bekends. Dit geeft den doorslag, waar wij anders zouden aarzelen. Want wij hebben tegen de behandeling, vooral uit het oogpunt van duidelijkheid en nauwkeurigheid, bedenkingen. Ook het gebruikte kringproces kan ons niet voldoen. Daarom raden wij de Akademie aan, de verhandeling wel in de Verslagen en Mededeelingen op te nemen; maar den schrijver vooraf met dit rapport in kennis te stellen, opdat hij met de Commissie in overleg trede over aan te brengen verbeteringen.

Amsterdam en *Haarlem*,
28 Juni 1888.

J. D. VAN DER WAALS.
J. BOSSCHA.

OVER EENIGE FORMULES,

BETREKKING HEBBENDE OP DE

VERANDERINGEN IN SAMENSTELLING DER OPLOSSINGEN, DOOR DRUK- EN TEMPERATUURSVERANDERINGEN BEWERKT.

DOOR

Dr. P. H. DOJES.

Inleiding.

Ter rechtvaardiging en verduidelijking van de navolgende toepassingen van de theorie van den thermodynamischen potentiaal mogen hier de volgende beschouwingen voorafgaan.

De bekende theorie van Gibbs leert, dat er chemisch evenwicht bestaat, wanneer de thermodynamische potentiaal eene minimum-waarde heeft. Vooral door Duhem *) is deze theorie systematisch doorgevoerd en toegepast. Ten einde tot grootere kortheid van uitdrukking te geraken, zullen hier eenige symbolische benamingen gebruikt worden. Men beschouwe n.l. een mengsel of oplossing van twee of meer bestanddeelen. De grootte van den thermodynamischen potentiaal, het volume, de energie en de entropie van het geheel hangt af van de hoeveelheid en de verhouding, waarin de bestanddeelen optreden. De bedoelde symbolische uitdrukkingen nu zijn de thermodynamische potentiaal, het volume, de energie

*) Duhem. *Potentiel Thermodynamique etc.* Paris 1886. Men zie ook Planck. *Wied. Ann.* Bd 30 en 31. 1887.

en de entropie van elk der bestanddeelen, zooals zij in het mengsel voorkomen. Men houde wel in 't oog, dat zij alleen symbolisch zijn; hare werkelijke beteekenis moge uit het volgende blijken.

Zij F de thermodynamische potentiaal onder den constanten druk p van eene zekere hoeveelheid van een (homogeen) mengsel, die M_1 G. van de eene en M_2 G. van de andere stof bevat. Zij V het volume van deze hoeveelheid, U en S hare energie, respectievelijk entropie.

Daar F, V, U en S alle homogene functiën van den eersten graad in M_1 en M_2 zijn, bestaan de volgende gelijkheden:

$$M_1 \frac{\partial F}{\partial M_1} + M_2 \frac{\partial F}{\partial M_2} = F$$

$$M_1 \frac{\partial V}{\partial M_1} + M_2 \frac{\partial V}{\partial M_2} = V$$

$$M_1 \frac{\partial U}{\partial M_1} + M_2 \frac{\partial U}{\partial M_2} = U$$

$$M_1 \frac{\partial S}{\partial M_1} + M_2 \frac{\partial S}{\partial M_2} = S.$$

Verder heeft men daar $F = U - TS + pV$ is:

$$\frac{\partial F}{\partial M_1} = \frac{\partial U}{\partial M_1} - T \frac{\partial S}{\partial M_1} + p \frac{\partial V}{\partial M_1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial M_2} = \frac{\partial U}{\partial M_2} - T \frac{\partial S}{\partial M_2} + p \frac{\partial V}{\partial M_2}$$

$$\frac{\partial}{\partial T} \cdot \frac{\partial F}{\partial M_1} = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial U}{\partial M_1} - T \frac{\partial S}{\partial M_1} + p \frac{\partial V}{\partial M_1} \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial M_1} \left(\frac{\partial U}{\partial T} - S - T \frac{\partial S}{\partial T} + p \frac{\partial V}{\partial T} \right)$$

of, daar

$$\frac{\partial U}{\partial T} - T \frac{\partial S}{\partial T} + p \frac{\partial V}{\partial T} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial T} \cdot \frac{\partial F}{\partial M_1} = - \frac{\partial S}{\partial M_1}.$$

Evenzoo is:

$$\frac{\partial}{\partial T} \cdot \frac{\partial F}{\partial M_2} = - \frac{\partial S}{\partial M_2} .$$

Verder is:

$$\frac{\partial}{\partial p} \cdot \frac{\partial F}{\partial M_1} = \frac{\partial}{\partial M_1}\left(\frac{\partial U}{\partial p} - T\frac{\partial S}{\partial p} + p\frac{\partial V}{\partial p} + V\right) = \frac{\partial V}{\partial M_1}$$

en evenzoo:

$$\frac{\partial}{\partial p} \cdot \frac{\partial F}{\partial M_2} = \frac{\partial V}{\partial M_2} .$$

Voert men de volgende notatiën in:

$$\frac{\partial F}{\partial M_1} = F_1 , \quad \frac{\partial F}{\partial M_2} = F_2 , \quad \frac{\partial V}{\partial M_1} = V_1 , \quad \frac{\partial V}{\partial M_2} = V_2 ,$$

$$\frac{\partial U}{\partial M_1} = U_1 , \quad \frac{\partial U}{\partial M_2} = U_2 , \quad \frac{\partial S}{\partial M_1} = S_1 \text{ en } \frac{\partial S}{\partial M_2} = S_2 ;$$

dan bestaan tusschen deze grootheden de betrekkingen:

$$F_1 = U_1 - T S_1 + p V_1$$

$$F_2 = U_2 - T S_2 + p V_2$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial T} = - S_1 , \quad \frac{\partial F_2}{\partial T} = - S_2 , \quad \frac{\partial F_1}{\partial p} = + V_1 \text{ en}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial p} = + V_2 .$$

Tusschen de grootheden F_1, V_1, U_1, en S_1, F_2, V_2, U_2 en S_2 bestaan dus die betrekkingen, welke gelden voor den thermodynamischen potentiaal, het volume, de energie en de entropie van eene onvermengd voorkomende stof. Maar op zich zelf heeft het geen physischen zin, te spreken van den thermodynamischen potentiaal, het volume, de energie en de entropie van elk der bestanddeelen, zooals zij in het mengsel voorkomen.

Voor een mengsel van meer dan twee bestanddeelen gelden gelijke betrekkingen.

Beschouwen wij thans de voorwaarden voor chemisch evenwicht. Laten twee stoffen twee mengsels van verschillende samenstelling vormen; zij treden dan volgens de uitdrukking van GIBBS in twee verschillende phasen op. Voor het eene mengsel, dat M_1 G. resp. M_2 G. der beide bestanddeelen bevat, hebben F, V, U en S; F_1, V_1, U_1 en S_1; F_2, V_2, U_2 en S_2 de bovengemelde beteekenis. f, v, u en s; f_1, v_1, u_1 eu s_1; f_2, v_2, u_2 en s_2 duiden dezelfde grootheden aan voor het andere mengsel, dat m_1, resp. m_2 G. bevat.

Vermeerdert de hoeveelheid m_1 met de oneindig kleine hoeveelheid dm_1 en vermindert dientengevolge M_1 met dm_1, dan is de variatie van den thermodynamischen potentiaal:

$$\frac{\partial f}{\partial m_1} dm_1 - \frac{\partial F}{\partial M_1} d m_1$$

en daar deze functie in den evenwichtstoestand eene minimumwaarde heeft, moet deze variatie gelijk nul zijn. Hieruit volgt:

$$\frac{\partial f}{\partial m_1} - \frac{\partial F}{\partial M_1} = 0 \quad \text{of} \quad f_1 - F_1 = 0.$$

Evenzoo geldt voor het andere bestanddeel;

$$f_2 - F_2 = 0,$$

indien f_2 en F_2 voor dit bestanddeel gelijke beteekenis hebben als f_1 en F_1 voor het eerstgenoemde.

In het vervolg hebben F_1, V_1, U_1 en S_1, F_2, V_2, U_2 en S_2 steeds de bovengemelde beteekenis:

$$\frac{\partial F}{\partial M_1}, \quad \frac{\partial V}{\partial M_1}, \quad \frac{\partial U}{\partial M_1}, \quad \frac{\partial S}{\partial M_1} \text{ enz.;}$$

de symbolische benamingen voor deze functiën: thermodynamische potentiaal, volume, energie en entropie van 1 G.

eener stof, zooals deze in het mengsel voorkomt, zijn hierdoor, wat hare beteekenis betreft, voldoende verklaard.

De in de formules optredende verschillen $v_1 - V_1$, $v_2 - V_2$, $-s_1 + S_1$ en $-s_2 + S_2$ hebben eene gemakkelijk aan te wijzen beteekenis. Immers, vermeerdert de hoeveelheid m_1 met dm_1 en vermindert dus gelijktijdig M_1 met dm_1, dan is de volume-vermeerdering van het systeem der beide mengsels:

$$\frac{\partial v}{\partial m_1} dm_1 - \frac{\partial V}{\partial M_1} dm_1 = dm_1 (v_1 - V_1)$$

$v_1 - V_1$ is dus de volume-vermeerdering, per G. berekend. Analoog is de beteekenis van $v_2 - V_2$. Evenzoo stelt

$$s_1 - S_1 = \frac{\partial s}{\partial m_1} - \frac{\partial S}{\partial M_1}$$

de entropie-vermeerdering voor, die bij de gemelde verandering van het systeem optreedt (ook weder per gewichtseenheid berekend).

Bij het vermengen van twee vloeistoffen kunnen verschillende gevallen voorkomen, waaronder echter twee het menigvuldigst optreden: zij kunnen of geheel zich vermengen, of slechts gedeeltelijk, zóódat twee lagen van verschillende samenstelling ontstaan. De thermodynamica leert, dat de damp boven deze beide vloeistofmengsels geheel dezelfde is en verder, dat zij beide hetzelfde vriespunt hebben. Daarentegen lossen gassen en vaste stoffen in het algemeen slechts tot een bepaald bedrag in eene vloeistof op. Met behulp van den thermodynamischen potentiaal kan men de veranderingen nagaan, die door veranderden druk en temperatuur in de samenstelling der mengsels en oplossingen optreden.

---

1. Twee gedeeltelijk mengbare vloeistoffen.

Beschouwen wij het systeem van de beide vloeistoffen en nemen wij als concreet voorbeeld de twee mengsels van

aethylaether en water. Voor de gemakkelijkheid der notatiën duide men alle grootheden, die op de benedenste laag betrekking hebben, door een' hoofdletter aan; daarentegen door een kleinen letter alle, die voor de bovenste laag gelden. In de eerstgenoemde laag kome voor M_1 G. aether en M_2 G. water; F_1 zij de thermodynamische potentiaal onder constanten druk van 1 G. aether, in deze laag voorkomende, F_2 die voor 1 G. water van dit mengsel, V_1 zij het volume, dat in het mengsel door 1 G. aether wordt ingenomen, V_2 het analoge volume van 1 G. water, S_1 en S_2 stellen de respectieve entropiën voor. (symbolische benamingen met boven verklaarde beteekenis.) Voor de bovenste laag hebben m_1, m_2, f_1, f_2, v_1, v_2, s_1 en s_2 gelijksoortige beteekenis. Men stelle ten slotte $\frac{M_2}{M_1} = H$ en $\frac{m_2}{m_1} = h$.

De beide mengsels verkeeren oorspronkelijk onder den druk van hun damp. In de volgende formules wordt deze kleine druk verwaarloosd. Als evenwichtsvergelijkingen heeft men: $f_1 - F_1 = 0$ en $f_2 - F_2 = 0$. Om den invloed der drukvermeerdering te leeren kennen, heeft men slechts neer te schrijven, dat in den nieuwen evenwichtstoestand de thermodynamische potentialen weer gelijk moeten zijn. Dit geeft:

$$f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial p} dp + \frac{\partial f_1}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial p} dp - F_1 - \frac{\partial F_1}{\partial p} dp - \frac{\partial F_1}{\partial H}\frac{\partial H}{\partial p} dp = 0$$

en

$$f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial p} dp + \frac{\partial f_2}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial p} dp - F_2 - \frac{\partial F_2}{\partial p} dp - \frac{\partial F_2}{\partial H}\frac{\partial H}{\partial p} dp = 0,$$

of daar

$$f_1 - F_1 = 0 \text{ en } f_2 - F_2 = 0:$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial p} + \frac{\partial f_1}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial p} - \frac{\partial F_1}{\partial p} - \frac{\partial F_1}{\partial H} \cdot \frac{\partial H}{\partial p} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial p} + \frac{\partial f_2}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial p} - \frac{\partial F_2}{\partial p} - \frac{\partial F_1}{\partial H} \cdot \frac{\partial H}{\partial p} = 0.$$

Vooreerst heeft men nu de boven (bladz. 228) afgeleide vergelijkingen:

$$\frac{\partial f_1}{\partial p} = v_1, \ \frac{\partial f_2}{\partial p} = v_2, \ \frac{\partial F_1}{\partial p} = V_1, \ \frac{\partial F_2}{\partial p} = V_2;$$

verder bestaan de betrekkingen *):

$$\frac{\partial f_2}{\partial h} = -\frac{1}{h} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial h} \text{ en } \frac{\partial F_2}{\partial H} = -\frac{1}{H} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial H}.$$

Dit alles ingevoerd zijnde, vindt men door oplossing:

$$\frac{\partial log H}{\partial p} = \frac{v_1 - V_1 + h(v_2 - V_2)}{\frac{\partial F_1}{\partial H}(H - h)} \text{ en } \frac{\partial log h}{\partial p} = \frac{v_1 - V_1 + H(v_2 - V)}{\frac{\partial f_1}{\partial h}(H - h)}. \quad (1)$$

De damp boven een vloeistofmengsel bevat dampen der beide vloeistoffen; kent men de wet, welke volgens de partiëele spanning van een der dampen afhangt van de verhouding, waarin beide vloeistoffen gemengd zijn, dan kan men

$$\frac{\partial F_1}{\partial H} \text{ en } \frac{\partial f_1}{\partial h}$$

berekenen. Men make nl. de onderstelling, dat beide dampen zich als volkomen gassen gedragen en dat hunne partiëele spanningen P_1 en P_2 zijn, zoodat de totale dampdruk $P = P_1 + P_2$ is. Is F dan de thermodynamische potentiaal onder den totalen druk P van het vloeistofmengsel, dat M_1 G. van de eene en M_2 G. van de andere vloeistof bevat, en is evenzoo ψ die voor het dampmengsel, dat uit n_1 G. van de eene en uit n_2 G. van de andere stof in dampvorm bestaat, dan bestaat ook hier weer de evenwichtsvoorwaarde:

$$\frac{\partial F}{\partial M_1} - \frac{\partial \psi}{\partial n_1} = 0.$$

Men kan nu ψ nog anders uitdrukken, daar volgens on-

*) Duhem, *Potentiel Thermodynamique*, Paris 1886.

derstelling beide dampen zich als volkomen gassen verhouden. Denkt men zich nl. beide damphoeveelheden van het mengsel gescheiden en beide afzonderlijk op het volume gebracht, dat door het dampmengsel wordt ingenomen, dan is de som van de functiën energie, entropie en thermodynamische potentiaal (onder den betreffenden partiëelen druk) der beide afzonderlijke dampmassa's gelijk die functiën, welke voor het dampmengsel gelden. Is dus φ_1 de thermodynamische potentiaal onder den druk P_1 van 1 G. van den eenen damp en φ_2 die onder den druk P_2 van 1 G. vau den anderen damp, dan is:

$$\psi = n_1 \varphi_1 + n_2 \varphi_2 \text{, waaruit volgt, dat } \frac{\partial \psi}{\partial n_1} = \varphi_1 \text{ is.}$$

Om dit te bewijzen, houde men in 't oog, dat in de formule

$$\frac{\partial F}{\partial M_1} - \frac{\partial \psi}{\partial n_1} = 0$$

de differentiatie van F naar M_1 en van ψ naar n_1 plaats moet hebben bij constante waarde van den totalen druk P. Daar nu φ_1 van P_1 en φ_2 van P_2 afhangt, zullen wij eerst φ_1 en φ_2 uitdrukken in P_1, n_1 en n_2. Duiden $R_1\,T$ en $R_2\,T$ de bekende produkten aan voor 1 G. van elk der dampen, die zich volgen onderstelling als volkomen gassen gedragen, dan is:

$$P_1 = \frac{n_1 R_1}{n_1 R_1 + n_2 R_2} P \text{ en } P_2 = \frac{n_2 R_2}{n_1 R_1 + n_2 R_2} P$$

en dus:

$$\frac{\partial P}{\partial n_1} = \frac{P_2 R_1}{n_1 R_1 + n_2 R_2} = \frac{P_1 P_2}{n_1 P} \text{ en } \frac{\partial P_2}{\partial n_1} = - \frac{P_1 P_2}{n_1 P} \,.$$

Men vindt dus voor $\frac{\partial \psi}{\partial n_1}$, wanneer P constant blijft:

$$\frac{\partial \psi}{\partial n_1} = \varphi_1 + n_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial P_1} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial n_1} + n_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial P_2} \cdot \frac{\partial P_2}{\partial n_1} \,.$$

Daar

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial P_1} = V^{d_1} = \frac{R_1\, T}{P_1}$$

(het volume van 1 G. van den damp onder den druk P_1) en evenzoo

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial P_2} = \frac{R_2\, T}{P_2}, \quad \frac{n_1\, R_1}{P_1} = \frac{n_2\, R_2}{P_2}$$

en eindelijk

$$\frac{\partial P_1}{d n_1} = - \frac{\partial P_2}{\partial n_1},$$

vallen de twee laatste termen tegen elkaar weg en er blijft over:

$$\frac{\partial \psi}{\partial n_1} = \varphi_1 .$$

Evenzoo is

$$\frac{\partial \psi}{\partial n_2} = \varphi_2 .$$

Verandert nu de verhouding $\frac{M_2}{M_1} = H$, dan verandert tevens de dampdruk. $F_1 = \frac{\partial F}{\partial M_1}$ hangt zoowel van H als van den totalen druk P af; $\frac{\partial \psi}{\partial n_1} = \varphi_1$ zijnde, verandert alleen voor zoover de partiëele druk P_1 verandert.

De differentiatie naar H geeft dus:

$$\frac{\partial F_1}{\partial H} + \frac{\partial F_1}{\partial P} \cdot \frac{\partial P}{\partial H} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial P_1} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial H} = 0.$$

Nu is $\frac{\partial \varphi_1}{\partial P_1} = V_{d_1}$, waarin V_{d_1} het volume van 1 G. van dezen damp onder den druk P_1 voorstelt.

$$\frac{\partial F}{\partial P} = V_1 = \frac{\partial V}{\partial M_1}$$

is de volume-vermeerdering van het vloeistofmengsel, veroorzaakt door dat de gewichtseenheid van de vloeistof M_1 in het mengsel overgaat.

Men vindt dus:

$$\frac{\partial F_1}{\partial H} = V_{d_1} \frac{\partial P_1}{\partial H} - V_1 \frac{\partial P}{\partial H}.$$

Verwaarloost men, daar V_1 klein is tegenover V_{d_1} en $\frac{\partial P}{\partial H}$ slechts om $\frac{\partial P_2}{\partial H}$ grooter is dan $\frac{\partial P_1}{\partial H}$, den term $V_1 \frac{\partial P}{\partial H}$, dan komt men tot de benaderde formule:

$$\frac{\partial F_1}{\partial H} = V_{d_1} \frac{\partial P_1}{\partial H}.$$

Evenzoo is:

$$\frac{\partial f_1}{\partial h} = v_{d_1} \frac{\partial p_1}{\partial h}.$$

Neemt men verder nog aan, dat de wet van MARIOTTE geldig is, en stelt men diensvolgens $P_1 V_{d_1} = p_1 v_{d_1} = R_1 T$, dan komt men tot de vergelijkingen:

$$\frac{\partial F_1}{\partial H} = V_{d_1} \frac{\partial P_1}{\partial H} = \frac{R_1 T}{P_1} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial H} \text{ en } \frac{\partial f_1}{\partial h} = v_{d_1} \frac{\partial p_1}{\partial h} = \frac{R_1 T}{p_1} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial h}.$$

Voor het geval, waarop de vergelijkingen (1) betrekking hebben is $P_1 = p_1$ te stellen;

$$\frac{\partial P_1}{\partial H} \quad \text{en} \quad \frac{\partial p_1}{\partial h}$$

zijn echter verschillend. De invoering van deze waarden geeft de vergelijkingen:

$$\frac{\partial \log H}{\partial p} = \frac{v_1 - V_1 + h(v_2 - V_2)}{R_1 T \cdot \frac{\partial P_1}{\partial H}(H - h)} P_1 \text{ en}$$

$$\frac{\partial \log h}{\partial p} = \frac{v_1 - V_1 + H(v_2 - V_2)}{R_1 T \cdot \frac{\partial p_1}{\partial h}(H - h)} P_1 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1^a)$$

Alle tot nu toe uitgevoerde experimenteele onderzoekingen schijnen te leeren, dat in deze formules $\frac{\partial p_1}{\partial h}$ en $\frac{\partial P_1}{\partial H}$ negatief zijn en wel is $-\frac{\partial p_1}{\partial h} > -\frac{\partial P_1}{\partial H}$.

Hebben $v_1 - V_1$ en $v_2 - V_2$ hetzelfde teeken, dan is dit ook het geval met $\frac{\partial h}{\partial p}$ en $\frac{\partial H}{\partial p}$. Opdat na drukverhooging de beide mengsels in samenstelling minder van elkander verschillen, hetgeen den overgang vormt tot volkomen vermenging, moet $\frac{\partial h}{\partial p}$ positief en $\frac{\partial H}{\partial p}$ negatief zijn; hieruit volgt $v_1 - V_1 < 0$ en $v_2 - V_2 > 0$; deze twee laatste voorwaarden zijn echter niet voldoende. De verandering der concentratie door druk verhooging is verder, al het overige gelijk zijnde, omgekeerd evenredig met de vermindering in dampspanning.

De afhankelijkheid der samenstelling der twee lagen van de temperatuur wordt aangegeven door de twee vergelijkingen:

$$\frac{\partial f_1}{\partial T} + \frac{\partial f_1}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial T} - \frac{\partial F_1}{\partial T} - \frac{\partial F_1}{\partial H} \cdot \frac{\partial H}{\partial T} = 0 \text{ en}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial T} + \frac{\partial f_2}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial T} - \frac{\partial F_2}{\partial T} - \frac{\partial F_2}{\partial H} \cdot \frac{\partial H}{\partial T} = 0 .$$

Hierin is:

$$\frac{\partial f_1}{\partial T} = -s_1, \frac{\partial F_1}{\partial T} = -S_1, \frac{\partial f_2}{\partial T} = -s_2 \text{ en } \frac{\partial F_2}{\partial T} = -S_2.$$

Vermeerdert m_1 met $d\,m_1$ en vermindert M_1 met dm_1, dan worde in 't geheel eene warmtehoeveelheid opgenomen, gelijk aan $\lambda_1\, d\,m_1$. Vermeerdert m_2 met $d\,m_2$ en M_2 met $-d\,m_2$, dan worde $\lambda_2\, d\,m_2$ opgenomen. Met het oog hierop, bestaan dan de gelijkheden:

$$\frac{\partial f_1}{\partial T}-\frac{\partial F_1}{\partial T}=-s_1+S_1=-\frac{\lambda_1}{T} \text{ en } \frac{\partial f_2}{\partial T}-\frac{\partial F_2}{\partial T}=-s_2+S_2=-\frac{\lambda_2}{T}.$$

Daar verder:

$$\frac{\partial f_2}{\partial h}=-\frac{1}{h}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial h} \text{ en } \frac{\partial F_2}{\partial H}=-\frac{1}{H}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial H},$$

gaan de bovenstaande vergelijkingen over in:

$$-\frac{\lambda_1}{T}=\frac{\partial F_1}{\partial H}\cdot\frac{\partial H}{\partial T}-\frac{\partial f_1}{\partial h}\cdot\frac{\partial h}{\partial T} \text{ en}$$

$$-\frac{\lambda_2}{T}=-\frac{1}{H}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial H}\cdot\frac{\partial H}{\partial T}+\frac{1}{h}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial h}\cdot\frac{\partial h}{\partial T},$$

waaruit door oplossing volgt:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\lambda_1+h\lambda_2}{T}&=\frac{\partial log H}{\partial T}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial H}(H-h)=\frac{\partial log H}{\partial T}\cdot V_{d_1}\cdot\frac{\partial P_1}{\partial H}(H-h) \\ -\frac{\lambda_1+H\lambda_2}{T}&=\frac{\partial log\, h}{\partial T}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial h}(H-h)=\frac{\partial log\, h}{\partial T}\cdot v_{d_1}\cdot\frac{\partial p_1}{\partial h}(H-h) \end{aligned}\right\} .(2)$$

Men kan verder nog voor $V_{d_1}\,\frac{\partial P_1}{\partial H}$ en $v_{d_1}\,\frac{\partial p_1}{\partial h}$ de boven ontwikkelde waarden invoeren.

Over de afhankelijkheid der samenstelling der twee mengsels van den druk zijn in 't geheel geen proeven genomen; ook die over de veranderlijkheid met de temperatuur zijn weinig talrijk *).

Opdat temperatuursverhooging het verschil in samenstelling verminderе, moet $\lambda_1 + h\,\lambda_2 < 0$ en $\lambda_1 + H\,\lambda_2 > 0$ zijn, waaruit volgt: $\lambda_1 < 0$ en $\lambda_2 > 0$; deze laatste twee voorwaarden zijn evenwel niet voldoende.

De combinatie van de vergelijkingen (1) en (2) geeft:

*) Ostwald, *Lehrbuch der allgemeinen Chemie.*

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial p} &= -\frac{\partial H}{\partial T} \cdot \frac{v_1 - V_1 + h(v_2 - V_2)}{\lambda_1 + h\lambda_2} T \\ \text{en} \quad \frac{\partial h}{\partial p} &= -\frac{\partial h}{\partial T} \cdot \frac{v_1 - V_1 + H(v_2 - V_2)}{\lambda_1 + H\lambda_2} T\end{aligned}\right\} \ldots (3)$$

---

2. Vaste lichamen en gassen.

Veel eenvoudiger zijn de formules, die de afhankelijkheid der oplosbaarheid van vaste stoffen en gassen van temperatuur en druk aangeven.

Bij de notatiën neme men aan, dat de index 1 op de vloeistof, 2 op de vaste stof of het gas slaat. f_2 zij de thermodynamische potentiaal onder constanten druk van 1 G. opgelost, ψ_2 die van 1 G. onopgelost zout, v_2 en V_2 de volumina, s_2 en Σ_2 de entropiën van 1 G. zout in opgelosten, resp. in onopgelosten toestand. (symbolisch op te vatten.) h is de gewichtsverhouding, waarin zout en vloeistof in de oplossing voorkomen.

Alsdan gelden de vergelijkingen:

$$\frac{\partial f_2}{\partial p} + \frac{\partial f_2}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial p} - \frac{\partial \psi_2}{\partial p} = 0$$

voor de veranderlijkheid met den druk en

$$\frac{\partial f_2}{\partial T} + \frac{\partial f_2}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial T} - \frac{\partial \psi_2}{\partial T} = 0$$

voor die met de temperatuur.

Men heeft:

$$\frac{\partial f_2}{\partial p} = v_2, \ \frac{\partial \psi_2}{\partial p} = V_2, \ \frac{\partial f_2}{\partial h} = -\frac{1}{h}\frac{\partial f_1}{\partial h}, \ \frac{\partial f_2}{\partial T} = -s_2, \ \frac{\partial \psi_2}{\partial T} = -\Sigma_2.$$

Stelt men $s_2 - \Sigma_2 = \frac{\Lambda_2}{T}$, dan is Λ_2 de warmtehoeveel-

heid, die opgenomen wordt, wanneer eene kleine zouthoeveelheid in eene bijna verzadigde oplossing overgaat (per G. berekend).

De invoering al dezer waarden, geeft de twee vergelijkingen:

$$\frac{\partial \log h}{\partial p} = - \frac{V_2 - v_2}{\frac{\partial f_1}{\partial h}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

en

$$\frac{\partial \log h}{\partial T} = - \frac{A_2}{T \frac{\partial f_1}{\partial h}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Door combinatie van (4) en (5) vindt men:

$$\frac{\partial h}{\partial p} = \frac{V_2 - v_2}{A_2} T \cdot \frac{\partial h}{\partial T} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Stellen v_{d_1} en p_1 volume en druk van den damp voor boven de verzadigde oplossing en volgt de damp de wet van MARIOTTE, dan is:

$$\frac{\partial f_1}{\partial h} = v_{d_1} \frac{\partial p_1}{\partial h} = R_1 T \cdot \frac{\partial \log p_1}{\partial h}$$

en (4) en (5) gaan over is:

$$\frac{\partial \log h}{\partial p} = - \frac{V_2 - v_2}{R_1 T \cdot \frac{\partial \log p_1}{\partial h}} \quad \ldots\ldots\ldots (4^a)$$

en

$$\frac{\partial \log h}{\partial T} = - \frac{A_2}{R_1 T^2 \cdot \frac{\partial \log p_1}{\partial h}} \quad \ldots\ldots (5^a)$$

Zeer eenvoudig worden deze formules, indien de wet van WÜLLNER geldig is; alsdan heeft $\frac{\partial p_1}{\partial h}$ de waarde $-b$, b

eene constante zijnde, die alleen nog van de temperatuur afhangt. Deze substitutie uitvoerende, vindt men:

$$\frac{\partial \log h}{\partial p} = \frac{p_1}{b R_1 T}(V_2 - v_2) \text{ en } \frac{\partial \log h}{\partial T} = \frac{p_1}{b R_1 T^2} A_2.$$

De formule (6) is door Braun *) langs anderen weg afgeleid; de formule (5^a) door Duhem †) met behulp van den thermodynamischen potentiaal. De door Kirchhoff §) afgeleide formule voor de oplossingswarmte stemt niet met de door Duhem gegevene overeen.

Voor zoutoplossingen zijn door Sorby **) eenige quantitatieve bepalingen omtrent de verandering der oplosbaarheid door drukverhooging geschied. Tammann heeft ††) verder voor de oplossingen, die Sorby onderzocht, ook de dampspanningen onderzocht, zoodat men aan zijne tabellen de waarde van b ontleenen kan. De overeenstemming tusschen de waargenomen en de berekende waarde van $\frac{\partial h}{\partial p}$ is echter vrij slecht en is waarschijnlijk te verklaren, hetzij door waarnemingsfouten, bij de bepaling van dergelijke kleine grootheden als $\frac{d h}{d p}$ en $V_2 - v_2$ noodzakelijk begaan of door

---

*) F. Braun, *Wied. Annalen,* Bd. 30, pag. 250, 1887. Braun begaat overigens eene onnauwkeurigheid door te stellen: (pag. 253):

$$u - \bar{\omega} + k \frac{\partial u}{\partial g} = - I \lambda,$$

hetgeen streng genomen moet zijn:

$$u - \bar{\omega} + k \frac{\partial u}{\partial g} = - I \lambda - p \nu \varphi.$$

Daardoor wordt zijne eindvergelijkingen volmaakt gelijk aan de hier ontwikkelde:

$$\varepsilon I \lambda = T \eta \nu \varphi.$$

†) Duhem, *Comptes Rendus,* T. 104, pag. 683, 1887.

§) Kirchhoff, *Poggend. Ann.,* Bd. 103, pag. 177, 1858.

**) Sorby, *Phil. Mag.,* Vol. 27, 4th Ser., pag. 145, 1864.

††) Tammann, *Wied. Ann.,* Bd. 24, pag. 523, 1885.

de onjuistheid van de wet van WÜLLNER. Ook voor de meest verdunde oplossing (11,05 G. $K_2 SO_4$ in 100 G. water) is de overeenstemming onbevredigend; SORBY geeft aan 0,0002914, de berekening levert 0,0002207. p is daarbij in atmosfeeren uitgedrukt.

Voor de oplossing van gassen in niet of weinig vluchtige vloeistoffen, gelden geheel analoge formules. De index 1 hebbe betrekking op de vloeistof, de index 2 op het gas. F_2 zij de thermodynamische potentiaal onder constanten druk van 1 G. der gasvormige stof, f_2 die van 1 G. opgeloste stof; v_2 en V_2 zij het volumen, s_2 en S_2 de entropie in gasvormigen, resp. in opgelosten toestand (symbolische benamingen.) h zij de verhouding van de gewichtshoeveelheden gas en vloeistof, waarin zij in de oplossing voorkomen.

De gelijkheid $f_2 - F_2 = 0$ geeft door differentiatie naar p en T:

$$\frac{\partial F_2}{\partial p} - \frac{\partial f_2}{\partial p} - \frac{\partial f_2}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial p} = 0 \text{ en } \frac{\partial F_2}{\partial T} - \frac{\partial f_2}{\partial T} - \frac{\partial f_2}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial T} = 0.$$

Stelt men $S_2 - s_2 = \frac{L_2}{T}$, dan beteekent $L_2\, d\, m_2$ de (negatieve) warmtehoeveelheid, die opgenomen wordt, wanneer bij constante temperatuur eene kleine gashoeveelheid $d\, m_2$ door de bijna verzadigde oplossing wordt geabsorbeerd. Door invoering van deze waarde en door substitutie van $\frac{\partial f_2}{\partial p}$ enz. door hunne bekende waarden, vindt men:

$$v_2 - V_2 = \frac{\partial f_2}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial p} \text{ en } \frac{L_2}{T} = \frac{\partial f_2}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial T}.$$

De combinatie van deze beide vergelijkingen geeft:

$$\frac{\partial h}{\partial p} = \frac{\partial h}{\partial T} \frac{v_2 - V_2}{L_2} T.$$

Bij niet te hoogen druk mag men V_2 tegenover v_2 ver-

waarloozen; volgt verder het gas de wet van MARIOTTE, dan is:

$$v_2 = \frac{R\,T}{p}$$

en de laatste vergelijking verandert in:

$$p\frac{\partial h}{\partial p} = \frac{\partial h}{\partial T}\frac{R\,T^2}{L_2}.$$

Daar volgens de wet van HENRY $h = p\,\beta$, waarin β den absorptie-coëfficiënt voorstelt, die niet van p afhangt, gaat deze formule over in:

$$L_2 = R\,T^2 \cdot \frac{\partial\, log\, \beta}{d\,T}$$

en deze stemt geheel overeen met de vroeger langs anderen weg door KIRCHHOFF *) afgeleide.

---

3. BEVRIEZING VAN ZOUTOPLOSSINGEN.

De analogie tusschen het verschijnsel der verzadiging en dat der bevriezing leidt er toe, ook den invloed van den druk op dit verschijnsel te bespreken. Bij de verzadigingstemperatuur is de oplossing in evenwicht met vast zout; bij het vriespunt in evenwicht met ijs.

Zij (symbolisch) f_1 weder de thermodynamische potentiaal onder constanten druk van 1 G. water, in de oplossing voorkomende, ψ_1 die van 1 G. ijs. Alsdan is bij het vriespunt $f_1 - \psi_1 = 0$. Indien men nu den druk verhoogt, kan men de concentratie van de oplossing berekenen, die onder dezen hoogeren druk *hetzelfde vriespunt* heeft. De gelijkheid $f_1 - \psi_1 = 0$ gedifferentiëerd, geeft:

*) KIRCHHOFF, l. c. pag. 194.

$$\frac{\partial f_1}{\partial p} + \frac{\partial f_1}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial p} - \frac{\partial \psi_1}{\partial p} = 0 \text{ of } \frac{\partial h}{\partial p} = \frac{V_1 - v_1}{\frac{\partial f_1}{\partial h}}.$$

V_1 is het volumen van 1 G. ijs, (bij de temperatuur van het vriespunt der oplossing onder den druk p) en v_1 dat van 1 G. water, zooals dit in de oplossing voorkomt (symbolisch).

Daar

$$\frac{\partial f_1}{\partial h} = v_{d_1} \frac{\partial p_1}{\partial h}$$

en $\frac{\partial p_1}{\partial h}$ negatief is, daar verder het specifiek volumen van ijs grooter is dan dat van zuiver water en water in 't algemeen onder contractie door eene oplossing wordt opgenomen, is $V_1 - v_1$ positief; hieruit volgt dat $\frac{\partial h}{\partial p}$ negatief is, m. a. w. eene meer verdunde oplossing heeft onder hoogeren druk hetzelfde vriespunt.

De temperatuursverandering, die men moet veroorzaken, opdat eene oplossing van *dezelfde concentratie* onder verhoogden druk met ijs in evenwicht is, wordt gegeven door de vergelijking:

$$\frac{\partial f_1}{\partial p} + \frac{\partial f_1}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} - \frac{\partial \psi_1}{\partial p} - \frac{\partial \psi_1}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial p} = 0.$$

Men stelle weder

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial T} - \frac{\partial f_1}{\partial T} = \frac{L_1}{T};$$

L_1 beteekent dan de naar verhouding voor 1 G. berekende hoeveelheid warmte, die opgenomen wordt, wanneer eene kleine hoeveelheid ijs bij het vriespunt in de zoutoplossing overgaat. Bijgevolg is:

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{v_1 - V_1}{L_1} T.$$

Daar voor waterige oplossingen algemeen $v_1 < V_1$ en L_1 (de som van de smeltingswarmte van ijs en van de verdunningswarmte) positief is, heeft $\frac{\partial T}{\partial p}$ eene negatieve waarde.

Wanneer de volumeverandering van het oplossingsmiddel bij den overgang van den vasten in den vloeibaren toestand verschillend teeken heeft van die bij den overgang van de vloeistof in de oplossing, dan bestaat de mogelijkheid, dat eene oplossing zich onder vermeerderden druk in omgekeerden zin gedraagt als het zuivere oplossingsmiddel.

De vraag, naar de concentratieverandering eener oplossing, die bij veranderde temperatuur met ijs in aanraking blijft, wordt beantwoord door de differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial f_1}{\partial T} + \frac{\partial f_1}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial T} - \frac{\partial \psi_1}{\partial T} = 0 ,$$

of daar:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial T} - \frac{\partial f_1}{\partial T} = \frac{L_1}{T}$$

is, volgt uit deze gelijkheid:

$$\frac{\partial h}{\partial T} = \frac{L_1}{T \frac{\partial f_1}{\partial h}} .$$

In dezen vorm geeft de vergelijking de vermindering der concentratie aan, die de oplossing moet ondergaan, opdat zij bij verhoogde temperatuur met ijs in evenwicht is. Het omgekeerde differentiaal-quotiënt $\frac{\partial T}{\partial h}$ geeft dus eenvoudig aan, met hoeveel de temperatuur verlaagd moet worden, wanneer h met dh wordt vermeerderd, m. a. w. $\frac{\partial T}{\partial h}$ is de verlaging van het vriespunt. Men vindt dus daarvoor:

$$\frac{\partial T}{\partial h} = \frac{T \frac{\partial f_1}{\partial h}}{L_1} .$$

Voor verdunde oplossingen gaat L_1 over in de smeltingswarmte van ijs; daar verder $\frac{\partial f_1}{\partial h} = v_{d_1} \frac{\partial p_1}{\partial h}$ en v_{d_1} het volume voorstelt van 1 G. damp boven ijs bij 0°, drukt deze vergelijking uit, dat voor alle verdunde oplossingen de verlaging van het vriespunt evenredig is met de vermindering der dampspanning.

Men kan evenwel ook voor oplossingen van willekeurige concentratie aan deze formule eene merkwaardige en volkomen strenge gedaante geven. Daar nl. bij het vriespunt eener oplossing onder den druk van haren damp (bij het drievoudige punt) deze druk gelijk is aan dien van den damp boven ijs, kan men L_1 gemakkelijk uitdrukken. Men late nl. bij het drievoudige punt eene kleine hoeveelheid ijs verdampen; deze damphoeveelheid voere men, zonder voorafgaande compressie (daar de dampspanningen gelijk zijn) in de oplossing over.

Alsdan ziet men, dat L_1 het verschil is van de twee verdampingswarmten, onverschillig of de damp zich als volkomen gas gedraagt of niet. Zij π de spanning van den waterdamp boven ijs en p_1 die boven de zoutoplossing; bij het drievoudige punt van de oplossing is $p_1 = \pi$; de specifieke volumina van den damp zijn dus ook dezelfde.

Men vindt dus:

$$L_1 = v_{d_1} T \left(\frac{d\pi}{dT} - \frac{\partial p_1}{\partial T}\right).$$

Dit in

$$\frac{\partial T}{\partial h} = T \frac{\frac{\partial f_1}{\partial h}}{L_1}$$

ingevoerd zijnde, geeft:

$$\frac{\partial T}{\partial h} = \frac{T v_{d_1} \frac{\partial p_1}{\partial h}}{T v_{d_1} \left(\frac{d\pi}{dT} - \frac{\partial p_1}{\partial T}\right)} = \frac{\frac{\partial p_1}{\partial h}}{\frac{d\pi}{dT} - \frac{\partial p_1}{\partial T}}.$$

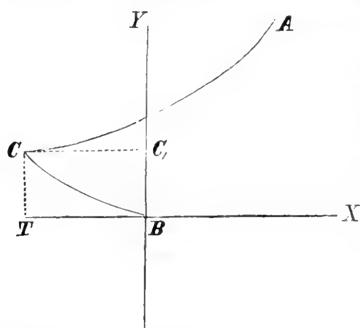
De verlaging van het vriespunt door eene bepaalde ver-

meerdering der concentratie is ook bij eene willekeurig geconcentreerde oplossing evenredig met de vermindering in dampspanning, door dezelfde concentratie-vermeerdering veroorzaakt; de veranderlijke proportionaliteitsfactor $\frac{d\pi}{dT} - \frac{\partial p_1}{\partial T}$ wijst op de discontinuïteit, waarmede bij het vriespunt der zoutoplossing de lijn harer dampspanning in die der spanning boven ijs overgaat.

---

4. Cryohydraten

Ten slotte zij het mij vergund hier het probleem te behandelen omtrent de samenstelling van een cryohydraat *).



Een cryohydraat is eene oplossing, die tegelijkertijd met ijs en zout in evenwicht is; uit deze oplossing scheidt zich bij het bevriezen ijs en zout in zoo snelle opeenvolging uit, dat zij schijnbaar eene homogene, vaste massa vormen †).

Zij in nevenstaande figuur X de lijn der temperaturen, B het 0-punt der Celsius-schaal en Y de lijn der zouthoeveelheden, opgelost in 100 G. water. Zij $A\,C$ de oplosbaarheidslijn en $B\,C$ de lijn van het vriespunt. Eene oplossing van het gehalte $B\,C_1$ heeft haar vriespunt bij T^0 en is tevens verzadigd; zij is dus een cryohydraat. De beide lijnen snijden elkaar slechts eenmaal en eindigen beide in het punt C.

De hoeken, die de raaklijnen in C, aan de beide krommen getrokken, met de X-as maken, hebben tot tangenten:

---

*) Dit probleem is zeer onlangs, maar op m i onjuiste wijze behandeld door Parker. *Phil. Mag.* 5th Ser., N°. 156, pag. 406, *May.* 1888.

†) Volgens Guthrie is eigenlijk deze vaste massa van dezelfde procentische samenstelling als de oplossing een cryohydraat.

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_{AC} = \frac{-\Lambda_2 h}{T v_{d_1} \frac{\partial p_1}{\partial h}} \quad \text{en} \quad \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_{BC} = \frac{L_1}{T v_{d_1} \frac{\partial p_1}{\partial h}};$$

de verhoudingen der tangenten is eenvoudig:

$$\frac{\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_{AC}}{\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_{BC}} = -\frac{\Lambda_2 h}{L_1}.$$

Om den invloed van den druk op de samenstelling van een cryohydraat na te gaan, voere men de volgende notatiën in. f_1 zij de thermodynamische potentiaal onder constanten druk van 1 G. water in de oplossing voorkomende, ψ_1 die van 1 G. ijs, f_2 die van 1 G. opgelost zout en ψ_2 die van 1 G. vast zout. Verder beteekenen v_1, v_2 de volumina van 1 G. water en zout, zooals zij in de oplossing voorkomen, V_1 en V_2 de specifieke volumina van ijs en zout; s_1, s_2, Σ_1 en Σ_2 de respectieve entropiën (als steeds symbolische benamingen).

Alsdan gelden onder den kleinen druk van den damp boven het cryohydraat, welken druk men verwaarloozen mag, de gelijkheden:

$$f_1 - \psi_1 = 0 \quad \text{en} \quad f_2 - \psi_2 = 0.$$

Den invloed der drukverhooging leert men kennen door differentiatie van deze vergelijkingen, waarbij T en h als functiën van p zijn te beschouwen. Deze geeft:

$$\frac{\partial f_1}{\partial p} + \frac{\partial f_1}{\partial h}\left(\frac{\partial h}{\partial p} + \frac{\partial h}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}\right) + \frac{\partial f_1}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p} - \frac{\partial \psi_1}{\partial p} - \frac{\partial \psi_1}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p} = 0,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial p} + \frac{\partial f_2}{\partial h}\left(\frac{\partial h}{\partial p} + \frac{\partial h}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}\right) + \frac{\partial f_2}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p} - \frac{\partial \psi_2}{\partial p} - \frac{\partial \psi_2}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p} = 0.$$

Stellen wij:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial T} - \frac{\partial f_1}{\partial T} = \frac{L_1}{T} \quad \text{en} \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial T} - \frac{\partial f_2}{\partial T} = \frac{A_2}{T} \ ;$$

de beteekenis van L_1 en A_2 is duidelijk.

Na

$$\frac{\partial f_2}{\partial h} = - \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial h} \quad \text{en} \quad \frac{\partial f_1}{\partial p} = v_1 \, , \ \frac{\partial F_1}{\partial p} = V_1 \ \text{enz.}$$

gesteld te hebben, vindt men door oplossing:

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{v_1 - V_1 + h(v_2 - V_2)}{L_1 + h A_2} \, T$$

en

$$\frac{\partial h}{\partial p} + \frac{\partial h}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} = \frac{L_1 (v_2 - V_2) - A_2 (v_1 - V_1)}{\frac{\partial f_1}{\partial h} \, (L_1 + h A_2)} \, h.$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p} + \frac{\partial h}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \right) dp$$

geeft de totale verandering in samenstelling aan, door de drukverhooging dp veroorzaakt.

L_1 en A_2 zijn in 't algemeen beide positief; $v_1 - V_1$ is (voor waterige oplossingen) in 't algemeen negatief, evenzoo $v_2 - V_2$; de beide termen van den teller hebben dus hetzelfde teeken en het kan gebeuren als een bijzonder geval, dat $L_1 (v_2 - V_2) = A_2 (v_1 - V_1)$ is en in dit geval zou de samenstelling van het cryohydraat onafhankelijk zijn van den druk.

In het algemeen zijn echter deze grootheden niet gelijk en men ziet, dat de concentratie van het cryohydraat wel van den druk afhangt *).

---

*) PARKER meent bewezen te hebben, dat de samenstelling onveranderlijk is.

Daar $\frac{\partial f_1}{\partial h} = v_{d_1} \frac{\partial p_1}{\partial h}$ correspondeert, al het overige gelijk blijvende, eene groote veranderiug in samenstelling met eene kleine vermindering in dampspanning.

$\frac{\partial T}{\partial p}$ is algemeen negatief; het vriespunt van het cryohydraat wordt dus door druk verlaagd.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 29 September 1888.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voorzitter, MAC GILLAVRY, BEHRENS, PLACE, KORTEWEG, FRANCHIMONT, HOOGEWERFF, DE VRIES, BEYERINCK, MARTIN, HOFFMANN, SCHOUTE, ZEEMAN, BIERENS DE HAAN, BAEHR, STOKVIS, HUBRECHT, FORSTER, RAUWENHOFF, VAN 'T HOFF, SCHOLS, J. A. C. OUDEMANS, LORENTZ, A. C. OUDEMANS JR., GRINWIS, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, VAN DIESEN, PEKELHARING, VAN DORP, VAN BEMMELEN, KAPTEYN, GUNNING en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1⁰. H. DUMONCEAU, Bibliothecaris van Z. M. den Koning, 's Gravenhage, 8 September 1888; 2⁰. het Ministerie van Buitenlandsche Zaken, 's Gravenhage, 10 September 1888; 3⁰. het Minesterie van Oorlog, 's Gravenhage, 7 September 1888; 4⁰. het Ministerie van Marine, 's Gravenhage, 7 September 1888; 5⁰. het Ministerie van Justitie, 's Gravenhage, 12 September 1888; 6⁰. den Commissaris des Konings in Noord-Holland te Haarlem, 8 September 1888; 7⁰. Burge-

meester en Wethouders van Amsterdam, 7 September 1888; 8⁰. Curatoren der Rijks-Universiteit te Leiden, 14 September 1888; 9⁰. Curatoren der Rijks-Universiteit te Utrecht, 11 September 1888; 10⁰. Curatoren der Rijks-Universiteit te Groningen, 7 September 1888; 11⁰. H. C. ROGGE, Bibliothecaris der Universiteits-Bibliotheek te Amsterdam, 7 September 1888; 12⁰. A. J. VAN PESCH, Bibliothecaris van het wiskundig Genootschap »Een onvermoeide arbeid komt alles te boven" te Amsterdam, 7 September 1888; 13⁰. Directeuren der Nederlandsche Handelmaatschappij te Amsterdam, 7 September 1888; 14⁰. GUYE, Redacteur van het Nederlandsch Tijdschrift voor Geneeskunde te Amsterdam, 7 September 1888; 15⁰. A. J. ENSCHEDÉ, Bibliothecaris der Stads-Bibliotheek te Haarlem, 8 September 1888; 16⁰. J. BOSSCHA, Secretaris van de Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen te Haarlem, 8 September 1888; 17⁰. G. C. W. BOHNENSIEG, Conservator van Teyler's Stichting te Haarlem, 19 September 1888; 18⁰. H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Directeur der Sterrenwacht te Leiden, 1888; 19⁰. A. KLUYVER, Bibliothecaris van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden, 19 September 1888; 20⁰. A. R. ARNTZENIUS, Griffier van de Tweede Kamer der Staten Generaal te 's Gravenhage, 8 September 1888; 21⁰. H. VOLLENHOVEN, 's Gravenhage, 10 September 1888; 22⁰. J. TIDEMAN, Secretaris van het koninklijk Instituut van Ingenieurs te 's Gravenhage, 8 September 1888; 23⁰. T. C. L. WIJNMALEN, Secretaris van het koninklijk Instituut voor Taal-, Land- en Volkenkunde te 's Gravenhage, 17 September 1888; 24⁰. J. F. L. SCHNEIDER, Bibliothecaris der polytechnische School te Delft, 23 Juli 1888; 25⁰. R. M. VAN LIJNDEN, Secretaris van het provinciaal Utrechtsch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen te Utrecht, Juni 1888; 26⁰. W. F. C. VAN LAAK JR., Bibliothecaris der Gemeente-Bibliotheek te Arnhem 1888; 27⁰. L. BROEKEMA, Directeur der Rijkslandbouwschool te Wageningen, 10 September 1888; 28⁰. Burgemeester en Wethouders der stad Zutphen, 10 September 1888; 29⁰. KRUSEMAN, Secretaris van het Zeeuwsch Genootschap der Wetenschappen te Middelburg, 1888; 30⁰. J. L. BERNS, Biblio-

thecaris der provinciale Bibliotheek in Friesland te Leeuwarden, 17 September 1888; 31⁰. TAETS VAN AMERONGEN, Gouverneur der koninklijke militaire Akademie te Breda, 12 September 1888; 32⁰. F CZERMAK, Secretaris van het naturforschende Verein te Brunn, Januari 1888; 33⁰. VON HELMHOLTZ, Berlin, 15 April 1888; 34⁰. G. VOSS, Secretaris der naturforschende Gesellschaft te Emden, 20 September 1888; 35⁰. TH. STECK, Bibliothecaris der naturforschende Gesellschaft te Bern, 9 Juni 1887; 36⁰. J. R. KOCH, Bibliothecaris der allgemeine schweizerische Naturforscher Gesellschaft te Bern, 8 Juni 1887; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1⁰. het Ministerie van Binnenlandsche Zaken, 's Gravenhage, 9, 24 Juli, 3, 18 Augustus 1888; 2⁰. het Ministerie van Oorlog, 's Gravenhage 20 Juli 1888; 3⁰. den Commissaris des Konings in de provincie Friesland te Leeuwarden, 5 Juli 1888; 4⁰. J. F. L. SCHNEIDER, Bibliothecaris der polytechnische School te Delft, 30 Juli 1888; 5⁰. R. M. VAN LIJNDEN, Secretaris van het provinciaal Utrechtsch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen te Utrecht, Juni 1888; 6⁰. het Ministère de l'Instruction publique et des beaux Arts te Parijs, 26 Juli 1888; 7⁰. DE MILLOUÉ, Directeur van het Musée Guimet te Parijs, 1888; 8⁰. den Directeur der Ecole polytechnique te Parijs, Januari 1888; 9⁰. G. BRUNEL, Archivaris der Société des Sciences physiques et naturelles te Bordeaux, 1 Februari 1887; 10⁰. A. DUMÉRI, Secretaris der Académie des Sciences, Inscriptions et belles Lettres te Toulouse, 1 Maart 1888; 11⁰. F. NICHOLSON, Bibliothecaris der literary philosophical Society te Manchester, 1888; 12⁰. R. HEIDENRAIN, Voorzitter der Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur te Breslau, 1 Augustus 1888; 13⁰. D. STRICKER, Bibliothecaris der Senckenbergische naturforschende Gesellschaft te Frankfort a/M., 24 Augustus 1888; 14⁰. G. DI LORENZO, Napels 19 September 1888; 15⁰. G. STORM, Secretaris der Videnskabs-Selskabet te Christiania, 29 Mei 1888; 16⁰. E. DE REGEL,

Directeur van den Jardin impérial de Botanique te St. Petersburg, 28 Januari 1888; 17°. den Secretaris der Naturforscher-Gesellschaft te Dorpat, 1 April 1888; 18°. F. M. Thorn, Directeur der U. S. coast and geodetic Survey te Washington, 14 Juli 1888; 19°. J. F. Bride, Bibliothecaris der public Library te Melbourne, 8 Augustus 1888; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behooren:

1°. Eene missive van den Minister van Waterstaat, Handel en Nijverheid (1 Sept. 1888), ter begeleiding van een adres met bijlagen van den Heer D. Dobbe, te 's Gravenhage, betreffende eene door hem bereide soort van olie, bestemd om wormen en insecten uit hout en andere stoffen te weren. — De Minister vestigt de aandacht der Afdeeling op dit middel, in verband met het aanhangig onderzoek in zake de Limnoria lignorum, en betuigt dat het hem aangenaam zou zijn, over den tegenwoordigen stand van dat onderzoek eenig bericht te ontvangen.

2°. Een brief van den Gouverneur van Suriname (Paramaribo 17 Juli 1888), waarin, naar aanleiding van sommige in Nederland openbaar gemaakte verslagen over de verwoestingen, door den Paalworm en de Limnoria lignorum teweeggebracht, de aandacht der Afdeeling gevestigd wordt op eenige houtsoorten van West-Indië, aldaar gebruikelijk bij het bouwen van waterwerken, en waarvan vooral het mambarklak, door eene langdurige praktijk, gebleken was bestand te zijn tegen de verwoestingen van den Paalworm. — De Gouverneur deelde tevens mede, dat de Afdeeling in het bezit gesteld zou worden van monsters van dat hout en dat daaruit blijken zou: 1°. dat het mambarklak niet altijd uit knoestige stukken bestaat, maar wel degelijk in den vorm van rechte palen verkregen kan worden, ter inheiing geschikt, en 2°. dat de Paalworm wel het splint, maar niet het kernhout van den mambarklakboom aantast. — De Secretaris bericht, dat de hierboven bedoelde voorwerpen in het bezit der Akademie gekomen zijn. — De Voorzitter wenscht én

den brief van den Minister van Waterstaat, Handel en Nijverheid én dien van den Gouverneur van Suriname, met al de daarbij behoorende bescheiden en bewijsstukken, ter beschikking te stellen van de Limnoria-Commissie, opdat de Afdeeling te zijner tijd het advies zoowel over de bederfwerende olie als over het mambarklak moge vernemen. — Aldus wordt besloten. — Tevens stelt de Voorzitter voor, den Gouverneur van Suriname, den Heer Mr. H. J. Smidt, thans in Nederland teruggekeerd, den dank der Afdeeling te brengen: zoowel voor zijne belangstelling in een voor het moederland zoo belangrijk vraagstuk als het maken van standhoudende waterwerken, als voor de toezending van de grondstof, waarmeê proeven kunnen genomen worden. — Dit voorstel wordt aangenomen. — De Heer Hubrecht, Voorzitter der Limnoria-Commissie, in tijds door den Secretaris in kennis gesteld met het verlangen van den Minister van Waterstaat, Handel en Nijverheid om een en ander over den tegenwoordigen stand van het onderzoek der Commissie te vernemen, leest een door de Commissie goedgekeurd rapport voor, dat als antwoord op 's Ministers vraag zou kunnen dienen, en 't welk hij voorstelt dat door de Afdeeling als het hare erkend worde. — Aan dezen wensch wordt zonder discussie gevolg gegeven.

3°. Een brief van den Minister van Binnenlandsche Zaken (22 Aug. 1888), ter begeleiding van het programma der Statuten en van een uitnoodiging ter bijwoning van het VIIe internationale Congres van Amerikanisten te Berlijn.

4°. Een brief van het Koninklijk Instituut van Ingenieurs (16 Juli 1888), ter begeleiding van een exemplaar eener prijsvraag, uitgeschreven door de Afdeeling Ned.-Indië van genoemd Instituut, en luidende: »men vraagt eene praktische handleiding tot toepassing van de gezondheidsleer bij het bouwen in Nederlandsch Indië". Voor het beste antwoord wordt uitgeloofd eene som van ƒ 1000.

5°. Het bericht van het overlijden van het buitenlandsch lid der Akademie Dr. Rudolf Clausius, Hoogleeraar te Bonn. De mededeeling werd door den Secretaris beantwoord.

6°. Eene missive van den Hoogleeraar Dr. M. Fürbringer

(17 Juli 1888), waarin hij kennis geeft van zijn aanstaand vertrek naar Jena, en zijn lidmaatschap der Akademie nederlegt.

7°. Een brief van het lid der Akademie Dr. HOEK, ter begeleiding van een exemplaar van het rapport over de visscherij met ankerkuilen en staalboomen op het Hollandsch Diep en Haringvliet, ingevolge eene opdracht van den Minister van Financiën aan hem zelven en den Heer BOTTEMANNE verstrekt.

8°. Een brief van het lid der Akademie, den oud-Hoogleeraar VAN DEN BERG, ter begeleiding van een opstel voor de Verslagen en Mededeelingen: »De constructie-figuur voor de oplossing van een stelsel lineaire vergelijkingen, beschouwd als configuratie".

9°. Eene verhandeling »Over polyedrale configuraties", aangeboden door Dr. JAN DE VRIES, leeraar aan de H. B. S. te Kampen, voor de werken der Afdeeling. De Voorzitter benoemt tot rapporteurs over dien arbeid de Heeren BIERENS DE HAAN en VAN DEN BERG.

— De Heer DE VRIES spreekt over steriele maïs-planten. Naast eene gewone maïs-plant wordt een andere vertoond, waaraan de zijtakken en de kolven ontbreken, terwijl de geheele pluim door eene naakte spil vervangen is. In de oksels der bladscheeden zijn geene knoppen, hoe klein ook, te zien. De plant mist dus het vermogen om zich te vertakken in haren stam te eenen male. Een veertigtal zulke planten waren in dezen zomer op een bed van omstreeks 340 maïs-planten ontstaan; zij waren krachtig en sterk bebladerd, en bijna alle volkomen onvertakt. Slechts enkele toonden aan den top der spil eenige zeer fijne takjes. Het bedoelde bed was opgekweekt uit de zaden van eene enkele in 1887 gewonnen kolf. Van een paar andere kolven, in 1887 gewonnen uit hetzelfde zaaisel (uit één kolf van 1886), werden in 1888 eveneens zaden uitgezaaid. Onder deze, minder talrijke, culturen kwamen eveneens zulke steriele maïs-planten voor.

Met den Heer BEYERINCK wisselt spreker van gedachte over de vragen: 1°. of de bloemlooze individuen niet ver-

menigvuldigd zouden kunnen worden door hunne bladknoppen en 2°. of het ontstaan van variatiën altijd, zooals de spreker zulks had voorgesteld, de uitkomst van meer dan één tijdperk van groei moet wezen, en of de mogelijkheid was uitgesloten, dat in eene zelfde periode niet enkel het verschijnsel, maar ook de aanleg daartoe werde voortgebracht. De spreker meende dat de volstrekte afwezigheid van okselknoppen bij de door hem onderzochte één-assige maïs-planten geen kans van vermenigvuldiging langs vegetatieven weg aanbood, en dat het antwoord op de tweede vraag langs experimenteelen weg niet gegeven kan worden. Eene vraag van den Heer J. A. C. OUDEMANS over den invloed van het klimaat op de weelderige ontwikkeling der kolven wordt door den Heer DE VRIES beantwoord.

— De Secretaris leest eene geschrevene bijdrage van het correspondeerend lid der Afdeeling, den Heer Dr. BURCK te Buitenzorg, »Over den invloed van het licht op de kieming der sporen van *Hemileia vastatrix*". Zij zal worden opgenomen in de Verslagen en Mededeelingen.

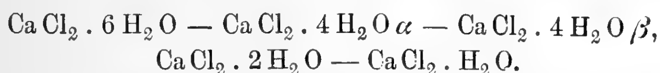
Eveneens wordt door den Secretaris, op verzoek van den Heer Dr. J. G. BOERLAGE, mededeeling gedaan van diens voorloopig verslag van werkzaamheden, verricht in 's Lands Plantentuin te Buitenzorg, van 14 April tot 4 Augustus 1888.

— De Heer VAN BEMMELEN doet mededeelingen omtrent de onderzoekingen van den Heer BAKHUIS ROOZEBOOM; »Over de verbindingen van chloorcalcium met water in vasten en vloeibaren toestand."

Deze onderzoekingen zijn ondernomen met het doel, de gevolgtrekkingen te toetsen, welke afgeleid konden worden omtrent de samenstellingen en de dampspanningen van verzadigde zoutoplossingen uit de thermodynamische formulen van Prof. VAN DER WAALS, welke formulen in overeenstemming gebleken waren met de uitkomsten der vroegere onderzoekingen van den Heer ROOZEBOOM over gashydraten en verwante lichamen.

Tevens wenschte de Heer ROOZEBOOM voor een enkel zout alle verbindingen op te sporen, die het met water kan aangaan, de voorwaarden van haar ontstaan te leeren kennen, en de omstandigheden van temperatuur en druk waaronder twee of meer dezer vaste lichamen met elkander in evenwicht kunnen zijn, nevens oplossing, nevens damp, of nevens damp en oplossing samen.

Eene dergelijke studie was noodig om een volledig overzicht te krijgen over het gedrag van zouten tegenover water. Bij het chloorcalcium bleken de volgende vaste hydraten te bestaan:



$$CaCl_2 . 6 H_2O — CaCl_2 . 4 H_2O \alpha — CaCl_2 . 4 H_2O \beta,$$
$$CaCl_2 . 2 H_2O — CaCl_2 . H_2O.$$

De Heer ROOZEBOOM bepaalde van al deze hydraten de oplosbaarheid, en vond langs dien weg het verschil tusschen de beide hydraten met $4 H_2O$, welke tot dusverre voor dezelfde verbinding waren aangezien. Hij isoleerde het hydraat met $2 H_2O$ voor 't eerst uit de zuivere oplossing, dat vroeger slechts door de toevoeging van HCl verkregen was; terwijl het hydraat met $1 H_2O$ tot dusverre niet bekend was.

Voor het van ouds bekende hydraat met $6 H_2O$ toonde hij aan, dat het beneden zijne smelttemperatuur niet alleen naast oplossingen met meer water, maar evenzeer nevens oplossingen met meer $CaCl_2$ bestaanbaar is, wier gehalte aan $CaCl_2$ toeneemt naarmate men zich van het smeltpunt verwijdert. Hierdoor wordt voor 't eerst de bestaanbaarheid aangetoond van dergelijke oplossingen; terwijl die bestaanbaarheid reeds afgeleid was uit de formule van Prof. VAN DER WAALS, die de betrekking aangeeft tusschen concentratie en temperatuur, in verband met de concentratie van het vaste hydraat, de dampspanning en de oploswarmte.

Voor geen der andere hydraten werden zulke oplossingen aangetroffen. Slechts het $CaCl_2 . 2 H_2O$ kan tot zeer nabij zijn smeltpunt vervolgd worden, de anderen worden reeds ver beneden hun smeltpunt omgezet in het opvolgende waterarmere hydraat. In zulke gevallen is de bestendigheid van oplossingen, met nog meer zout dan het gesmolten hydraat, ondenkbaar.

Behalve de verschillende hydraten, kunnen ook de beide componenten zelve in vasten toestand nevens vloeibare complexen bestaan. Zoo loopt de oplossingslijn van ijs in de oplossing van $Ca\,Cl_2$, van het kryohydratische punt (— 55^0) tot het smeltpunt van ijs; de oplossingslijn van watervrij $Ca\,Cl_2$ begint bij ± 260^0 om te eindigen in het smeltpunt van $Ca\,Cl_2$ ± 720^0. Bij de laatste kunnen slechts oplossingen behooren, die meer H_2O bevatten dan de vaste stof; bij de eerste daarentegen slechts oplossingen, die meer $Ca\,Cl_2$ bevatten dan de vaste stof (ijs). Uit dit oogpunt beschouwd, vormen dus de vriespuntslijnen, van oplossingen van $Ca\,Cl_2$ zoowel als van andere zouten, alle voorbeelden van den nieuwen tak der oplosbaarheidslijn, waarvan de bestaanbaarheid voor hydraten voor 't eerst bij $Ca\,Cl_2 . 6\,H_2O$ bleek.

De Heer Roozeboom heeft verder de dampspanningen der verzadigde oplossingen bepaald, tusschen 0^0 en 205^0. Hierdoor heeft hij voor de verzadigde oplossingen van het 6^e hydraat eene tweede gevolgtrekking kunnen bevestigen, die uit de formule van van der Waals af te leiden is omtrent de wijze waarop de evenwichtsdruk van het stelsel: vast, oplossing, damp: met de temperatuur verandert. Beschouwt men namelijk de oplossingen die meer water bevatten dan het vaste hydraat, dan zou, naarmate men van lagere temperaturen tot het smeltpunt van het hydraat voortschrijdt, de dampdruk eerst moeten toenemen, daarna tot aan het smeltpunt moeten afnemen. In de graphische voorstelling zou dus de lijn $(p,\ t)$ twee takken vertoonen ter weerszij van eene temperatuur, behoorende bij een drukmaximum.

Het bestaan dier twee takken was door den Heer Roozeboom reeds vroeger aangetroffen bij verschillende gashydraten, doch bij geen der bestudeerde gevallen kwamen die takken tegelijkertijd voor. De dampspanningslijn van het systeem met het 6^e hydraat vertoont nu echter beide takken, omdat men hierbij, van vrij slappe oplossingen uitgaande, tot het smeltpunt geraken kan. Evenwel is de tak van de afnemende spanningen zeer klein.

Deze bizonderheid stemt echter overeen met de voorwaarden, waardoor de temperatuur van het drukmaximum bepaald

wordt. Bij deze temperatuur moet namelijk de omzettingswarmte van het systeem nul geworden zijn. Daar nu bij temperaturen beneden het smeltpunt de omzetting bestaat in smelting van hydraat, en in eene absorbtie van eene hoeveelheid waterdamp, die het gesmolten hydraat veranderen kan in oplossing (behoorende bij die temperatuur), zoo behoeft men slechts weinig beneden het smeltpunt te gaan om een punt te bereiken, voor hetwelk de absorbtiewarmte reeds gelijk is aan de smeltwarmte van het hydraat.

Kunnen dus hydraten niet tot zeer nabij hun smeltpunt vervolgd worden, dan bestaat er weinig kans tot het verwezenlijken dezer druklijn. Alleen bij $CaCl_2 . 2H_2O$ werd dan ook nog eene aanduiding van die lijn gevonden. De Heer ROOZEBOOM kon verder het beloop der spanningslijn voor verzadigde oplossingen van $CaCl_2 . 6H_2O$, met gebruikmaking van thermochemische bepalingen van anderen, toetsen aan de formule van VAN DER WAALS, en vond voldoende overeenstemming tusschen proefneming en berekening, ook voor de temperatuur van het drukmaximum.

De studie der spanningslijnen voor de oplossingen der verschillende bovengenoemde hydraten voerde tevens tot kennis der dampspanning bij de temperaturen, waarbij het eene hydraat in het andere wordt omgezet. De punten, die deze temperaturen en spanningen voorstellen, zijn quadrupelpunten, waar telkens twee hydraten met oplossing en damp in evenwicht zijn, en waarin, behalve de spanningslijnen der beide verzadigde oplossingen, ook nog moeten samenkomen de spanningslijnen, welke het evenwicht aangeven tusschen die twee hydraten en waterdamp, en de lijnen voor het evenwicht dier hydraten nevens oplossing alleen.

Voor de meeste stelsels heeft de Heer ROOZEBOOM eerstgenoemde lijnen bepaald, van de laatste reeks slechts hare richtingen.

Met gebruikmaking dezer lijnen laat zich een volledig graphisch overzicht geven van al de evenwichtstoestanden die mogelijk zijn, en van de veranderingen, die zich kunnen openbaren bij verhooging of verlaging van temperatuur of druk in een bestaand stelsel.

Zij leeren nauwkeurig kennen de voorwaarden voor het bestaan of ontstaan van eenig hydraat, hetzij uit een ander hydraat, hetzij uit de oplossing.

Zoo bestaat:

$CaCl_2 . 6H_2O$	nevens	oplossing,	tusschen	— 55°	en	30°.2
$CaCl_2 . 4H_2O\beta$	»	»	»	29°.2	»	38°.4
$CaCl_2 . 4H_2O\alpha$	»	»	»	29°.8	»	45°.3
$CaCl_2 . 2H_2O$	»	»	»	45°.3	»	176°
$CaCl_2 . H_2O$	»	»	»	176°	»	± 260°.

Bij 162° wordt de spanning der verzadigde oplossing grooter dan 1 atm. Boven deze temperatuur zijn dus oplossingen slechts mogelijk in gesloten toestellen.

Bij 205° is de spanning der met $CaCl_2 . H_2O$ verzadigde oplossing reeds 2 atm. De oplossingen nevens watervrij $CaCl_2$ kunnen dus slechts bij zeer hoogen druk bestaan.

Toch doet de formule van VAN DER WAALS verwachten, dat ook deze druk tot een maximum stijgen zal, om daarna (vermoedelijk zeer snel) met toenemende temperatuur te dalen tot den smeltdruk van $CaCl_2$, die zeker zeer klein is.

Deze onderzoekingen bevestigen tevens, dat elk hydraat bij elke temperatuur slechts met eene oplossing van bepaalde concentratie in evenwicht kan zijn; dat bij eene overgangstemperatuur de beide hydraten gelijke oplosbaarheid hebben, en dat de verandering der oplosbaarheid bij dit punt plotseling geschiedt, zoodat de beide oplosbaarheidslijnen elkander scherp snijden.

Dat elk hydraat eene eigen oplosbaarheid heeft, is reeds door LOEWEL en G J. MULDER beslist uitgesproken; later echter, vooral in navolging van NAUMANN, verduisterd. NAUMANN zag in de omzetting van een hydraat in een ander, dat armer aan water was, een begin van gradueele dissociatie in de *oplossing* — eene meening die tot in den allerlaatsten tijd voortleeft.

Deze opvatting is volslagen in strijd:

1°. met de scherpe wijziging der oplosbaarheid bij het bereiken van eene overgangstemperatuur;

2°. met de mogelijkheid om het waterarmere hydraat onder gunstige omstandigheden ook beneden zijne overgangstemperatuur in verzadigde oplossing te behouden;

3°. met de regelmatige aansluiting, die in dat geval de beide deelen der oplosbaarheidslijn vertoonen, en

4°. met het feit, dat in vele gevallen het waterarmere hydraat even goed met de temperatuur in oplosbaarheid toeneemt als het waterrijkere.

De oplosbaarheidsbepalingen bij de hydraten van $Ca\,Cl_2$ leveren voor dit alles nieuwe voorbeelden, en dwingen tot de erkentenis: 1° dat elk hydraat zijne eigen oplosbaarheid heeft, 2° dat de verandering in het vaste zout oorzaak is van de verandering in de oplosbaarheid — niet omgekeerd; waarom ook bij de overgangstemperatuur dezelfde verandering zich openbaart bij het hydraat buiten de oplossing.

Deze feiten versterken eindelijk het inzicht, dat eene oplossing een zelfstandige evenwichtstoestand is, geheel verschillend van den evenwichtstoestand van het hydraat, hetwelk tot hare bereiding mag gediend hebben, en evenzeer van dien der andere hydraten, welke zich mogelijkerwijze uit die oplossing bij verschillende temperaturen zouden kunnen afzetten.

— De Heer J. A. C. Oudemans deelt een en ander mede omtrent een gebrek, dat vele, aanvankelijk onberispelijke, niveaubuizen later vertoonen, dat namelijk bij langzaam toenemende helling de luchtbel onbewegelijk blijft, om dan in eens een heel eind vooruit te gaan. Eenige in Indië gebruikte niveaubuizen waren in 1886 wegens dat gebrek teruggezonden.

Het is wel bekend dat uit den zwavelether, waarmede de niveaubuizen gevuld worden, mikroskopische lichaampjes zich tegen den glaswand afzetten, en dat deze den gang der luchtbel stremmen, maar over den scheikundigen aard dier lichaampjes en de reden van hun ontstaan was men het niet eens.

Prof. H. Wefers Bettink te Utrecht nam, op verzoek van Spreker, een onderzoek naar de oorzaak van dit gebrek

op zich, en vond toen reeds, in October 1886, door chemische analyse, dat de buizen, die het gebrek het meest vertoonden, ook het sterkst natrongehalte bezaten; dat derhalve waarschijnlijk door sporen van azijnzuur of van water het glas werd aangetast; de mikroskopische lichaampjes bleken ook uit het losgekomen kiezelzuurhydraat te bestaan.

Bij het verdampen van den ether op platina bleef eene rest terug, waarin langs mikrochemischen weg calcium en natrium konden worden aangetoond, terwijl in de korreltjes kiezelzuur de hoofdmassa vormde met sporen van ijzer. Azijnzuur kon niet worden aangetoond.

Eene analyse van het glas der *niet* aangetaste niveaus toonde, dat het kalium daarin in verhouding tot het natrium voorkwam als 43,14 : 56,86.

Eene analyse van het glas der niveaus, waarin zich de korreltjes hadden afgezet, deed eene verhouding vinden van 22,61 kalium op 77,39 natrium. Bij het aangetaste glas, was dus ongeveer de helft van het kalium, dat in het onaangetaste glas werd gevonden, door natrium vervangen.

Hij ried dus, in plaats van zwavelether, het gebruik van petroleumether aan, wijl deze vloeistof in alle geval niet verzuren kan. Het is echter gebleken, dat dit nog niet geheel voldoende was, en opnieuw werden de niveaus uit Indië teruggezonden. Het resultaat van zijn herhaald onderzoek (Mei jl.) was nu, dat het aantasten van het glas bepaaldelijk door het *water* geschiedde *), en dat bij den petroleumether de mogelijkheid bestaat, dat dit ontleend wordt aan de kleefstof, waarmede zoowel de dekplaatjes als het diaphragma aan de buis worden bevestigd. Om dus niveaus te vervaardigen, die het gevreesde gebrek niet vertoonen, was het advies van Prof. WEFERS BETTINK: 1°. het gebruik

*) Dat inderdaad het water de oorzaak moet zijn van het aangetast worden, en de ether inderdaad waterhoudend is, blijkt wanneer men den inhoud van een der niveaus uitgiet in een buisje, dat poedervormig acidum tannicum bevat. De inhoud der niveaus maakte terstond het acidum tannicum kleverig, wat, zooals bekend is, met watervrijen ether het geval niet is.

van buizen, vervaardigd uit glas met een sterk kali- en een zwak natrongehalte, 2^0. liefst de vulling te doen met lichten pretroleumether, die minder kans heeft van water aan te trekken, dan zwavelether, en 3^0. de niveaubuizen aan de beide einden toe te smelten, zooals trouwens reeds lang ook gebruikelijk is.

In dien zin had Spreker ook aan den Heer REICHEL te Berlijn geschreven, en daarna eerst kennis gekregen van een onderzoek van Dr. MYLIUS (werkzaam aan de physikalisch-technische Reichsanstalt te Charlottenburg), dat geplaatst is in het Augustus-nummer van het *Zeitschrift für Instrumentenkunde*, en dat tot dezelfde uitkomst geleid heeft als dat van Prof. WEFERS BETTINK Spreker merkt op, dat laatstgenoemde dus geheel onafhankelijk tot hetzelfde, voor de praktische astronomie en geodesie belangrijke, resultaat gekomen is.

— Voor de Boekerij der Akademie worden aangeboden: door den Heer BIERENS DE HAAN, uit naam van het wiskundig Genootschap: »Een onvermoeide arbeid komt alles te boven": Nieuw Archief voor Wiskunde, XIV, 2 en XV, 1; en uit naam van den Heer J. C. VAN DEN BERG diens Dissertatie »Over de Wervelbeweging"; door den Heer GRINWIS de Dissertatie van den Heer L. VAN ELFRINKHOF: »De viriaal en hare beteekenis in de Mechanica"; door den Heer VAN BEMMELEN de Dissertatie van den Heer STORTENBEKER »Over de verbinding van het chloor en het jodium"; door den Heer SCHOLS 3 stukken van »Waterbouwkunde" door HENKET, SCHOLS en TELDERS; door den Heer C. A. J. A. OUDEMANS de door hem in vereeniging met den Heer BOERLAGE bewerkte: » Bibliographie der Flora van Nederland".

— Daar er verder niets te verhandelen is, wordt de vergadering gesloten.

MISSIVE

AAN

ZIJNE EXCELLENTIE DEN MINISTER VAN WATERSTAAT, HANDEL EN NIJVERHEID,

OVER DEN

TEGENWOORDIGEN STAND VAN HET ONDERZOEK DER LIMNORIA-COMMISSIE.

Amsterdam, September 1888.

In antwoord op Uwer Excs. missive van 1 September l.l., heeft de Afdeeling Natuurkunde der Koninklijke Akademie van Wetenschappen de eer, U omtrent den stand van het onderzoek naar de verspreiding en de middelen ter bestrijding van de Limnoria lignorum het navolgende te berichten.

Nadat in een tweetal voorloopige mededeelingen, door de te dezer zake benoemde Commissie aan onze Afdeeling gedaan en ook aan Uwe Exellentie toegezonden, vastgesteld was dat de Limnoria niet geacht kan worden een vernielende vijand te zijn, die voor het eerst met een aanval op onze inheemsche waterstaatswerken dreigt en als zoodanig door snelle maatregelen van tegenweer nog zou kunnen worden afgeweerd, maar dat zij integendeel moet beschouwd worden als een op vele punten der Nederlandsche kust (een deel der Zuiderzee uitgesloten) voorkomend Schaaldier, hetwelk daar al vroeger een vernielenden invloed op houtwerk, dat in zeewater geplaatst is, heeft uitgeoefend, meende die Commissie, dat hare wijze van werken in overeenstemming behoorde gebracht te worden met deze uitkomst.

Nu het niet de vraag bleek te zijn een dreigend gevaar

af te weren, maar veeleer om voor een reeds lang bestaande kwaal verzachting te zoeken, achtte de Commissie het allereerst hare taak te zijn, meer betrouwbare gegevens te erlangen omtrent de leefwijze en de voortplanting van de Limnoria, dan tot heden in de literatuur over dit onderwerp (die ook vele buitenlandsche verhandelingen omvat), te vinden zijn. Zoo moest er worden vastgesteld in welk jaargetijde de Limnoria geacht kan worden haar meest krachtigen aanval op het houtwerk te doen; zoo ook of er verband bestaat tusschen dien heftigen aanval en de voortplanting der soort, hetzij doordien de jonggeborenen aan het maken van nieuwe loopgraven deelnemen, hetzij doordien vóór hunne geboorte reeds door de ouders voor meer ruimte in de gemeenschappelijke woning wordt zorg gedragen. Ook de vraag: hoe de volgende generaties zich door het water verspreiden en nabijgelegen houtwerk aantasten, moest langs proefondervindelijken weg worden uitgemaakt.

Daarbij mocht niet verzuimd worden, waarnemingen te doen omtrent den invloed, dien het zoutgehalte, in verband met de temperatuur van het zeewater, op de bovengenoemde verschijnsels zou kunnen uitoefenen: een invloed, die, op grond van voorloopig verkregen resultaten, reeds als positief bestaande mocht worden aangemerkt.

Eindelijk heeft de Commissie zich voorgesteld, proeven te nemen — die ook reeds aangevangen zijn — over voorbehoedmiddelen, die, op het houtwerk toegepast, de nadeelige werking der Limnoria beletten of althans verlangzamen.

Het behoeft niet nader uiteengezet te worden, dat voor een en ander een behoorlijk tijdsverloop dient gesteld te worden, vóór en aleer men het terrein der waarneming verlaten en dat der gevolgtrekking betreden mag.

In het geheel zijn sedert het begin van de werkzaamheid onzer Commissie op twaalf verschillende punten van de kust een honderdtal proeflatten geplaatst, en van deze laatsten een 80 tal weder gelicht, en nauwkeurig onderzocht. Geregelde waarnemingen omtrent zoutgehalte enz. worden sedert het begin van het onderzoek en wel veelal driemaal daags op acht verschillende punten verricht.

Liever dan thans in eene uiteenzetting van het tot nu toe gevondene te treden, wenscht de Commissie, en met haar ook de Afdeeling, door Uwe Excellentie te dezer zake diligent verklaard te worden.

En liever dan telkens kleine mededeelingen van opeenvolgende stappen in den gang van het onderzoek aan de Regeering te doen, zou de Afdeeling het eindrapport van de Commissie, te dezer zake benoemd, willen afwachten, waarin de geheele aangelegenheid op de meer uitgebreide schaal, die hierboven geschetst werd, behandeld zal worden, zij het dan ook dat zoodanig eindrapport uit den aard der zaak eerst na verloop van eenige jaren mag worden te gemoet gezien.

De geldmiddelen, door de Regeering voor het Limnoria-onderzoek toegestaan, zijn niet uitgeput en worden door de Commissie tot het nemen van de meermalen genoemde proeven met overleg aangewend.

De Afdeeling Natuurkunde van de
Koninklijke Akad. v. Wetenschappen.
de Secretaris
C. A. J. A. OUDEMANS.

DE CONSTRUCTIE-FIGUUR

VOOR DE

OPLOSSING VAN EEN STELSEL LINEAIRE VERGELIJKINGEN, BESCHOUWD ALS CONFIGURATIE,

DOOR

F. J. VAN DEN BERG.



De in de Verslagen en Mededeelingen der Akademie, Afdeeling Natuurkunde, 3e Reeks, Deel V, Stuk 1, 1888, blz. 105—120, opgenomen bijdrage van Dr. J. DE VRIES, »Over vlakke configuraties", geeft mij aanleiding tot eene opmerking met betrekking tot de oplossingswijze die op blz. 207—249 van mijn in de genoemde Verslagen, enz., Deel IV, Stuk 2, 1887, blz. 196—252, geplaatst opstel »Over de graphische oplossing van een stelsel lineaire vergelijkingen" het laatst en uitvoerigst werd behandeld. De figuur namelijk, die aldaar werd gebezigd om wat ik noemde het wortelpunt van het willekeurig gegeven stelsel vergelijkingen te bepalen door middel van de wortelpunten van zekere daaruit afgeleide stelsels, vertoont de bijzonderheid — waarop bij de gevolgde wijze van behandeling niet zoo kennelijk het licht viel — dat zij niet anders dan eene zoogenaamde configuratie is. Bij de uiteenzetting van deze bijzonderheid, waartoe ik thans wensch over te gaan, zal ik mij als vroeger hoofdzakelijk houden aan beschouwingen in het platte vlak, niet in de ruimte, en ook op het voetspoor van vroeger duidelijkheidshalve beginnen met de afzonderlijke behandeling van de twee eenvoudigste gevallen, waarin namelijk het aantal n der vergelijkingen en der onbekenden hetzij 2 of 3 bedraagt.

In het geval van $n = 2$ (zie blz. 207—209 en Fig. 2) valt dadelijk in het oog dat de in het geheel beschouwde 6 wortelpunten, te weten het eenige wortelpunt der 0[de] orde of oorsprong O, de 4 wortelpunten der 1[e] orde $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, en het eenige wortelpunt der 2[e] orde of hoofdwortelpunt X, de hoekpunten zijn van eene volledige vierzijde gevormd door de 4 in de figuur aanwezige lijnen OX_1, OX_2, $\alpha_1 \alpha_2$, $\beta_1 \beta_2$, en dat deze hoekpunten en zijden dus eene configuratie $(6_2, 4_3)$ vormen die — na het geval $(3_2, 3_2)$ eener driezijde — tevens het meest eenvoudige geval is van de in het algemeen uit de n zijden en $\binom{n}{2}$ hoekpunten eener volledige n-zijde bestaande configuratie $\left(\binom{n}{2}_2, n_{n-1}\right)$. Ofschoon het alzoo voor dit geval van $n = 2$ op zich zelf minder noodig is hierbij langer stil te staan of deze configuratie door eene andere notatie voor te stellen, zullen wij toch, voornamelijk als voorbereiding tot eene overeenkomstige notatie die voor hoogere n doelmatig zal blijken, reeds hier de volgende teekens invoeren. De twee oorspronkelijke assen OX_1 en OX_2 noemen wij 1 en 2, de twee lijnen $\alpha_1 \alpha_2$ en $\beta_1 \beta_2$, in plaats van 3 en 4, liever — om later zekere regelmaat of symmetrie duidelijker in het oog te doen vallen — $1'$ en $2'$; terwijl wij in het algemeen het snijpunt van twee lijnen aanduiden door de nummers dezer lijnen naast elkander te stellen, zoodat hier de punten $O = 12$, $\alpha_1 = 11'$, $\alpha_2 = 21'$, $\beta_1 = 12'$, $\beta_2 = 22'$, $X = 1'2'$ zijn. En tevens stellen wij de volgende tabel of overzigt van de ter sprake komende lijnen en punten op:

0[de] orde		1 2	12
1[e] orde	$1'$ $2'$	$11'$ $21'$ $12'$ $22'$	
2[e] orde	$1'2'$		

,

waarin de zamenstelling van de onderling gelijkvormige

bovenrand en linkerrand duidelijk is, terwijl de vier elementen van het middenvak zijn ingevuld door, als in eene tafel van vermenigvuldiging, voor ieder daarvan te nemen de in dezelfde kolom en in dezelfde rij geplaatste elementen der beide genoemde randen. De tabel bevat alzoo $1^2 + 2^2 + 1^2 = 6 = \binom{4}{2}$ elementen ieder van twee cijfers, voorstellende het enkele wortelpunt der 0de orde (of met nul accenten) 12, de 4 wortelpunten der 1e orde (met 1 accent) 11', 21', 12', 22', en het enkele wortelpunt der 2e orde (met 2 accenten) 1'2'; en voorts $1 . 2 + 2 . 1 = 4 = \binom{4}{1}$ elementen ieder van één cijfer, voorstellende de 2 lijnen met nul accenten (wij zullen daarom zeggen: van de 0^{le} orde) 1 en 2, en de 2 lijnen met 1 accent (van de 1e orde) 1' en 2'. Voor ieder der 6 punten komen de 2 daardoor gaande lijnen, en voor ieder der 4 lijnen komen de 3 daarop liggende punten vóór deels in rij en deels in kolom van het punt of van de lijn zelf. Anders gezegd, in verband met de wijze van notatie: ieder punt is het product van de 2 daardoor gaande lijnen, iedere lijn is een factor van de 3 daarop liggende punten. Of, meer in bijzonderheden nog voor de vijf afzonderlijke vakken der tabel, in aansluiting aan de wordingswijze van Fig. 2: — wij herhalen: te uitvoerig misschien voor dit eenvoudige geval op zich zelf, maar gewettigd misschien als wegwijzer voor de allengs ingewikkelder gevallen —

1^0. Door het punt der 0de orde 12 gaan de 2 lijnen der 0de orde 1 en 2.

2^0. Op iedere lijn der 0de orde ligt het punt der 0de en 2 punten der 1^e orde.

3^0. Door ieder punt der 1^e orde gaat 1 lijn der 0de en 1 lijn der 1^e orde.

4^0. Op iedere lijn der 1^e orde liggen 2 punten der 1^e en het punt der 2^e orde.

5^0. Door het punt der 2^e orde 1' 2' gaan de 2 lijnen der 1^e orde 1' en 2'.

Overgaande tot het geval van $n = 3$ (zie blz. 209—215 en Fig. 3), stellen wij, overeenkomstig met hetgeen zoo even geschiedde, den oorsprong O of het snijpunt der alsnu aangenomen drie assen OX_1, OX_2, OX_3 door 123 voor, daarentegen deze assen zelve niet door de afzonderlijke cijfers 1, 2, 3, maar — wederom met het oog op hetgeen later voor hoogere n dienstig zal blijken, en in overeenstemming met hetgeen wij thans voor de overige te bespreken lijnen zullen doen — door hunne drie verbindingen twee aan twee, en wel liefst in opklimmende volgorde, dus door 12, 13, 23. De hoekpunten $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ der drie in de figuur voorkomende driehoeken α, β, γ, die wij thans evenals den oorsprong en de verdere benoodigde punten door drie cijfers aanduiden, noemen wij, door bij de assen waarin zij liggen het cijfer 1′ of 2′ of 3′ (wederom liever dan 4 of 5 of 6) bij te schrijven, (121′, 131′, 231′), (122′, 132′, 232′), (123′, 133′, 233′), zoodat men in zekeren zin deze enkele cijfers 1′, 2′, 3′ als de vertegenwoordigers der drie genoemde driehoeken zou kunnen beschouwen, ofschoon wij later liever op eene andere meetkundige beteekenis, die deze cijfers met de drie afzonderlijke 1, 2, 3 zelve gemeen hebben, zullen terugkomen. Vasthoudende verder aan den bij deze aangenomen notatiën reeds geldenden dubbelen regel, dat de door twee of meer punten gaande lijn de aan dezen gemeene cijfers draagt en dat wederkeerig het snijpunt van twee of meer lijnen de cijfers van dezen omvat, hebben wij de zijden waarop het eerste en het tweede, het eerste en het derde, het tweede en het derde hoekpunt van den driehoek (121′, 131′, 231′) liggen, te noemen (11′, 21′, 31′), en evenzoo voor den driehoek (122′, 132′, 232′) de zijden (12′, 22′, 32′) en voor den driehoek (123′, 133′, 233′) de zijden (13′, 23′, 33′); dus wederom de snijpunten der overeenkomstige zijden van den eersten en den tweeden dezer driehoeken (11′2′, 21′2′, 31′2′), en daarom de deze drie snijpunten bevattende homologe as der twee zelfde driehoeken 1′2′, terwijl de punten (11′3′, 21′3′, 31′3′) en (12′3′, 22′3′, 32′3′) en de homologe assen 1′3′ en 2′3′ voor den eersten en den derden en voor

den tweeden en den derden der genoemde driehoeken de overeenkomstige beteekenis hebben. En ten slotte dient alzoo, wil men stelselmatig te werk gaan, het hoofdwortelpunt *X*, waarop deze drie homologe assen uitloopen, door de notatie 1'2'3' aangeduid te worden. Dit alles vatten wij in beknopten vorm weder zamen in de hier volgende, met de voorgaande overeenstemmende, tabel:

0de orde		1	2	3	12	13	23	123
1^e orde	1'	11'	21'	31'	121'	131'	231'	
	2'	12'	22'	32'	122'	132'	232'	
	3'	13'	23'	33'	123'	133'	233'	
2^e orde	1'2'	11'2'	21'2'	31'2'				
	1'3'	11'3'	21'3'	31'3'				
	2'3'	12'3'	22'3'	32'3'				
3^e orde	1'2'3'							

,

waarin ook nu uit de onderling gelijkvormige bovenrand en linkerrand de verdere vakken als in eene vermenigvuldigingstabel zijn ingevuld, en waarin men de gezamenlijke $1^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2 = 20 = \binom{6}{3}$ wortelpunten of elementen van drie cijfers, en de gezamenlijke $1.3 + 3.3 + 3.1 = = 15 = \binom{6}{2}$ lijnen of elementen van twee cijfers aantreft; wordende voor ieder element, hetzij punt of lijn, wat wij genoemd hebben de orde door het aantal accenten aangegeven. Voor ieder der 20 punten zijn de 3 daardoor gaande lijnen, voor ieder der 15 lijnen de 4 daarop liggende punten weder in de eigen rij en kolom te vinden: de geheele figuur is mitsdien niet anders dan eene configuratie $(20_3, 15_4)$. Of wederom: ieder punt is een veelvoud van zijne lijnen, iedere lijn is een factor van hare punten. Of nogmaals, de

zamenstelling der meetkundige figuur of van de rekenkundige tabel, die slechts twee verschillende beelden van ééne en dezelfde zaak zijn, stap voor stap volgende:

1°. Door het punt der 0de orde 123 gaan de 3 lijnen der 0de orde 12, 13 en 23.

2°. Op iedere lijn der 0de orde ligt het punt der 0de en 3 punten der 1e orde.

3°. Door ieder punt der 1e orde gaat 1 lijn der 0de en 2 lijnen der 1e orde.

4°. Op iedere lijn der 1^e orde liggen 2 punten der 1^e en 2 punten der 2^e orde.

5°. Door ieder punt der 2^e orde gaan 2 lijnen der 1^e en 1 lijn der 2^e orde.

6°. Op iedere lijn der 2^e orde liggen 3 punten der 2^e en het punt der 3^e orde.

7°. Door het punt der 3^e orde $1'2'3'$ gaan de 3 lijnen der 2^e orde $1'2'$, $1'3'$ en $2'3'$.

Al het voorgaande geeft, onder rekenkundigen vorm, niet anders terug dan wat voor de beide gevallen $n = 2$ en $n = 3$ in mijn vroeger opstel meetkundig werd uiteengezet. Thans, voor $n = 4$, zullen wij in zooverre eene andere volgorde in acht nemen dat wij dadelijk eene tabel, geconstrueerd als het ware naar het voorbeeld van de beide vorigen, op den voorgrond stellen en daarvoor dan beredeneren eensdeels dat zij eene configuratie kan vertegenwoordigen en ten andere dat deze met het zamenstel van alle op $n = 4$ betrekkelijke wortelpunten — dus niet alleen de $1 + 4 + 9 + 16 = 30$, waarmede men strikt genomen voor de constructie van het hoofdwortelpunt zelf (zie onder anderen blz. 240—247) kan volstaan, maar ook de $70 - (30 + 1) = 39$ overigen — zamenvalt. De bedoelde tabel volgt hier:

0de orde		1	2	3	4	12	13	14	23	24	34	123	124	134	234	1234
1e orde	1′	11′	21′	31′	41′	121′	131′	141′	231′	241′	341′	1231′	1241′	1341′	2341′	
	2′	12′	22′	32′	42′	122′	132′	142′	232′	242′	342′	1232′	1242′	1342′	2342′	
	3′	13′	23′	33′	43′	123′	133′	143′	233′	243′	343′	1233′	1243′	1343′	2343′	
	4′	14′	24′	34′	44′	124′	134′	144′	234′	244′	344′	1234′	1244′	1344′	2344′	
2e orde	1′2′	11′2′	21′2′	31′2′	41′2′	121′2′	131′2′	141′2′	231′2′	241′2′	341′2′					
	1′3′	11′3′	21′3′	31′3′	41′3′	121′3′	131′3′	141′3′	231′3′	241′3′	341′3′					
	1′4′	11′4′	21′4′	31′4′	41′4′	121′4′	131′4′	141′4′	231′4′	241′4′	341′4′					
	2′3′	12′3′	22′3′	32′3′	42′3′	122′3′	132′3′	142′3′	232′3′	242′3′	342′3′					
	2′4′	12′4′	22′4′	32′4′	42′4′	122′4′	132′4′	142′4′	232′4′	242′4′	342′4′					
	3′4′	13′4′	23′4′	33′4′	43′4′	123′4′	133′4′	143′4′	233′4′	243′4′	343′4′					
3e orde	1′2′3′	11′2′3′	21′2′3′	31′2′3′	41′2′3′											
	1′2′4′	11′2′4′	21′2′4′	31′2′4′	41′2′4′											
	1′3′4′	11′3′4′	21′3′4′	31′3′4′	41′3′4′											
	2′3′4′	12′3′4′	22′3′4′	32′3′4′	42′3′4′											
4e orde	1′2′3′4′															

De bovenrand bevat de verbindingen één aan één, twee aan twee, drie aan drie en vier aan vier van de cijfers 1, 2, 3, 4, allen weder in opklimmende volgorde; de linkerrand onderscheidt zich daarvan ook nu slechts door bijvoeging van een accent bij ieder cijfer; uit beide randen zijn voorts wederom de verdere vakken bij wijze van vermenigvuldiging ingevuld. Terwijl wij later terugkomen op de meetkundige beteekenis die men aan de elementen van twee en aan die van één cijfer kan hechten, staan wij thans meer in het bijzonder stil bij de $1^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 1^2 = = 70 = \binom{8}{4}$ elementen van vier cijfers en bij de $1.4 + + 4.6 + 6.4 + 4.1 = 56 = \binom{8}{3}$ elementen van drie cijfers die de tabel in het geheel bevat. Laat vooreerst, in de 0de orde, 1234 weder de naam zijn dien wij aan den oorsprong O, en 123, 124, 134, 234 de namen die wij aan de vier daardoor gelegde assen OX_1, OX_2, OX_3, OX_4 geven; laten verder de op deze assen liggende hoekpunten van de vier vierhoeken — of, liever nog (evenals eene overeenkomstige benaming ook in mijn vroeger opstel doorgaande met meer juistheid had kunnen worden gebezigd) van de vier volledige vierhoeken — die de vier gegeven vergelijkingen meetkundig voorstellen, worden aangeduid door bij deze assen het cijfer $1'$ of $2'$ of $3'$ of $4'$ bij te schrijven, zoodat deze 16 hoekpunten of wortelpunten der 1^e orde de in het vak van vier cijfers dier orde ingevulde elementen zijn; de gegevens van ons vraagstuk zijn dan hiermede aangewezen. Men late nu, om de stelling van blz. 218 te kunnen toepassen, bijv. de vierde gegeven vergelijking of den volledigen vierhoek, waarbij het cijfer $4'$ behoort, buiten beschouwing en neme in de drie overige vergelijkingen in de eerste plaats de bij de eerste as, 123, behoorende onbekende gelijk nul: de vier vergelijkingen met vier onbekenden zijn dan tot drie vergelijkingen met drie onbekenden afgeknot of, meetkundig, de vier vierhoeken op de vier assen tot drie driehoeken op drie dezer assen. De op de configuratie dezer drie driehoeken betrekkelijke

tabel is om zoo te zeggen als onderdeel van de zoo even opgestelde tabel reeds aanwezig; want houdt men daarin voor een oogenblik alleen al die elementen aan, die het cijfer 4 wél, maar 4′ niet bevatten, dan verdwijnt de geheele linkerrand en herleidt overigens de tabel zich tot eene die zich van de volledige boven voor $n = 3$ nedergeschrevene alleen onderscheidt door bij ieder element van deze het cijfer 4 bij te schrijven en die daarom inderdaad als voorstelling van de evenbedoelde configuratie mag gelden. En daar bovendien deze bijvoeging overal van het cijfer 4 blijkbaar geene verandering hoegenaamd kan teweegbrengen in den voor tabel $n = 3$ geldigen dubbelen regel — namelijk: ieder punt behoort tot alle lijnen die factoren zijn van het punt; iedere lijn bevat alle punten die veelvouden zijn van de lijn — zoo behoudt deze regel ook zijne geldigheid voor de omschreven gedeeltelijke tabel (laat ons zeggen (4, — 4′)) van $n = 4$, terwijl de elementen van vier cijfers van deze gedeeltelijke tabel juist die wortelpunten der 0de, der 1^e^, der 2^e^ en der 3^e^ orde van de vier gegeven vergelijkingen beteekenen, die tevens als zoodanig behooren tot de drie beschouwde daaruit afgeleide vergelijkingen. Dit zoo zijnde, is het op grond van de onderlinge onafhankelijkheid van alle acht cijfers 1, 2, 3, 4, 1′, 2′, 3′, 4′ duidelijk, vooreerst dat, als men, altijd nog de vierde vergelijking of vierhoek of cijfer 4′ wegdenkende, de tweede as 124, of de derde 134, of de vierde 234, achtervolgens uitligt in denzelfden zin als zoo even de eerste as 123, drie nieuwe gedeeltelijke tabellen (3, — 4′), (2, — 4′) en (1, — 4′) uit die van $n = 4$ komen, in het wezen der zaak ieder weder geheel identisch met die van $n = 3$, en waaromtrent zich dus het dergelijke als zoo even laat zeggen, zoodat nu met name 41′2′3′ en 31′2′3′ en 21′2′3′ en 11′2′3′ de wortelpunten der 3^e^ orde zijn van de achtervolgens beschouwde vier stelsels van drie vergelijkingen; ten andere dat, als men, hetgeen op het cijfer 4′ betrekking heeft hiermede uitgeput zijnde, alsnu beurtelings de cijfers 3′ en 2′ en 1′ diezelfde rol doet vervullen, telkens weder het dergelijke geldt, zoodat de 16 elementen van het tot de 3^e^ orde behoorende vak van vier

cijfers der tabel blijken de gezamenlijke 16 wortelpunten dier orde van de vier gegeven vergelijkingen voor te stellen. Maar volgens de reeds aangehaalde stelling van blz. 218 liggen nu vooreerst de vier eerstgenoemde van deze wortelpunten, dat is 41′2′3′, 31′2′3′, 21′2′3′, 11′2′3′, in eene regte lijn, die men dus regelmatigheidshalve de lijn 1′2′3′ der 3e orde dient te noemen, terwijl 1′2′4′, 1′3′4′ en 2′3′4′ voor de drie volgende viertallen van wortelpunten eene soortgelijke beteekenis verkrijgen; en gaan ten andere deze vier lijnen allen door het hoofdwortelpunt dat alzoo, wat aantal cijfers, wat orde of aantal accenten en wat zamenhang met die lijnen aangaat, teregt door de notatie 1′2′3′4′ als laatste element der tabel wordt aangeduid. De voor $n = 4$ uitgeschreven tabel in haar geheel blijkt derhalve juist diegene te zijn die, om verband te houden met meergenoemde stelling, uit de tabel voor $n = 3$ als het ware behoort te worden opgebouwd; en ook voor die tabel $n = 4$ in haar geheel blijft de dubbele regel omtrent punten en lijnen, beschouwd als veelvouden en factoren, geldig, waardoor tegelijkertijd naar wij meenen het bewijs geleverd is, dat het door háár voorgestelde netwerk der bij $n = 4$ behoorende wortelpunten niet anders dan eene configuratie $(70_4, 56_5)$ is. Ten overvloede, en in navolging van hetgeen wij zoowel voor $n = 2$ als voor $n = 3$ gedaan hebben, schrijven wij ook hier de negen onderdeelen, waaruit thans de bewerking in haar geheel in figuur of tabel bestaat, voluit neder:

1⁰. Door het punt der 0de orde 1234 gaan de 4 lijnen der 0de orde 123, 124, 134 en 234.

2⁰. Op iedere lijn der 0de orde ligt het punt der 0de en 4 punten der 1e orde.

3⁰. Door ieder punt der 1e orde gaat 1 lijn der 0de en 3 lijnen der 1e orde.

4⁰. Op iedere lijn der 1e orde liggen 2 punten der 1e en 3 punten der 2e orde.

5⁰. Door ieder punt der 2e orde gaan 2 lijnen der 1e en 2 lijnen der 2e orde.

6⁰. Op iedere lijn der 2e orde liggen 3 punten der 2e en 2 punten der 3e orde.

7⁰. Door ieder punt der 3ᵉ orde gaan 3 lijnen der 2ᵉ en 1 lijn der 3ᵉ orde.

8⁰. Op iedere lijn der 3ᵉ orde liggen 4 punten der 3ᵉ en het punt der 4ᵉ orde.

9⁰. Door het punt der 4ᵉ orde 1'2'3'4' gaan de 4 lijnen der 3ᵉ orde 1'2'3', 1'2'4', 1'3'4' en 2'3'4'.

Na het uiteengezette zal het wel minder noodig zijn even uitvoerig voor hoogere waarden van n voort te gaan. Voor $n = 5$ bijv. schrijven wij de tabel, overeenkomende met de voor $n = 2$, 3 en 4 besprokene, dan ook niet neder, maar bepalen ons tot de aanwijzing dat haar bovenrand bestaat uit alle in geregelde volgorde genomen verbindingen van de vijf eerste cijfers, namelijk: | 1, 2, 3, 4, 5 | 12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45 | 123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345 | 1234, 1235, 1245, 1345, 2345 | 12345 | ; dat de linkerrand geheel dezelfde is behoudens toevoeging van een accent bij ieder cijfer; dat uit deze twee randen de tabel zelve wordt ingevuld als ware zij eene vermenigvuldigingstabel. En dan laat zich weder, opklimmende van $n = 4$ tot $n = 5$, geheel op dezelfde wijze als zoo even aantoonen, dat deze tabel het rekenkundige beeld is van het zamenstel der door de $1^2 + 5^2 + 10^2 + 10^2 + 5^2 + 1^2 = 252 = \binom{10}{5}$ elementen van vijf cijfers voorgestelde wortelpunten van de 0ᵈᵉ tot de 5ᵉ orde van vijf vergelijkingen met vijf onbekenden, welke wortelpunten 6 aan 6 blijken te liggen op de door de $1.5 + 5.10 + 10.10 + 10.5 + 5.1 = 210 = \binom{10}{4}$ elementen van vier cijfers voorgestelde regte lijnen van de 0ᵈᵉ tot de 4ᵉ orde, die telkens 5 aan 5 door een zelfde wortelpunt gaan; zoodat deze wortelpunten en lijnen werkelijk weder eene configuratie $(252_5, 210_6)$ vormen.

Zoo voortgaande, ziet men in het algemeen voor eene willekeurige waarde van n eene tabel ontstaan, bevattende evenveel elementen van n cijfers als het geheele aantal wor-

telpunten der verschillende orden bedraagt, namelijk — in verband met wat ik reeds op blz. 225—226 van mijn vroeger opstel uit de onderlinge gelijkstelling der van x onafhankelijke termen in het ontwikkelde eerste en laatste lid der identiteit

$$\left\{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\text{enz.}+\binom{n}{n}x^n\right\}.$$

$$.\left\{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\frac{1}{x}+\binom{n}{2}\frac{1}{x^2}+\text{enz.}+\binom{n}{n}\frac{1}{x^n}\right\}=$$

$$=(1+x)^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^n=\frac{(1+x)^{2n}}{x^n}$$

besloot — het aantal

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\text{enz.}+\binom{n}{n}^2=\binom{2\,n}{n};$$

en bevattende voorts, in verband met wat diezelfde identiteit door gelijkstelling der coëfficiënten van $\frac{1}{x}$ of ook van x leert, een aantal van

$$\binom{n}{0}\binom{n}{1}+\binom{n}{1}\binom{n}{2}+\binom{n}{2}\binom{n}{3}+\text{enz.}+$$

$$+\binom{n}{n-1}\binom{n}{n}=\binom{2\,n}{n-1}=\binom{2\,n}{n+1}$$

elementen van $n-1$ cijfers; terwijl hier tevens moge worden gezegd (al heeft dit voor ons tegenwoordig doel minder belang) dat, wederom met het oog op de termen in $\frac{1}{x^2}$ of x^2, in $\frac{1}{x^3}$ of x^3, enz., in $\frac{1}{x^{n-1}}$ of x^{n-1} der identiteit, de tabel overigens nog bevat:

$$\binom{n}{0}\binom{n}{2}+\binom{n}{1}\binom{n}{3}+\binom{n}{2}\binom{n}{4}+\text{enz.}+$$

$$+\binom{n}{n-2}\binom{n}{n}=\binom{2\,n}{n-2}=\binom{2\,n}{n+2}$$

elementen van $n - 2$ cijfers,

$$\binom{n}{0}\binom{n}{3} + \binom{n}{1}\binom{n}{4} + \binom{n}{2}\binom{n}{5} + \text{enz.} +$$
$$+ \binom{n}{n-3}\binom{n}{n} = \binom{2n}{n-3} = \binom{2n}{n+3}$$

elementen van $n - 3$ cijfers, enz., tot

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n-1} + \binom{n}{1}\binom{n}{n} = \binom{2n}{1} = \binom{2n}{2n-1}$$

elementen van 1 cijfer. Ook nu weder kunnen de genoemde elementen van n cijfers de wortelpunten zelve beteekenen, en de elementen van $n - 1$ cijfers regte lijnen waarover zij regelmatig verspreid zijn, daar ook thans de boven herhaaldelijk genoemde dubbele regel omtrent punten en lijnen, beschouwd als veelvouden en factoren, toepasselijk blijkt: meer bepaaldelijk gaan namelijk in deze algemeene tabel door ieder punt der p^e orde p lijnen der $(p-1)^e$ en $n - p$ lijnen der p^e orde, en liggen wederkeerig op iedere lijn der p^e orde $p + 1$ punten der p^e en $n - p$ punten der $(p + 1)^e$ orde. De tabel stelt alzoo weder eene door de gezamenlijke wortelpunten en door hunne lijnen gevormde configuratie

$$\left(\binom{2n}{n}_n, \binom{2n}{n-1}_{n+1}\right)$$

voor, en hiermede is dan ook de onderlinge gelijkheid der beide, ieder aan

$$\frac{(2n)!}{(n-1)!\ n!}$$

gelijke, producten

$$n\binom{2n}{n} \text{ en } (n+1)\binom{2n}{n-1}$$

naar behooren in overeenstemming.

Twee uit de wijze van zamenstelling der tabel volgende bijzonderheden willen wij nog doen opmerken. In de eerste plaats — en juist om dit sprekender te doen uitkomen, hielden wij overal de n oorspronkelijke cijfers met bijvoeging van een accent aan, liever dan evenveel hoogere cijfers in te voeren — dat elke twee elementen, symmetrisch liggende wederzijds de van den linker-boven- naar den regter-benedenhoek der tabel te trekken diagonaal, en dus uit elkander volgende door verwisseling hunner beide regthoekige coördinaten ten opzigte van bovenrand en linkerrand, zich alleen door onderlinge verwisseling van elk cijfer met en zonder accent onderscheiden; alle door deze diagonaal doorsneden elementen zijn dus tevens al diegene die bij zulk eene verwisseling onveranderd blijven, bijv. voor $n=4$ de 10 elementen 11′, 22′, 33′, 44′, 121′2′, 131′3′, 141′4′, 232′3′, 242′4′, 343′4′. In de tweede plaats, dat elke twee symmetrisch wederzijds het middelpunt van het regthoekige raam der tabel liggende elementen van n cijfers, al welke elementen de gezamenlijke wortelpunten voorstellen, elkander aanvullen tot de gezamenlijke gebezigde $2n$ cijfers met en zonder accenten. Dit laatste is bepaaldelijk een gevolg van de bij het opstellen van den bovenrand en dus ook van den linkerrand der tabel steeds in acht genomen opklimmende volgorde in ieder der groepen van verbindingen der n cijfers, waardoor al die verbindingen voorkomen in dezelfde orde die zij, ieder voor zich beschouwd als een enkel uit dezelfde cijfers bestaand getal, zouden innemen; want op grond van deze geregelde volgorde vullen bijv. in den bovenrand — het allereerste of ledige vak daarvan zich voor een oogenblik door eene nul ingevuld denkende — elke twee even ver wederzijds het midden van dien geheelen rand zelf geplaatste verbindingen elkander tot de gezamenlijke n cijfers aan; (zoo zijn bijv. in den reeds voor $n=5$ neêrgeschreven bovenrand 0 en 12345, 1 en 2345, 2 en 1345, enz., 12 en 345, 13 en 245, enz. twee aan twee complementair ten aanzien van 12345). Immers, indien men in het algemeen de groep der $\binom{n}{p}$ verbindingen p aan p indeelt in onder-

groepen waarin telkens een zelfde linkercijfer voorkomt, dan rangschikken deze ondergroepen zich als volgt: die waarin 1 voorkomt; die zonder 1, maar met 2; die zonder 1 en 2, maar met 3; enz.; en dan komen hare complementaire ondergroepen, die te zamen de even zoovele $\binom{n}{n-p}$ verbindingen $n-p$ aan $n-p$ bevatten, namelijk die zonder 1, die met 1, maar zonder 2, die met 1 en 2, maar zonder 3, enz., blijkbaar in den beschouwden bovenrand in omgekeerde volgorde voor. En daar het dergelijke blijft gelden wanneer men ieder der gezegde ondergroepen nogmaals, en wel ditmaal naar gelang van het tweede cijfer links, indeelt in nieuwe ondergroepen en deze weder ieder met hare complementaire in verband beschouwt; en wederom bij onderverdeeling naar den maatstaf van het derde cijfer, enz., totdat de beschouwde groep in haar geheel in hare enkele verbindingen is ontleed, is hiermede naar wij meenen de doorgaande symmetrische plaatsing van elk paar complementaire verbindingen in den bovenrand uitgewezen. Zij geldt dan evenzeer in den geheel gelijkvormigen linkerrand, en mitsdien, krachtens de zamenstelling der tabel uit beide randen, ook in de tabel zelve ten opzigte van haar middelpunt, gelijk beweerd werd. Deze symmetrische plaatsing van elk paar complementaire elementen van n cijfers der tabel wijst er, in verband met den aard der configuratie zelve, nog op heen, dat in dit opzigt het paar der laatste elementen van beide randen, namelijk $123\ldots n$ en $1'2'3'\ldots n'$, niets wezenlijks vóór heeft boven ieder ander complementair paar; en in meetkundigen zin blijkt dus ook de in mijn vroeger opstel aangewezen wederkeerigheid tusschen de beide door de genoemde laatste elementen voorgestelde wortelpunten, namelijk de oorsprong O en het hoofdwortelpunt X, evenzeer te gelden voor ieder ander paar complementaire of toegevoegde wortelpunten der volledige figuur. In verband hiermede zij tevens nog opgemerkt, dat de beschouwde configuratie eene zoogenaamde regelmatige is.

Door den Heer DE VRIES wordt in § 9, blz. 114, zijner in den aanhef dezes aangehaalde bijdrage ook melding gemaakt van de configuratie (20_3, 15_4), gevormd door de $\binom{6}{2}=15$ radicale lijnen en de $\binom{6}{3}=20$ radicale punten van zes willekeurige in één vlak liggende cirkels. De boven in het geval van $n=3$ beschouwde configuratie (20_3, 15_4), die bleek te ontstaan uit drie driehoeken met gemeenschappelijk homoloog middelpunt, kan steeds, en zelfs op een aantal wijzen dat als een oneindig aantal van de vierde orde voorkomt, als zulk eene uit zes cirkels voortvloeijende configuratie worden opgevat. Men denke zich namelijk vooreerst twee overigens willekeurige cirkels, hebbende eene der 15 lijnen van onze gegeven configuratie, bijv. de lijn 12, tot radicale lijn — en juist deze éene voorwaarde, die toelaat dat twee willekeurige, bestaanbare of toegevoegd onbestaanbare, punten dezer lijn als snijpunten der beide cirkels gedacht worden en dat twee willekeurige punten van de in het midden opgerigte loodlijn als hunne middelpunten worden aangenomen, wijst op de evenbedoelde viervoudige oneindigheid van dergelijke cirkelparen heen — dan kan, omdat de lijn 12 bijv. de beide lijnen 13 en 23 in een zelfde punt, namelijk 123, snijdt, het snijpunt der loodlijnen, uit het middelpunt van den eersten cirkel op 13 en uit dat van den tweeden op 23 nedergelaten, als middelpunt van een derden cirkel dienen wiens straal zóó te bepalen is dat 13 en 23 gelijktijdig de radicale lijnen van dezen nieuwen cirkel met de beide eersten en dus 123 het gemeenschappelijk radicaal punt van alle drie wordt. Geheel op dezelfde wijze geeft ieder der drie andere op de lijn 12 gelegen punten 121′, 122′ en 123′ der configuratie, door middel telkens van de twee andere aldaar zamenkomende lijnen der configuratie, aanleiding tot een nieuwen cirkel die op overeenkomstige wijze met de twee eerste cirkels in verband staat. En dat dan de volledige gegeven configuratie werkelijk die van alle radicale punten en lijnen van de zes aanwezige cirkels onderling is, blijkt doordien de radi-

cale lijn bijv. van de beide uit 123 en uit 121′ voortgekomen cirkels moet gaan door de radicale punten van de twee drietallen die dit cirkelpaar opvolgend met den eersten en met den tweeden aangenomen cirkel vormt, dat is door het snijpunt der radicale lijnen 13 en 11′ en door dat van 23 en 21′, dat is door de beide als 131′ en 231′ gegeven punten, zoodat deze radicale lijn noodwendig de gegeven lijn 31′ moet zijn; terwijl dezelfde redenering natuurlijk op iedere andere verbinding van twee of ook van drie der zes cirkels toepasselijk is. Deze zes cirkels zelve, waarvan de radicale lijnen en punten door de verbindingen twee aan twee en drie aan drie van de zes cijfers 1, 2, 3, 1′, 2′, 3′ worden voorgesteld, kunnen dus eigenaardig door deze cijfers op zich zelve worden aangeduid; en hierdoor is tegelijkertijd de vroeger toegezegde meetkundige beteekenis dezer $1.3 + 3.1 = = 6 = \binom{6}{1}$ in de tabel voor $n = 3$ voorkomende elementen van één cijfer toegelicht. Hierbij ten slotte nog de volgende opmerkingen: 1^0. Ieder der 10 paren van wat wij boven noemden complementaire of toegevoegde of wederkeerige wortelpunten van de gegeven configuratie is een der 10 paren radicale punten van twee drietallen telkens waarin men de zes cirkels kan indeelen. 2^0. De volledige zeshoek der middelpunten van de zes cirkels is eene configuratie $(6_5, 15_2)$, waarvan de 15 zijden loodregt staan op de 15 radicale lijnen en tevens 20 driehoeken vormen in dier voege dat de drie radicale lijnen door ieder radicaal punt loodregt staan op de zijden van den overeenkomstigen uit deze 20 driehoeken. 3^0. Bij behoud der zes middelpunten kunnen voor dezelfde radicale lijnen de vierkanten der zes stralen allen met een zelfde willekeurig bedrag vermeerderd of verminderd worden; dit is dus een voorbeeld van de aangevoerde meervoudige oneindigheid der cirkelstelsels.

Indien men, zooals oorspronkelijk in mijn vroeger opstel geschiedde, in het geval van $n = 4$ aanneemt dat de gebezigde constructie-figuur of de configuratie $(70_4, 56_5)$, in plaats van in één vlak te liggen, eene ruimtefiguur is, kan men die geheel in denzelfden geest als zoo even ook op-

vatten als ontstaan uit acht willekeurige bollen. Terwijl dan deze bollen zelve worden voorgesteld door de $1.4 + 4.1 = 8 = \binom{8}{1}$ elementen van één cijfer, en de bij hunne verbindingen twee aan twee behoorende radicale vlakken door de $1.6 + 4.4 + 6.1 = 28 = \binom{8}{2}$ elementen van twee cijfers die de tabel voor $n = 4$ bevat en op wier meetkundige beteekenis wij zeiden te zullen terugkomen, vertegenwoordigen de toen reeds nader onderzochte $56 = \binom{8}{3}$ elementen van drie cijfers de radicale lijnen der drie aan drie genomen bollen, en de $70 = \binom{8}{4}$ elementen van vier cijfers hunne uit viertallen voortkomende radicale punten. Bij opmerkingen, die zich aan deze beschouwing in denzelfden trant als zoo even zouden laten vastknoopen, staan wij niet verder stil.

Evenzoo stippen wij slechts met een enkel woord aan, dat men voor willekeurige waarden van n ook vlakke en ruimte-figuren zou kunnen beschouwen, correlatief van de tot nog toe besprokene, en waarin dus punten en lijnen, of wel punten en vlakken, lijnen en lijnen in elkanders plaats zouden komen. Voor $n = 3$ zou de op deze wijze ontstaande configuratie $(15_4, 20_3)$ ook hare verklaring kunnen vinden in de $\binom{6}{2} = 15$ uitwendige gelijkvormigheidspunten — of desverkiezende ook sommige uitwendige, en bepaalde daarbij behoorende inwendige gelijkvormigheidspunten — van zes willekeurige cirkels in één vlak, genomen twee aan twee, en in de $\binom{6}{3} = 20$, bij viertallen door deze punten gaande en de punten zelve bij drietallen bevattende, gelijkvormigheidslijnen dezer cirkels drie aan drie. Voor $n = 4$ is aan de configuratie $(56_5, 70_4)$ eene overeenkomstige beteekenis in de ruimte te geven, afgeleid uit acht willekeurige bollen.

Nadat ik het vorenstaande had opgesteld maakte de Heer DE VRIES mij nog opmerkzaam op de verhandeling van S. KANTOR »Ueber eine Gattung von Configurationen in der Ebene und im Raume", voorkomende in den 80[en] Band, 2[e] Abtheilung (Jahrg. 1879) van de Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der Kais. Akademie der Wissenschaften, Wien, 1880, blz. 715—723. In deze verhandeling wordt in de eerste plaats (blz. 716) opgemerkt dat, als de hoekpunten van drie volledige vierhoeken op vier door één punt gaande stralen liggen, de vier punten van HESSE (dat zijn de gemeenschappelijke snijpunten telkens van drie assen van homologie, als waarvan sprake was op blz. 211, regel 7—10, van mijn vroeger opstel), waartoe de vier uit deze vierhoeken te vormen drietallen van onderling perspectivische driehoeken aanleiding geven, tot ééne regte lijn behooren; en vervolgens dat, als vier volledige vierhoeken in vier door één punt getrokken lijnen beschreven zijn, de vier zoo even bedoelde regte lijnen, ontstaande uit de vier te beschouwen drietallen dezer vierhoeken, in één punt zamenkomen. Op deze wijze voortgaande, komt KANTOR tot de beide op blz. 716 onder in déze woorden uitgesproken stellingen:

»Construirt man nun $n-1$ vollständige n-Ecke, deren Ecken auf n gegen einen Punkt W convergirenden Strahlen liegen, so erhält man in jede Combination dieser Strahlen zu $n-1$ eine Reihe von $n-1$ vollständigen $(n-1)$-Ecken eingeschrieben und jede dieser Reihen liefert einen Punkt T_{N-1}. Diese n Punkte liegen alle in einer Geraden g_N. (1 Figur)".

»Werden n vollständige n-Ecke in der eben beschriebenen Lage angenommen, so treffen sich die für ihre n Combinationen zu je $n-1$ construirten Geraden g_N in demselben Punkte T_N. (2 Figur)".

(NB. De twee hier aangehaalde figuren komen waarschijnlijk voor in de vroegere verhandeling van KANTOR »Ueber eine Gattung merkwürdiger Geraden und Punkte bei vollständigen n-Ecken auf dem Kreise" in de Sitzungsberichte als voren, 78[er] Band, 2[e] Abtheilung, waarnaar bij, evenals naar zijne verhandeling »Ueber den Zusammenhang

von n beliebigen Geraden in der Ebene", idem, 76er Band, verwijst. Zie overigens nog over configuratiën in het algemeen de in het opstel van Dr. J. DE VRIES vermelde litteratuur).

En van deze stellingen leidt de eerste hem tot eene uit $n-1$ volledige n-hoeken ontstaande configuratie

$$\left(\binom{2n-1}{n-1}_n, \binom{2n-1}{n-1}_n\right),$$

en de tweede tot eene uit n volledige n-hoeken ontstaande configuratie

$$\left(\binom{2n}{n}_n, \binom{2n}{n-1}_{n+1}\right);$$

zijnde deze laatste juist dezelfde als de door mij uit een eenigzins ander gezigtspunt beschouwde.

Bovendien wordt door KANTOR op blz. 719 nog eene meer algemeene configuratie

$$\left(\binom{m+n-1}{n}_n, \binom{m+n-1}{n-1}_m\right)$$

afgeleid, bij welke gelegenheid onder anderen wordt gezegd dat de bij het tellen van de aantallen punten en lijnen dézer configuratie voorkomende sommatiën — overeenkomende met de boven door mij uit de ontwikkeling van $\frac{(1+x)^{2n}}{x^n}$ verkregen sommatiën voor het beschouwde geval $m=n+1$ — ook, zooals door NETTO werd opgemerkt, uit de hypergeometrische reeks volgen.

De op blz. 721—723 behandelde uitbreiding op de ruimte staat eveneens in naauw verband met wat ik in mijn vorig en in mijn tegenwoordig opstel voor het geval der ruimte heb uiteengezet.

Naar mij voorkomt bevinden zich in het besproken stuk van KANTOR de volgende kleine druk- of schrijffouten:

Blz. 717, regel 14, staat: fünf; lees: n.

» » » 17, » : $\binom{n-1}{1}$; lees: $\binom{n-1}{2}$.

» 719, » 5, » : weniger; » : mehr.

» 723, » 6, » : $\binom{m+n}{n+1}$; » : $\binom{m+n}{n-1}$.

Gaarne maak ik van deze gelegenheid gebruik om eene aanvulling mede te deelen die, zooals de Heer A. E. Rahusen, Leeraar aan de Polytechnische School te Delft, mij deed opmerken, de op blz. 219—220 van mijn vroeger opstel vermelde determinanten-eigenschap, overgenomen uit mijne bijdrage in het *Nieuw Archief voor Wiskunde,* Deel VI, Stuk I, 1879, blz. 79—80, behoeft. Ik haal daartoe de volgende woorden van den Heer Rahusen aan:

»Uit een matrix M, die uit $(n-1)$ rijen en n kolommen bestaat, kan men door weglating telkens van eene kolom n determinanten van den $(n-1)^{\text{sten}}$ graad vormen, die aangegeven worden door $P_1, P_2, \ldots P_n$. Zijn i $[i > 1]$ dezer determinanten, bijv. $P_1, P_2, \ldots P_i$, gelijk nul, zoo zijn tevens gelijk nul de $(n-i)$ overige determinanten $P_{i+1}, \ldots P_n$, *tenzij* gelijk nul zijn alle determinanten van den $(n-i)^{\text{den}}$ graad, die gevormd kunnen worden uit de matrix, welke aan de determinanten $P_1, P_2, \ldots P_i$ gemeen is."

»Zij bijv. $M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{31} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix}$ en P_1, P_2, P_3, P_4, P_5

de determinanten, verkregen door uit de matrix M de 1ste, 2de, 3de, 4de of 5de kolom weg te laten; zoo volgt uit

$$P_1 = P_2 = P_3 = 0\,,\ \begin{pmatrix} n = 5 \\ i = 3 \end{pmatrix},$$

dat:

$$\text{of } P_4 = P_5 = 0 \text{ of } \begin{vmatrix} a_{14} & a_{15} \\ a_{24} & a_{25} \\ a_{34} & a_{35} \\ a_{44} & a_{45} \end{vmatrix} = 0 \text{ is.''}$$

»Nauw verwant aan deze stelling is de volgende: Is een determinant gelijk nul en tevens de minor van het element a_{rs}, zoo zijn tevens gelijk nul de minoren der overige elementen *of* van de rij, *of* van de kolom, waartoe het element a_{rs} behoort."

»In verband hiermede staat ook, dat de bekende stelling — welke zegt, dat, als een determinant gelijk nul is, de elementen van elke rij (of kolom) uitgedrukt kunnen worden als homogene lineaire functies, met gelijke coëfficiënten, der overeenkomstige elementen der overige rijen (of kolommen) — alleen waar is, wanneer geen der eerste minoren gelijk nul is."

De Heer Rahusen meldt mij te dezer zake nog dat hij in een waarschijnlijk spoedig in de *Annales de l'Ecole Polytechnique de Delft* verschijnend opstel onder anderen de volgende meer algemeene stelling uitwerkt:

»Uit de matrix

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1p} & b_{11} & b_{12} \dots b_{1q} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2p} & b_{21} & b_{22} \dots b_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{np} & b_{n1} & b_{n2} \dots b_{nq} \end{vmatrix}$$

(waarbij $q < n < p + q$ wordt ondersteld) kan men $\binom{p+q}{n}$ determinanten van den n^{den} graad vormen. Zijn onder deze determinanten alle die, welke de q kolommen b bevatten, gelijk nul, dan zijn ook alle overige gelijk nul, *tenzij* gelijk nul zijn alle determinanten van den q^{den} graad, die men uit de q kolommen b kan vormen."

Julij 1888.

RAPPORT

OVER DE VERHANDELING:

ALGEMEENE EIGENSCHAPPEN VAN DE ZUIVER ROLLENDE BEWEGING VAN EEN OMWENTELINGSLICHAAM OP EEN HORIZONTAAL VLAK,

TOEGEPAST OP DE

BEWEGING VAN EEN OMWENTELINGSLICHAAM OM EEN VAST PUNT VAN ZIJNE AS,

DOOR

Dr. G. SCHOUTEN.

(Uitgebracht in de vergadering van 30 Juni 1888).

Deze verhandeling van Dr. G. Schouten bestaat, zooals ook de titel reeds te kennen geeft, uit twee gedeelten die door een tamelijk lossen band verbonden zijn.

Het eerste deel behandelt in twee hoofdstukken het rollen van een omwentelingslichaam — onderworpen aan de werking der zwaartekracht — over een horizontaal vlak. Na in het eerste hoofdstuk de bewegingsvergelijkingen afgeleid en aan eenige herleidingen onderworpen te hebben, neemt de schrijver in het tweede zijne toevlucht tot eene graphische methode ten einde orde te brengen in de verschillende gevallen van dit inderdaad tamelijk ingewikkelde mechanische probleem. Schrijver is in de keuze dier methode naar ons inzien gelukkig geslaagd. Terwijl hij den hellingshoek als abscis gebruikt, wordt als ordinaat uitgezet wat schrijver de hellingsenergie noemt, dat is eene grootheid gelijk aan het verschil tusschen de totale energie (potentieele +

kinetische) en de schommelingsenergie, onder welke laatste verstaan wordt dat gedeelte der energie 't welk van de fluctie van den hellingshoek afhankelijk is, indien men als onafhankelijk veranderlijken de drie welbekende EULER'sche hoeken invoert. Van de kromme die op deze wijze ontstaat, kan het beloop in algemeene trekken worden aangegeven, terwijl hare snijding door eene rechte, wier afstand tot de abscissenas, waarmede zij evenwijdig loopt, gelijk is aan de totale energie, de beweging in groote trekken doet kennen en de bijzondere gevallen tot hun recht doet komen.

Het tweede gedeelte der verhandeling loopt over het bekende probleem van de beweging van een omwentelingslichaam onderworpen aan de zwaartekracht en ondersteund in een vast punt der omwentelingsas. Inderdaad kan dit probleem als een bijzonder geval beschouwd worden van het meer algemeene in het eerste gedeelte behandelde. Deze beschouwing is echter weinig natuurlijk en werpt geen nieuw licht op het meer bijzonder probleem. Wat echter wel eenig verband brengt tusschen beide gedeelten der verhandeling is de eenheid van methode. De aanwending van de kromme der hellingsenergie brengt hier wel geene nieuwe waarheden te voorschijn, wat bij een zoo veelvuldig en volledig behandeld vraagstuk ook nauwelijks te verwachten ware, maar zij geeft toch een zeer helder overzicht van de verschillende gevallen die zich kunnen voordoen en blijkt naast andere beschouwingswijzen recht van bestaan te bezitten. Vooral de eigenaardige wijze, waarop de bijzondere gevallen bij welke de as den verticalen stand aannemen kan of asymptotisch tot deze nadert, optreden, verdient opmerking.

Tevens behandelt schrijver de integratie der bewegingsvergelijkingen. Behalve LOTTNER, door den schrijver aangehaald, hebben nog meerdere anderen *) algemeene oplossingen met behulp van elliptische functiën gegeven. Toch gelooven wij dat de korte en bondige aanwijzingen dier

---

*) FRENZEL, *Schlömilch Zeitschr.* XXVI, § 104—127; SÖDERBLOM, *Upsola, Acta* XII (3) en vooral JACOBI, *Gesammelte Werke*, Bd. II, S. 496.

oplossing door den schrijver achter elk der verschillende gevallen gevoegd, niet misplaatst zijn in zijne verhandeling.

Wij meenen aan de Akademie de opname der geheele verhandeling in de Verslagen en Mededeelingen te mogen aanbevelen.

D. J. KORTEWEG.
CH. M. SCHOLS.

ALGEMEENE EIGENSCHAPPEN

VAN DE

ZUIVER ROLLENDE BEWEGING VAN EEN OMWENTELINGS-LICHAAM OP EEN HORIZONTAAL VLAK,

TOEGEPAST OP DE

BEWEGING VAN EEN OMWENTELINGSLICHAAM OM EEN VAST PUNT VAN ZIJNE AS.

DOOR

Dr. G. SCHOUTEN.

INLEIDING.

Uit de eerste integraalvergelijkingen van de zuiver rollende beweging van een omwentelingslichaam op een horizontaal vlak kunnen eenige algemeene eigenschappen worden afgeleid, wier kennis een algemeen inzicht geeft in den aard der verschillende bewegingen die het lichaam kan hebben, met aanwijzing van de voorwaarden, waaronder deze plaats grijpen.

Een weg tot nadere bepaling der bewegings-elementen door berekening wordt daardoor als van zelve aangewezen.

Nadat in het eerste hoofdstuk de integraalvergelijkingen zijn afgeleid, worden in het tweede de algemeene eigenschappen der beweging ontwikkeld, die in het derde worden toegepast op het geval, dat het lichaam op het vlak steunt in een punt, op zijne as gelegen, of ook, daar dit punt

gedurende de beweging in rust blijft, op de beweging van een omwentelingslichaam om een punt van zijne as.

Mocht van dit vraagstuk reeds eene volledige oplossing bestaan, dan moge de hier gegevene eene plaats vinden ter wille van de methode van onderzoek.

In geen der beide mij bekende verhandelingen wordt het vraagstuk volledig opgelost.

In het stuk van Dr. C. LOTTNER *) wordt alleen het geval behandeld, dat het moment ($M \lambda$) van de hoeveelheid van beweging ten opzichte van de verticaal van het vaste punt eene absoluut grootere waarde heeft dan dat ($M \mu$) ten opzichte van de as, hoewel er in de verhandeling zelve van die beperking geen melding wordt gemaakt.

In de verhandeling van Dr. P. VAN GEER †) wordt eene nog meer beperkende voorwaarde gesteld: het lichaam wordt ondersteld in beweging gebracht te zijn door een koppel van impulsie, loodrecht op de as van 't lichaam, zoodat $\lambda = \mu \cos \alpha$ wordt ondersteld, als α de hellingshoek is bij 't begin van de beweging.

Aan de hier volgende oplossing ligt eene graphische methode ten grondslag, terwijl zooveel mogelijk getracht is aan de standvastigen, welke in de vergelijkingen voor de bewegings-elementen voorkomen, eene mechanische beteekenis te geven, zoodat het mogelijk werd de uitkomsten aanschouwelijk voor te stellen.

---

*) Dr. C. LOTTNER, Reduction der Bewegung eines schweren, um einen festen Punct rotirenden Revolutionskörpers auf die elliptischen Transcendenten. *Journal* von CRELLE, 50er Band, 1855.

†) Dr. P. VAN GEER, Over de beweging van een zwaar lichaam om een vast punt. *Verslagen en Mededeelingen* der Kon. Akad. v. Wet., Afd. Natuurkunde, 2e Reeks, Deel V, 1871.

HOOFDSTUK I.

De eerste integraalvergelijkingen van de beweging.

1. Zij PQ (fig. 1) de as van een omwentelingslichaam en S het punt, waarmede dit op het horizontale vlak rust. Is C het zwaartepunt en treft de loodlijn uit S op de as neergelaten deze in D, dan kunnen $CD = \xi$ en $SD = \eta$ als de coordinaten van het steunpunt beschouwd worden.

2. De stand van het lichaam is bepaald door de volgende hoeken:

a. den hoek θ, gevormd door een bepaald deel CQ van de as met de naar boven als positief gerekende verticaal; wij zullen dien hoek den *hellingshoek* van het lichaam noemen;

b. den hoek ψ, dien het verticale meridiaanvlak PSQ met een vast verticaal vlak XOZ maakt. Wij zullen dezen hoek het *azimuth* van het lichaam noemen, en aannemen dat hij beschreven wordt, als het laatstgenoemde vlak om de naar boven gerichte verticaal als as in den zin van de wijzers eener klok wordt gewenteld tot het evenwijdig komt met het eerstgenoemde;

c. den hoek φ, dien een bepaald meridiaanvlak van het lichaam met het verticale meridiaanvlak maakt. Wij zullen aannemen, dat φ beschreven wordt, als het verticale meridiaanvlak om CQ als as in den zin van de wijzers eener klok wordt gewenteld tot het samenvalt met het bepaalde meridiaanvlak.

3. Het lichaam zal ieder oogenblik eene wenteling bezitten om eene as, die door het steunpunt gaat. De hoeksnelheid ω, waarmede wij onderstellen dat deze wenteling op zeker oogenblik plaats grijpt, ontbinden wij in de volgende hoeksnelheden:

a. $\frac{d\theta}{dt}$ of θ' om de lijn, die in S loodrecht staat op het verticale meridiaanvlak;

b. $\frac{d\varphi}{dt}$ of φ' om de lijn uit S evenwijdig aan CQ getrokken;

c. $\frac{d\psi}{dt}$ of ψ' om de verticaal van het steunpunt.

Wij merken hierbij op, dat de hoeksnelheid n, waarmede het lichaam in werkelijkheid om de as wentelt, gelijk is aan φ' vermeerderd met de hoeksnelheid $\psi' \cos\theta$, waarmede het verticale meridiaanvlak ten opzichte van het bepaalde meridiaanvlak wentelt, zoodat

$$n = \varphi' + \psi' \cos\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

is. De hoeksnelheid ω wordt dus gegeven door

$$\omega^2 = n^2 + \theta'^2 + \psi'^2 \sin^2\theta \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

4. De levende kracht T van het lichaam, als dit de bovengenoemde wenteling ω bezit, kan op de volgende wijze bepaald worden:

De lijnen door het zwaartepunt getrokken evenwijdig aan de θ'-, n-, $\psi' \sin\theta$-assen vormen een stelsel hoofdassen van inertie. Zij ϱ_x de traagheidsstraal ten opzichte van eene middellijn van den aequator, en ϱ_z die ten opzichte van de lichaams-as.

De afstand d van het zwaartepunt tot de oogenblikkelijke as wordt gegeven door

$$d^2 = \xi^2 + \eta^2 - \left(\frac{\xi \,.\, n - \psi' \sin\theta \,.\, \eta}{\omega}\right)^2.$$

Is dus M de massa van het lichaam, dan zal

$$\frac{2T}{M} = \omega^2 \left\{ d^2 + \varrho^2_x \,.\, \frac{\theta'^2}{\omega^2} + \varrho^{2x} \,.\, \frac{\psi'^2 \sin^2\theta}{\omega^2} + \varrho^2_z \,.\, \frac{n^2}{\omega^2} \right\}$$

zijn, welke vergelijking door substitutie van de waarde van d overgaat in

$$\frac{2\,T}{M} = \theta'^2 (\varrho^2{}_x + \xi^2 + \eta^2) + \psi'^2 \sin^2\theta\,(\varrho^2{}_x + \xi^2) +$$

$$n^2 (\varrho^2{}_z + \eta^2) + 2\,\xi\,\eta\,.\,n\,\psi' \sin\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

5. Daar ψ en φ niet in T voorkomen, evenmin als in de krachtsfunctie $U = M\,g\,(\eta \sin\theta - \xi \cos\theta)$, welke enkel eene functie van θ is, daar ξ en η als zoodanig moeten beschouwd worden, zoo vinden wij door toepassing van de bewegingsvergelijkingen

$$\frac{d\,\frac{d\,T}{d\,\psi'}}{d\,t} = \frac{d\,(T + U)}{d\,\psi}$$

zooals LAGRANGE die heeft afgeleid en waarin ψ eene der algemeene coordinaten is, waarin T en U zijn uitgedrukt, de volgende integraalvergelijkingen:

$$\frac{d\,T}{d\,\psi'} = \text{constante} = M\,\lambda\,;\ \frac{d\,T}{d\,\varphi'} = \text{constante} = M\,\mu.$$

Beiden drukken uit, dat het moment van de hoeveelheid van beweging om zekere as standvastig blijft gedurende de beweging; de eerste om de verticaal van het steunpunt, de tweede om de lijn uit het steunpunt evenwijdig aan de lichaams-as getrokken.

Worden deze vergelijkingen ontwikkeld door middel van (3), dan vinden wij

$$\psi' \sin^2\theta (\varrho^2{}_x + \xi^2) + n \cos\theta (\varrho^2{}_z + \eta^2) + \xi\eta \sin\theta (n + \psi' \cos\theta) = \lambda\ (4),$$

$$\psi' \sin\theta\,.\,\xi\eta \qquad + n(\varrho^2{}_z + \eta^2) \qquad = \mu\ (5).$$

Eene derde integraalvergelijking wordt gegeven door het beginsel van arbeidsvermogen, uitgedrukt in de vergelijking

$$T - U = \text{const.},$$

welke door middel van (3) overgaat in

$$\theta'^2 (\varrho^2{}_x + \xi^2 + \eta^2) + \psi'^2 \sin^2\theta\,(\varrho^2{}_x + \xi^2) + n^2 (\varrho^2{}_z + \eta^2) +$$
$$+ 2\,\xi\,\eta\,.\,n\,\psi' \sin\theta = \text{const.} - 2\,g\,(\eta \sin\theta - \xi \cos\theta) .. (6)$$

6. De vergelijkingen (4) en (5) bepalen n en ψ' als functies van θ, zoodat (6) θ' ook als functie van θ geeft. De oplossing geeft

$$\left.\begin{aligned} n &= \frac{-\dfrac{\lambda - \mu\cos\theta}{\sin\theta}\,\xi\,\eta + \mu\,(\varrho^2_x + \xi^2)}{(\varrho^2_x + \xi^2)(\varrho^2_z + \eta^2) - \xi^2\eta^2} \\ \psi'\sin\theta &= \frac{\dfrac{\lambda - \mu\cos\theta}{\sin\theta}(\varrho^2_z + \eta^2) - \mu\,\xi\,\eta}{(\varrho^2_x + \xi^2)(\varrho^2_z + \eta^2) - \xi^2\eta^2} \\ \theta'^2(\varrho^2_x + \xi^2 + \eta^2) &= \text{const.} - \left\{2\,g\,h + \frac{\mu^2}{\varrho^2_x + \eta^2} + \right. \\ &\left. + \frac{\varrho^2_z + \eta^2}{(\varrho^2_x + \xi^2)(\varrho^2_z + \eta^2) - \xi^2\eta^2}\left(\frac{\lambda - \mu\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{\mu\,\xi\,\eta}{\varrho^2_z + \eta^2}\right)^2\right\} \end{aligned}\right\} .(7)$$

waarin $h = \eta\sin\theta - \xi\cos\theta$ de hoogte van het zwaartepunt boven het steunvlak voorstelt.

De laatste van deze zal na integratie θ als functie van den tijd leeren kennen, terwijl door twee quadraturen n en ψ in θ zullen bepaald worden.

7. Om de plaats van het lichaam in de ruimte aan te wijzen, zal het voldoende zijn die van een zijner punten, b.v. het zwaartepunt, te bepalen.

De snelheid van het zwaartepunt is:

$-\psi'\sin\theta\,.\,\xi - n\,\eta$ in de richting van de θ'-as;
$\theta'\,\eta$ in die van de lichaams-as;
$\theta'\,\xi$ in die van de $\psi'\sin\theta$-as.

De ontbondenen u, v, w van die snelheid resp. in de richtingen van de vaste coordinaat-assen OX, OY, OZ zijn dus

$$\left.\begin{aligned} u &= \theta'(\eta\sin\theta - \xi\cos\theta)\cos\psi + (n\,.\,\eta + \psi'\sin\theta\,.\,\xi)\sin\psi, \\ v &= \theta'(\eta\sin\theta - \xi\cos\theta)\sin\psi - (n\,.\,\eta + \psi'\sin\theta\,.\,\xi)\cos\psi, \\ w &= \theta'(\eta\cos\theta + \xi\sin\theta). \end{aligned}\right\} .(8)$$

Deze geïntegreerd zullen de coordinaten x, y, z van het zwaartepunt geven.

De coordinaten X, Y van het steunpunt zijn nu

$$\left.\begin{aligned} X &= x + (\xi \sin \theta + \eta \cos \theta) \cos \psi \\ Y &= y + (\xi \sin \theta + \eta \cos \theta) \sin \psi \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (9)$$

zoodat de ontbondenen U en V van de snelheid, waarmede S zijn spoor beschrijft resp. in de richtingen $O\,X$ en $O\,Y$ gegeven worden door

$$\left.\begin{aligned} U &= \varphi' \sin \psi \,.\, \eta + (\xi' \sin \theta + \eta' \cos \theta) \cos \psi, \\ V &= -\varphi' \cos \psi \,.\, \eta + (\xi' \sin \theta + \eta' \cos \theta) \sin \psi, \end{aligned}\right\} \ldots (10)$$

waarin ξ' voor $\dfrac{d\,\xi}{d\,t}$ en η' voor $\dfrac{d\,\eta}{d\,t}$ gesteld zijn.

Uit deze vergelijkingen volgt verder

$$\left.\begin{aligned} V \cos \psi - U \sin \psi &= -\varphi' \,.\, \eta \\ V \sin \psi + U \cos \psi &= \xi' \sin \theta + \eta' \cos \theta \end{aligned}\right\} \ldots (11)$$

De eerste stelt de snelheid voor, waarmede het steunpunt S zich in de richting van de θ'-as beweegt, de tweede die in de richting van het beweeglijke been van het azimuth.

HOOFDSTUK II.

Algemeene eigenschappen van de zuiver rollende beweging van een omwentelingslichaam op een horizontaal vlak.

9. Worden de beide leden van de laatste der vergelijkingen (7) met $\frac{1}{2}\,M$ vermenigvuldigd, dan stelt het eerste lid

$$\tfrac{1}{2}\,M\,\theta'^2\,(\varrho^2_x + \xi^2 + \eta^2)$$

de energie voor, die het lichaam verkrijgt alleen ten gevolge van de verandering in helling, die zijne as ondergaat; dit gedeelte van de energie van 't lichaam zullen wij de *schommelings-energie* noemen.

De constante in het tweede lid stelt de *totale energie* van het lichaam voor.

De vorm tusschen de accolades, dien wij door Θ zullen aanduiden, zoodat

$$\Theta = \tfrac{1}{2} M \left\{ 2\,g\,h + \frac{\mu^2}{\varrho^2_z + \eta^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\varrho^2_z + \eta^2}{(\varrho^2_x + \xi^2)(\varrho^2_z + \eta^2) - \xi^2 \eta^2} \left(\frac{\lambda - \mu \cos \theta}{\sin \theta} - \frac{\mu\, \xi\, \eta}{\varrho^2_z + \eta^2} \right)^2 \right\} \quad ..(12)$$

is, stelt het overige gedeelte van de energie voor, nl. de potentiale verminderd met die, welke het lichaam heeft ten gevolge van de wentelingen n en ψ'. Daar bij bepaalde waarden van λ en μ die hoeveelheid alleen afhangt van de helling θ der as, zullen wij haar de *hellings-energie* noemen.

10. Zetten wij nu Θ als ordinaat uit op een rechthoekig coordinaat-stelsel met θ tot abscis, dan stelt

$$y = \Theta$$

de vergelijking eener kromme voor, die wij de *kromme der hellings-energie* zullen noemen.

Deze kromme heeft, als wij het geval $\lambda^2 = \mu^2$ voorloopig uitsluiten en ons bepalen tot de abscissen tusschen 0 en π, de lijnen $\theta = 0$ en $\theta = \pi$ tot asymptoten; zij ligt geheel boven de abscissen-as en moet dus minstens één punt hebben, waarin de raaklijn evenwijdig is aan de abscissen-as, waar Θ dus eene *minimum-waarde* heeft.

De vergelijking

$$\frac{d\,\Theta}{d\,\theta} = 0$$

moet derhalve minstens één bestaanbaren wortel hebben tusschen 0 en π gelegen, die Θ tot een *minimum* maakt.

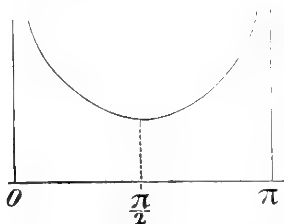
Heeft die vergelijking meer bestaanbare wortels, dan heeft de kromme voor die wortels afwisselend *maximum*- en *minimum*-ordinaten, tenzij in die punten buigpunten mochten aanwezig zijn.

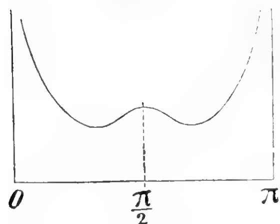
Heeft dus de kromme der hellings-energie voor elk stel waarden van λ en μ minstens ééne *minimum*-ordinaat, omgekeerd zullen λ en μ altijd zóó bepaald kunnen worden, dat die minimum-ordinaat bij eene willekeurig gekozen abscis α behoort. Daartoe wordt slechts vereischt, dat λ en μ voldoen aan de vergelijking

$$\left(\frac{d\,\Theta}{d\,\theta}\right)_{\alpha} = 0,$$

wat op onbepaald vele wijzen kan plaats grijpen, aangezien λ en μ onderling onafhankelijke willekeurige waarden zijn.

Is het lichaam b. v. eene ellipsoïde van omwenteling, dan zal voor $\lambda = 0$ Θ eene *minimum*-waarde hebben voor $\theta = \frac{\pi}{2}$, ingeval de omwentelings-as de grootste der assen is.





De kromme zal een vorm hebben overeenkomstig de eerste figuur.

Is de ellipsoïde echter afgeplat, dan zal voor μ zeer klein met betrekking tot h de kromme bij de abscis $\frac{\pi}{2}$ eene *maximum*-ordinaat hebben, en een vorm overeenkomstig de tweede figuur, die evenals de vorige symmetrisch is ten opzichte van de ordinaat bij $\frac{\pi}{2}$. Blijkt uit dit voorbeeld, dat de kromme der hellings-energie meerdere *minimum*-ordinaten met tusschen gelegen *maximum*-ordinaat kan hebben, tevens doet het zien, dat zij voor verschillende waarden van λ en μ ook verschillende vormen kan aannemen.

11. Wordt op hetzelfde coordinaten-stelsel de rechte lijn

$$y = \text{constante}$$

getrokken, welke lijn wij *de lijn van energie* zullen noemen, dan zullen die deelen van de kromme der hellings-energie, welke onder deze lijn gelegen zijn, in hunne abscissen de hellingen aanwijzen, die de lichaams-as gedurende de beweging kan verkrijgen.

Zij Fig. 2 de kromme der hellings-energie voor zeker stel waarden van λ en μ, zoodat de hellings-energie Θ twee minimum-waarden heeft voor $\theta = \theta_1$ en $\theta = \theta_2$ en eene maximum-waarde voor $\theta = \theta_0$.

Raakt de lijn van energie de kromme in D, dan moet θ' voortdurend gelijk nul zijn. De lichaams-as zal onveranderlijk dezelfde helling θ_2 behouden, zoodat zij met eenparige beweging een kegelmantel zal beschrijven, die de verticaal tot as en $2\,\theta_2$ tot tophoek heeft. Volgens (11) beweegt zich het steunpunt in eene richting loodrecht op het beweeglijke been van het azimuth, zoodat de kromtestraal ϱ van het spoor op het horizontale vlak beschreven gelijk is aan

$$\varrho = \frac{-\varphi' \,.\, \eta}{\psi'} = \left(\cos\theta - \frac{n}{\psi'}\right)\eta.$$

Dit spoor is dus een cirkel. Het spoor op het lichaam zelf, gevormd door de meetkundige plaats der steunpunten, is een parallelcirkel met den straal η.

Deze beweging van het lichaam heet *conische beweging;* zij heeft met eene *minimum*-waarde van energie plaats, en draagt, zooals wij straks zullen zien, het karakter van *stabiliteit.*

Wordt de energie van de beweging vergroot, zonder in λ en μ eene wijziging te brengen, wat dus geschieden kan door het lichaam onder zijne conische beweging een stoot te geven, gericht in het verticale vlak van zijne as, dan zal dit in de figuur aangewezen worden door de lijn van energie te laten rijzen.

De hellingshoek θ zal nu kunnen veranderen tusschen θ_3 en θ_4, aangegeven door de abscissen der snijpunten van kromme en lijn.

Die grenswaarden θ_3 en θ_4 zullen bereikt worden. Immers de laatste van (7) kan nu op de volgende wijze geschreven worden:

$$\theta'^2 = (\theta - \theta_3)(\theta - \theta_4) f(\theta),$$

waar $f(\theta)$ voor alle abscissen tusschen 0 en π eindige negatieve waarden zal hebben.

Hieruit volgt:

$$\pm\, dt = \sqrt{\frac{1}{-f(\theta)}} \frac{d\theta}{\sqrt{(\theta - \theta_3)(\theta_4 - \theta)}},$$

zoodat het tijdsverloop $T_{\theta_3}^{\theta}$, waarin de helling van θ tot θ_3 verandert, gegeven wordt door

$$T_{\theta_3}^{\theta} = \left[\sqrt{\frac{1}{-f(\theta)(\theta_4 - \theta)}}\right]_{\theta_3 < \theta < \theta_4} \int_{\theta_3}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta - \theta_3}}$$

en in ieder geval eene *eindige* waarde zal hebben. Evenzoo blijkt dat $T_{\theta}^{\theta_4}$ eindig is.

De lichaams-as zal dus regelmatige schommelingen maken in het vlak, door haar en de verticaal bepaald. Bij elke schommeling zal de *schommelings-energie* eene *maximum*-waarde verkrijgen bij de helling der oorspronkelijke conische beweging. Hoe grooter de energie van de beweging wordt, des te grooter zal de slingerwijdte der schommelingen worden. Tevens blijkt, dat de oorspronkelijke beweging eene *stabiele* is.

Bereikt eindelijk de energie die waarde, waarbij de lijn van energie de kromme in B raakt, dan zullen de schommelingen der as tusschen de grenzen θ_5 en θ_6 plaats grijpen, maar tevens zal het lichaam eene tweede conische

beweging kunnen hebben bij de helling θ_1, aangegeven door de abscis van het raakpunt B. Wordt de energie nu nog meer vergroot, dan kan het lichaam twee verschillende bewegingen hebben; de eene is de gestoorde van de eerste, de andere die van de tweede conische beweging.

Bij voortgezette vermeerdering van de energie zal er eens een toestand komen, waarbij de lijn van energie de kromme in C raakt, waar de hellings-energie eene maximum-waarde heeft.

De schommelingen van elk der bewegingen, die het lichaam kon hebben, houden nu op, aangezien de lichaamsas de helling θ_0, aangegeven door de abscis van het raakpunt C, *asymptotisch* zal naderen.

Onder deze omstandigheid toch kan θ' als volgt uitgedrukt worden:

$$\theta'^2 = (\theta - \theta_7)(\theta - \theta_0)^2(\theta - \theta_8)F(\theta)$$

waarin $F(\theta)$ voor alle waarden van θ tusschen 0 en π eindige negatieve waarden heeft.

Hieruit volgt:

$$\pm\, dt = \sqrt{\frac{1}{(\theta - \theta_7)(\theta_8 - \theta).\, - F(\theta)}}\,\frac{d\theta}{\theta - \theta_0},$$

zoodat $T_{\theta_7}^{\theta}$ en $T_{\theta}^{\theta_8}$ beiden *oneindig groot* zijn.

Onderstellen wij echter, dat het lichaam met dezelfde energie in beweging wordt gezet onder de helling θ_0, dan zal deze weer onveranderlijk gelijk θ_0 blijven, en het lichaam alzoo eene derde *conische* beweging hebben, die nu echter het karakter van *instabiliteit* draagt.

Neemt eindelijk de energie van de beweging nog meer toe, dan zal het lichaam slechts ééne beweging kunnen hebben. De slingerwijdte der schommelingen van de as wordt met de energie grooter, doch kan de waarde π nimmer bereiken. De as zal nimmer door den verticalen stand gaan.

Verder zal de schommelings-energie bij elke schomme-

ling twee *maximum*-waarden bereiken, nl. bij de hellingen der oorspronkelijke *stabiele* conische bewegingen, en ééne *minimum*-waarde bij de helling der *instabiele* conische beweging.

12. Terwijl de lichaams-as schommelt, wordt het vlak van schommeling met eene hoeksnelheid ψ' om de verticaal van het steunpunt gedraaid.

Deze wenteling zal òf voortdurend in denzelfden zin plaats grijpen, òf bij elke schommeling van teeken kunnen veranderen.

Wordt de helling gedurende de beweging zeer gering, dan moet ψ' op dat oogenblik eene zeer groote waarde hebben. De uitdrukking voor Θ toch kan onder de volgende gedaante geschreven worden:

$$\Theta = \tfrac{1}{2} M \left\{ 2gh + \frac{\mu^2}{\rho^2_z + \eta^2} + \frac{(\rho^2_x + \xi^2)(\rho^2_z + \eta^2) - \xi^2\eta^2}{\rho^2_z + \eta^2} \psi'^2 \sin^2\theta \right\}$$

zoodat

$$\frac{(\rho^2_x + \xi^2)(\rho^2_z + \eta^2) - \xi^2\eta^2}{\rho^2_z + \eta^2} \psi'^2 \sin^2\theta = \frac{2\,\Theta}{M} - \left(2gh + \frac{\mu^2}{\rho^2_x + \eta^2}\right)$$

is. Omdat h, ξ, η eindige waarden behouden en Θ zeer groot is als de as den verticalen stand nabij komt, zal ook $\psi'^2 \sin^2\theta$ en *à fortiori* ψ'^2 dan zeer groot zijn.

13. Beschouwen wij nog kortelijk het geval $\lambda^2 = \mu^2$.

Is $\lambda = \mu$, dan snijdt de kromme der hellings-energie de ordinaten-as, maar heeft nog de lijn $\theta = \pi$ tot asymptoot. Heeft de snijding onder een rechten hoek plaats, en 't blijkt uit den vorm van de uitdrukking voor Θ dat dit het geval moet zijn als het raakpunt bij verticalen stand van de as op de as ligt, dan is de ordinaat bij $\theta = 0$ eene *minimum*- of *maximum*-ordinaat.

In 't eerste geval is de eenparige wenteling om de verticaal naar boven gerichte as eene *stabiele* beweging, en alle andere bewegingen, die het lichaam kan hebben zijn

gestoorde van deze, waarbij de as schommelingen maakt om de verticaal als middenstand.

In 't tweede geval is die eenparige wenteling eene *instabiele*, en het lichaam zal eene *stabiele* conische beweging kunnen hebben bij de helling, aangegeven door de abscis van het laagste punt van de kromme der hellings-energie. Alle bewegingen van het lichaam kunnen beschouwd worden als gestoorde van deze stabiele conische beweging. Zoolang de energie van de beweging kleiner blijft dan die van de instabiele wenteling, zal de as schommelingen maken, waarbij de verticale stand door de as niet wordt bereikt. Is de energie daaraan gelijk, dan zal de as zich *asymptotisch* naar den verticalen stand begeven; is ze grooter, dan zal de as bij elke schommeling door den verticalen stand gaan.

Snijdt de kromme der hellings-energie de ordinaten-as niet loodrecht, zooals dat o. a. bij den hoepel het geval is, dan kan het lichaam geene eenparige wenteling om de verticaal naar boven gerichte as hebben, en het hangt nu van het beloop der kromme af, hoedanig de bewegingen zullen zijn, die het lichaam nu zal kunnen hebben. Onder alle vormen van de krommen vermelden wij er slechts één, insgelijks bij den hoepel voorkomende, nl. die, waarbij de kromme voortdurend stijgt met toenemende abscissen. In dit geval kan het lichaam geen enkele conische beweging hebben, en moet de as bij alle bewegingen van het lichaam om de verticaal als middenstand schommelen.

Het geval $\lambda = -\mu$ geeft tot soortgelijke opmerkingen aanleiding; de ordinaten-as in het vorige geval worde slechts vervangen door de lijn $\theta = \pi$.

14. Alvorens tot de toepassing over te gaan, zullen wij de oneindig weinig gestoorde stabiele conische beweging meer van nabij beschouwen.

Heeft de kromme der hellings-energie eene *minimum*-ordinaat bij de abscis α, dan kan het lichaam bij de helling α eene stabiele conische beweging hebben.

Onderstellen wij, dat deze oneindig weinig gestoord wordt door een stoot, aangebracht in het verticale vlak van de lichaams-as, dan zal de lijn van energie, die raaklijn was bij de conische beweging, nu snijlijn wezen; de abscissen

$\theta_1 < \alpha$ en $\theta_2 > \alpha$ van de snijpunten zullen zeer weinig van α verschillen.

De laatste van de vergelijkingen (7) kunnen wij nu onder den volgenden vorm schrijven:

$$\theta'^2 = (\theta - \theta_1)(\theta_2 - \theta) F(\theta),$$

waar $F(\theta)$ voor alle abscissen tusschen 0 en π eindige positieve waarden heeft.

Met verwaarloozing van alle machten van $\theta - \alpha$ hooger dan de eerste macht, kunnen wij $F(\theta)$ door $-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\theta'^2}{d\theta^2}\right)_{\theta=\alpha}$ vervangen, en schrijven:

$$\theta'^2 = (\theta - \theta_1)(\theta_2 - \theta) \cdot -\tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2\,\theta'^2}{d\,\theta^2}\right)_\alpha.$$

Hieruit volgt:

$$\pm\, d\,t = \sqrt{\frac{1}{-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\,\theta'^2}{d\,\theta^2}\right)_\alpha}}\;\frac{d\,\theta}{\sqrt{(\theta - \theta_1)(\theta_2 - \theta)}},$$

welke tusschen de grenzen θ_1 en θ_2 geïntegreerd geeft:

$$T_{\theta_1}^{\theta_2} = \frac{\pi}{\sqrt{-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\,\theta'^2}{d\,\theta^2}\right)_\alpha}} \quad \text{. . . . . . . (14)}$$

De overeenkomstige verandering $\Psi_{\theta_1}^{\theta_2}$ van het azimuth zal met denzelfden graad van benadering gevonden worden door

$$\Psi_{\theta_1}^{\theta_2} = T_{\theta_1}^{\theta_2} \times \psi'_\alpha \quad \text{. . . . . (15)}$$

waar ψ'_α de azimuthale snelheid der conische beweging is.

HOOFDSTUK III.

De beweging van een omwentelingslichaam om een vast punt van zijne as.

15. In de vergelijkingen (7)—(11) moet nu $\eta = 0$ en $\xi = -l$ genomen worden, als l de afstand is waarop het zwaartepunt *boven* het vaste punt ligt, wanneer de helling van de as nul is.

De vergelijkingen (1) en (7) gaan hierdoor over in

$$\left.\begin{aligned} \theta'^2 &= H - a\cos\theta - \left(\frac{A - B\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2, \\ \psi' &= \frac{A - B\cos\theta}{\sin^2\theta}, \\ \varphi' &= n - \psi'\cos\theta. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (16)$$

waarin

$$A = \frac{\lambda}{\varrho^2_x + l^2}, \; B = \frac{\mu}{\varrho^2_x + l^2}, \; n = \frac{\mu}{\varrho^2_z}, \; a = \frac{2\,g\,l}{\varrho^2_x + l^2} = \frac{2\,g}{\Delta} = \tfrac{1}{2}\,\omega^2$$

is, als Δ de gereduceerde slingerlengte van het lichaam is ten opzichte van het vaste punt en ω de hoeksnelheid, die het lichaam heeft, als het van uit den hoogsten stand gevallen is naar den laagsten.

De constante H vermeerdert met de totale energie.

De vergelijking van de lijn van energie wordt hier vervangen door

$$y = H \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

en die van de kromme der hellings-energie door

$$y = a\cos\theta + \left(\frac{A - B\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 \ldots\ldots (18).$$

Beginnen wij met de beschouwing van het

16. *Eerste geval* $\lambda = \mu$.

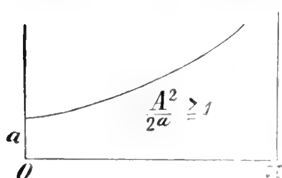
De vergelijking (18) kan nu op de volgende wijze geschreven worden:

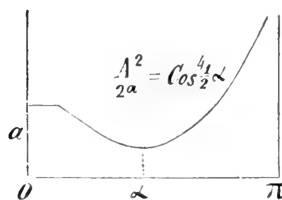
$$y = a \cos \theta + A^2 \, tg^2 \tfrac{1}{2} \theta \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (19)$$

Nu is

$$\frac{dy}{d\theta} = a \sin \theta \left(\frac{A^2}{2 \, a \cos^4 \frac{1}{2} \theta} - 1 \right),$$

zoodat y voor $\frac{A^2}{2a} \geqq 1$ de minimum-waarde a heeft voor





$\theta = 0$. De kromme stijgt met toenemenden abscissen en heeft de lijn $\theta = \pi$ tot asymptoot.

Voor $\frac{A^2}{2a} = \cos^4 \frac{1}{2} \alpha$ heeft y de maximum-waarde a voor $\theta = 0$, en de minimum-waarde $a (1 - 2 \sin^4 \frac{1}{2} \alpha)$ voor $\theta = \alpha$.

De kromme heeft bij de abscis α eene minimum-ordinaat, snijdt de ordinaten-as loodrecht en heeft de lijn $\theta = \pi$ tot asymptoot.

De beteekenis van $\sqrt{\frac{A^2}{2a}}$ is duidelijk, als wij die uitdrukking op de volgende wijze schrijven $\frac{\lambda}{(\varrho_x^2 + l^2)\,\omega}$; $\sqrt{\frac{A^2}{2a}}$ stelt dus de verhouding voor van het moment der hoeveelheid van beweging ten opzichte van de verticaal van 't vaste punt, of, wat hier 't zelfde is, ten opzichte van de lichaams-as, tot het moment van de hoeveelheid van beweging, die het lichaam heeft als het van uit den hoogsten stand naar den laagsten stand is gevallen, genomen ten opzichte van de ophang-as. Noemen wij dit moment het *valmoment* (γ) van het lichaam, dan kunnen wij op de volgende wijze een beeld schetsen van de bewegingen, die het

lichaam zal kunnen hebben, in acht nemende dat $\psi' = \frac{A}{1 + \cos \theta}$ niet van teeken verandert.

Wanneer het moment van de hoeveelheid van beweging ten opzichte van de verticaal van 't steunpunt gelijk is aan dat ten opzichte van de lichaams-as, maar grooter dan of gelijk aan het valmoment des lichaams, dan zijn alle bewegingen gestoorde van de eenparige wenteling om de verticaal naar boven gerichte as. Deze schommelt om de verticaal als middenstand, de slingerwijdte groeit aan met de energie, doch de as kan nimmer door de naar beneden gerichte verticaal gaan. Te gelijkertijd draait het slingervlak om de verticaal van het vaste punt altijd in denzelfden zin als waarin de ongestoorde eenparige wenteling plaats greep.

Is het moment van de hoeveelheid van beweging ten opzichte van de verticaal van 't vaste punt gelijk aan dat ten opzichte van de lichaams-as, maar kleiner dan het valmoment des lichaams, en is $\cos^2 \frac{1}{2} \alpha$ *de verhouding dier momenten, dan kan het lichaam twee conische bewegingen hebben, eene bij de helling* α, *die stabiel is, en eene tweede bij de helling* 0, *de eenparige wenteling om de verticaal naar boven gerichte as, welke instabiel is. Alle andere bewegingen zijn gestoorde van de stabiele conische beweging. Zoolang de energie van de beweging kleiner blijft dan die, waarmede de eenparige wenteling plaats grijpt, zal de lichaams-as bij hare schommelingen den verticalen stand niet bereiken; is zij er aan gelijk, dan zal de as dien stand asymptotisch naderen; is zij grooter, dan zullen de schommelingen om den verticalen stand als middenstand plaats grijpen. Te gelijkertijd wentelt het schommelvlak om de verticaal van 't vaste punt altijd in den zin, waarin de azimuthale verandering der oorspronkelijke conische beweging plaats had.*

17. Ten einde dit beeld te voltooien, zal nu eene berekening van de bewegings-elementen θ, ψ en φ volgen.

1. $\lambda = \mu = \gamma \cos^2 \frac{1}{2} \alpha$ of $A = \sqrt{2a} \cos^2 \frac{1}{2} \alpha$.

1[a]. *De conische beweging.*

De azimuthale verandering ψ' is hier

$$\psi' = \frac{A}{2\,cos^2\,\frac{1}{2}\,\alpha} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\,a} = \tfrac{1}{2}\,\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta}}\,,$$

zoodat de tijd τ, waarin de kegelmantel geheel wordt beschreven door de lichaams-as, gegeven wordt door

$$\tau = \frac{2\,\pi}{\psi'} = 2\,\pi\sqrt{\frac{\Delta}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

waaruit de merkwaardige eigenschap volgt:

Bij alle conische bewegingen beschrijft de lichaams-as den kegelmantel in een tijdsverloop gelijk aan den slingertijd van het lichaam, als dit onder de werking van zijn gewicht oneindig kleine schommelingen maakt om het vaste punt als as.

1^b. *De oneindig weinig gestoorde conische beweging.*

Uit de eerste van de vergelijkingen (16), die wij nu op de volgende wijze schrijven:

$$\theta'^2 = H - a\cos\theta - A^2\,tg^2\,\tfrac{1}{2}\,\theta$$

volgt:

$$-\tfrac{1}{2}\left(\frac{d\,\theta'^2}{d\theta^2}\right)_\alpha = \left(\frac{A\,sin\,\frac{1}{2}\,\alpha}{cos^2\,\frac{1}{2}\,\alpha}\right)^2 = 2\,a\,sin^2\,\tfrac{1}{2}\,\alpha = \left(2\,sin\,\tfrac{1}{2}\,\alpha\sqrt{\frac{g}{\Delta}}\right)^2,$$

zoodat volgens (14) de schommeltijd van de lichaams-as is

$$T = \frac{\pi}{2\,sin\,\frac{1}{2}\,\alpha}\sqrt{\frac{\Delta}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

en daar

$$\psi' = \frac{A}{2\,cos^2\,\frac{1}{2}\,\alpha} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\,a}$$

is, zal de overeenkomstige verandering van het azimuth zijn

$$\Psi = \frac{\pi}{2\,sin\,\frac{1}{2}\,\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Hoe geringer dus de helling der oorspronkelijke conische beweging is, des te grooter zijn T en Ψ.

1[c]. *De eindig gestoorde conische beweging.*

A. *De energie van de beweging kleiner dan die der eenparige wenteling om de verticaal naar boven gerichte as.*

De lijn van energie snijdt de kromme der hellings-energie in twee punten, wier abscissen $\theta_1 < \alpha$ en $\theta_2 > \alpha$ zijn.

De eerste der vergelijkingen (16) wordt nu

$$\theta'^2 (1 + \cos\theta) = - a \cos^2\theta + (H + A^2 - a)\cos\theta + H - A^2,$$

en kan bijgevolg nu ook op de volgende wijze geschreven worden:

$$\theta'^2 (1 + \cos\theta) = a\,(\cos\theta_1 - \cos\theta)(\cos\theta - \cos\theta_2).$$

Eene onderlinge vergelijking van de coëfficienten geeft

$$\frac{H - A^2}{a} = - \cos\theta_1 \cos\theta_2.$$

$$\frac{H + A^2}{a} = 1 + \cos\theta_1 + \cos\theta_2,$$

zoodat

$$\frac{A^2}{2a} = \tfrac{1}{4}(1 + \cos\theta_1)(1 + \cos\theta_2) = \cos^4 \tfrac{1}{2}\alpha$$

is.

Hieruit volgt:

$$\pm \sqrt{a}\, d t = \sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{(\cos\theta_1 - \cos\theta)(\cos\theta - \cos\theta_2)}}\, d\theta =$$

$$= \frac{- d \cos\theta}{\sqrt{(1 - \cos\theta)(\cos\theta_1 - \cos\theta)(\cos\theta_2 - \cos\theta)}} \quad . \; . \; (23)$$

Uit de tweede van (16) volgt

$$\sqrt{a}\, d\psi = \frac{A}{1 + \cos\theta} \sqrt{a}\, d t,$$

bijgevolg is

$$\pm d\psi = \sqrt{\frac{(1+\cos\theta_1)(1+\cos\theta_2)}{2}} \times$$

$$\times \frac{-d\cos\theta}{(1+\cos\theta)\sqrt{(1-\cos\theta)(\cos\theta_1-\cos\theta)(\cos\theta_2-\cos\theta)}} . (24)$$

Eindelijk geeft de derde van (16):

$$\psi' = n - \frac{A\cos\theta}{1+\cos\theta} = n - A + \frac{A}{1+\cos\theta},$$

dus

$$d\varphi = (n - A)\,dt + d\psi \; . \quad \dots\dots \; (25)$$

Stellen wij nu

$$1 - \cos\theta = \frac{1-\cos\theta_1}{dn^2 u}, \quad k^2 = \frac{\cos\theta_1 - \cos\theta_2}{1-\cos\theta_2},$$

waar u de elliptische integraal van de eerste soort is met k tot modulus, dan is

$$\frac{-d\cos\theta}{\sqrt{(1-\cos\theta)(\cos\theta_1-\cos\theta)(\cos\theta-\cos\theta_2)}} = \frac{2\,du}{\sqrt{1-\cos\theta_2}};$$

Verder is

$$\frac{1}{1+\cos\theta} = \frac{1}{1+\cos\theta_1}\left(1 + \frac{1-\cos\theta_1}{1+\cos\theta_1}\,\frac{k^2 sn^2 u}{1 - \frac{2}{1+\cos\theta_1}k^2 sn^2 u}\right),$$

door dus

$$\frac{2}{1+\cos\theta_1} = sn^2(i\varepsilon + K)$$

te stellen, gaat deze uitdrukking over in

$$\frac{1}{1+\cos\theta} = \frac{1}{1+\cos\theta_1}\left(1 + \frac{i\,cn(i\varepsilon+K)}{sn(i\varepsilon+K)\,dn(i\varepsilon+K)}\,\frac{d\,i\Pi(u, i\varepsilon+K)}{du}\right).$$

Omdat

$$\frac{i\,cn\,(i\,\varepsilon + K)}{sn\,(i\,\varepsilon + K)\,.\,dn\,(i\,\varepsilon + K)} = \sqrt{\frac{(1 + cos\,\theta_1)\,(1 - cos\,\theta_2)}{2\,(1 + cos\,\theta_2)}}$$

is, gaan nu de vergelijkingen (23), (24), (25) over in

$$\pm\,dt = \frac{2\,du}{\sqrt{a\,(1 - cos\,\theta_2)}},$$

$$\pm\,d\psi = \frac{sn\,(i\,\varepsilon + K)\,.\,dn\,(i\,\varepsilon + K)}{i\,cn\,(i\,\varepsilon + K)}\,du + d\,i\,\Pi\,(u, i\,\varepsilon + K),$$

$$\pm\,d\varphi = -\frac{dn(i\varepsilon + K)(1 + cn^2(i\varepsilon + K))}{sn\,(i\,\varepsilon + K)\,.\,i\,cn\,(i\,\varepsilon + K)}\,du + d\,i\,\Pi(u, i\varepsilon + K) + n\,dt.$$

Worden deze geïntegreerd tusschen de grenzen θ_1 en θ_2, zoodat u van 0 tot K verandert, en noemen wij T den schommeltijd van de as, Ψ de overeenkomstige verandering van het azimuth, welke verandering hetzelfde teeken heeft als λ, Φ de overeenkomstige verandering van φ, dan vinden wij, als $i\,\Pi\,(K, i\,\varepsilon + K)$ door hare bekende waarde wordt vervangen:

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{K}{sin\,\frac{1}{2}\,\theta_2}\sqrt{\frac{\Delta}{g}}, \\ \Psi &= K\left\{Z(\varepsilon, k') + \frac{\pi\,\varepsilon}{2KK'} + \frac{dn\,(i\,\varepsilon + K)}{sn(i\varepsilon + K).icn(i\varepsilon + K)}\right\} \\ \Phi &= K\left\{Z(\varepsilon, k') + \frac{\pi\,\varepsilon}{2KK'} - \frac{dn\,(i\,\varepsilon + K)}{sn(i\varepsilon + K).icn(i\varepsilon + K)}\right\} + nT \end{aligned}\right\} . \quad (26)$$

Worden ze echter geïntegreerd tusschen de grenzen θ_1 en θ, zoodat u verandert van 0 tot u, dan zal de uitkomst met behulp van (26) op de volgende wijze kunnen geschreven worden:

$$\left.\begin{aligned} t &= T \,.\, \frac{u}{K} \\ \psi &= \Psi \,.\, \frac{u}{K} + \tfrac{1}{2}\, i\, l\, \frac{\Theta(u - i\varepsilon - K)}{\Theta(u + i\varepsilon + K)} \\ \varphi &= \Phi \,.\, \frac{u}{K} + \tfrac{1}{2}\, i\, l\, \frac{\Theta(u - i\varepsilon - K)}{\Theta(u + i\varepsilon + K)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (27)$$

Hieruit blijkt, dat het slingervlak van de lichaams-as schommelingen uitvoert, met de periode T, ten opzichte van een verticaal vlak, dat eenparig wentelt met de snelheid $\frac{\Psi}{T}$ om de verticaal van het vaste punt.

Voor de oneindig weinig gestoorde beweging is $k = 0$, zoodat voor $k = 0$ de vergelijkingen (26) over moeten gaan in (21) en (22). Dit blijkt op de volgende wijze:

Voor $k = 0$ is $K = \frac{\pi}{2}$, $K' =$ logarithmisch oneindig groot

$$K \,.\, Z(\varepsilon, k') = \tfrac{1}{2}\,\pi\, sin(\varepsilon, 1) = \tfrac{1}{2}\,\pi\, \frac{i\, c\, n\,(i\varepsilon + K)}{s\, n\,(i\varepsilon + K)} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\pi\, sin\, \tfrac{1}{2}\,\alpha \, ; \quad \frac{d\, n\,(i\varepsilon + K)}{s\, n\,(i\varepsilon + K)\,.\, i\, c\, n\,(i\varepsilon + K)} =$$

$$= \sqrt{\frac{(1 + cos\,\theta_1)(1 + cos\,\theta_2)}{2\,(1 - cos\,\theta_2)}} = \frac{1 + cos\,\alpha}{2\, sin\, \tfrac{1}{2}\,\alpha} = \frac{cos^2\, \tfrac{1}{2}\,\alpha}{sin\, \tfrac{1}{2}\,\alpha} \,.$$

Derhalve is

$$T = \frac{\pi}{2\, sin\, \tfrac{1}{2}\,\alpha} \sqrt{\frac{\Delta}{g}}$$

in overeenstemming met (21), en

$$\Psi = \frac{\pi}{2\, sin\, \tfrac{1}{2}\,\alpha}$$

gelijkluidend met (22).

Dat $Z(\varepsilon, k')$ voor $k=0$ of $k'=1$ gelijk is aan $sn(\varepsilon, 1)$ blijkt op de volgende wijze:

$$Z(\varepsilon, k') = \frac{2\pi}{K'}\left\{\frac{\sin\frac{\pi\varepsilon}{K'}}{e^{\pi\frac{K}{K'}} - e^{-\pi\frac{K}{K'}}} + \frac{\sin 2\frac{\pi\varepsilon}{K'}}{e^{2\pi\frac{K}{K'}} - e^{-2\pi\frac{K}{K'}}} + \ldots\right\}$$

welke met eene kleine wijziging ook aldus geschreven kan worden:

$$Z(\varepsilon, k') = \frac{2}{K}\cdot\frac{\pi K}{K'}\left\{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{K}\cdot\frac{\pi K}{K'}}{e^{\pi\frac{K}{K'}} - e^{-\pi\frac{K}{K'}}} + \ldots\right\}.$$

Bedenken wij nu, dat K' voor $k=0$ logarithmisch oneindig groot is, dat dus $\frac{n}{K'}$ voor $n=\infty$ en $k=0$ ook oneindig groot is, kunnen wij nu schrijven:

$$Z(\varepsilon, 1) = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\frac{2\varepsilon}{\pi}\cdot x}{e^x - e^{-x}}\, dx\,.$$

De waarde van deze integraal is (D. Bierens de Haan, *tables d'intégrales définies*, *Table* 281)

$$Z(\varepsilon, 1) = \frac{4}{\pi}\left(-\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\pi\,\frac{e^{\frac{\varepsilon}{\pi}}}{e^{\frac{\varepsilon}{\pi}} + e^{-\frac{\varepsilon}{\pi}}}\right)$$

$$= \frac{e^{\frac{\varepsilon}{\pi}} - e^{-\frac{\varepsilon}{\pi}}}{e^{\frac{\varepsilon}{\pi}} + e^{-\frac{\varepsilon}{\pi}}} = sn(\varepsilon, 1).$$

Hoe meer de energie van de beweging nadert tot die van

de eenparig wentelende beweging om de naar boven gekeerde lichaams-as, des te grooter wordt k, zoodat ook volgens (26) T en Ψ onbepaald aangroeien met de slingerwijdte.

Denkt men zich om het vaste punt als middelpunt een bol geslagen met de eenheid tot straal, en noemen wij het snijpunt van de lichaams-as met den bol de *pool* van 't lichaam, dan zal die pool op den bol eene regelmatig gegolfde kromme beschrijven, die beurtelings de horizontale cirkels met de bolstralen Θ_1 en Θ_2 aanraakt.

Bij de conische beweging vallen die cirkels samen met den cirkel, welks bolstraal α is; hoe meer de energie toeneemt, hoe kleiner Θ_1 en hoe grooter Θ_2 wordt, terwijl het verschil Ψ in azimuth tusschen de opvolgende raakpunten steeds grooter wordt (fig. 3).

B. *De energie is gelijk aan die der eenparige wenteling om de verticaal naar boven gerichte lichaams-as.*

In dit geval zal de lichaams as den verticalen stand *asymptotisch* naderen. Dit blijkt ook uit (26). Daar $\Theta_1 = 0$ dus $k = 1$ is, zullen zoowel T als Ψ oneindig groot wezen.

De pool van het lichaam zal op den bol eene spiraalbaan met oneindig veel windingen beschrijven om het hoogste punt van den bol (fig. 4).

C. *De energie is grooter dan die der eenparige wenteling om de verticaal naar boven gekeerde lichaams-as*

Nu zal de lichaams-as om de verticaal als middenstand schommelingen volbrengen.

De lijn van energie snijdt nu de kromme der hellingsenergie slechts in één punt, welks abscis wij Θ_2 zullen noemen.

De eerste van de vergelijkingen (16) is nu nog

$$\Theta'^2 (1 + \cos \Theta) = -a \cos^2 \Theta + (H + A^2 - a) \cos \Theta + H - A^2,$$

het tweede lid moet dus een factor $\cos \Theta - \cos \Theta_2$ bevatten, maar ook een factor $\nu^2 - \cos \Theta$, waar $\nu^2 > 1$ is, omdat het tweede lid voor $\cos \Theta = 1$ gelijk $2(H - a)$ dus positief is, en voor $\cos \Theta = \infty$ negatief.

Bovenstaande vergelijking kan dus op de volgende wijze geschreven worden:

$$\theta'^2 (1 + \cos\theta) = a(\nu^2 - \cos\theta)(\cos\theta - \cos\theta_2).$$

Eene onderlinge vergelijking van de coefficienten geeft

$$\frac{H + A^2}{a} = 1 + \nu^2 + \cos\theta_2 ,$$

$$\frac{H - A^2}{a} = -\nu^2 \cos\theta_2 ,$$

bijgevolg is

$$\frac{A^2}{2a} = \tfrac{1}{4} (\nu^2 + 1)(1 + \cos\theta_2).$$

De vergelijkingen (16) kunnen nu op de volgende wijze geschreven worden:

$$\left.\begin{aligned}
\pm \sqrt{a}\, dt &= \frac{-d\cos\theta}{\sqrt{(1-\cos\theta)(\cos\theta-\cos\theta_2)(\nu^2-\cos\theta)}} \\
\pm d\psi &= \sqrt{\frac{(\nu^2+1)(1+\cos\theta_2)}{2}} \times \\
&\times \frac{-d\cos\theta}{(1+\cos\theta)\sqrt{(1-\cos\theta)(\cos\theta-\cos\theta_2)(\nu^2-\cos\theta)}} \\
d\varphi &= (n - A)\, dt + d\psi.
\end{aligned}\right\} . (28)$$

Stelt men hierin

$$1 - \cos\theta = (1 - \cos\theta_2)\, sn^2 u ,$$

$$k^2 = \frac{1 - \cos\theta_2}{\nu^2 - \cos\theta_2},$$

dan wordt

$$\frac{-d\cos\theta}{\sqrt{(1-\cos\theta)(\cos\theta-\cos\theta_2)(\nu^2-\cos\theta)}} = \frac{2\,du}{\sqrt{\nu^2 - \cos\theta_2}},$$

$$\frac{1}{1+\cos\theta} = \frac{1}{1+\cos\theta_2}\left(1 - \frac{1-\cos\theta_2}{1+\cos\theta_2}\,\frac{sn^2 u}{1 + \frac{1-\cos\theta_2}{1+\cos\theta_2}\, sn^2 u}\right).$$

Door in de laatste uitdrukking

$$\frac{1 - \cos \theta_2}{1 + \cos \theta_2} = - k^2 \, sn^2 \, i \, \varepsilon$$

te stellen, gaat zij over in

$$\frac{1}{1 + \cos \theta} = \frac{1}{1 + \cos \theta_2} \left(1 + \frac{sn \, i \, \varepsilon}{i \cos i \varepsilon \, . \, dn \, i \varepsilon} \, \frac{d \, i \, \Pi \, (u, i \varepsilon)}{d \, u}\right).$$

Worden nu (28) geintegreerd, in acht nemende dat

$$\sqrt{\frac{(\nu^2 - \cos \theta_2)(1 + \cos \theta_2)}{2 \, (\nu^2 + 1)}} = \frac{sn \, i \, \varepsilon}{i \, cn \, i \, \varepsilon \, . \, dn \, i \, \varepsilon}$$

is, tusschen de grenzen 0 en θ_2, zoodat u verandert van 0 tot K, dan vinden wij

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{k K}{\sin \frac{1}{2} \theta_2} \sqrt{\frac{\Delta}{g}} \\ \Psi &= K \left\{ Z(\varepsilon, k') + \frac{\pi \, \varepsilon}{2 K K'} + \frac{i \, dn \, i \, \varepsilon}{sn \, i \varepsilon \, . \, cn \, i \varepsilon} \right\} \\ \Phi &= K \left\{ Z(\varepsilon, k') + \frac{\pi \, \varepsilon}{2 K K'} + \frac{i \, dn \, i \, \varepsilon}{sn \, i \varepsilon . cn \, i \varepsilon} - \frac{2 \, i \, cn \, i \varepsilon}{sn \, i \varepsilon . dn \, i \varepsilon} \right\} + n T \end{aligned}\right\} \quad .(29)$$

Worden ze echter geintegreerd tusschen de grenzen 0 en θ, overeenkomende met 0 en u, dan kunnen wij de uitkomst met behulp van (29) op de volgende wijze uitdrukken:

$$\left.\begin{aligned} t &= T \frac{u}{K} \\ \psi &= \Psi \frac{u}{K} + \tfrac{1}{2} \, i \, l \frac{\Theta \, (u - i \, \varepsilon)}{\Theta \, (u + i \, \varepsilon)} \\ \varphi &= \Phi \frac{u}{K} + \tfrac{1}{2} \, i \, l \frac{\Theta \, (u - i \, \varepsilon)}{\Theta \, (u + i \, \varepsilon)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \; (30)$$

Omtrent deze uitkomsten kan dezelfde opmerking gemaakt worden als omtrent die, begrepen in (27), terwijl ook hier ψ en φ het teeken van A moeten hebben.

Geeft de stoot eene vermeerdering van energie, die zeer klein is met betrekking tot die van de eenparige wenteling, dan ligt ν^2 bij 1, dus k^2 bij 1, zoodat T en Ψ beiden zeer groot zijn. Hoe meer de energie die van de eenparige wenteling overtreft, des te kleiner wordt k^2, die voor zeer groote waarde van de energie dicht bij 0 komt. Bijgevolg nemen T en Ψ af met het toenemen der slingerwijdte; T nadert onbepaald tot 0, Ψ tot $\frac{1}{2}\pi \, . \, sn(\varepsilon, 1)$, of omdat $-sn^2(i\varepsilon, 0) = tg^2(\varepsilon, 1) = \infty$ is, tot $\frac{1}{2}\pi$.

De pool van het lichaam zal bij elke schommeling van de as eene kromme beschrijven, die door het hoogste punt van den bol gaat en in de eindpunten raakt aan den horizontalen cirkel met den bolstraal θ_2 (fig. 5).

2. $\lambda = \mu \geqq \gamma$ of $A \geqq \sqrt{2a}$.

In dit geval is elke beweging de gestoorde van de nu *stabiele* eenparige wenteling om de verticaal naar boven gerichte lichaams-as.

Omdat de lijn van energie nu de kromme der hellings-energie slechts in één punt snijdt, evenals in 't vorige geval, en de eerste van de vergelijkingen (16) hier evenzoo geschreven wordt als daar, zullen wij dezelfde formules voor ψ en φ vinden als in 't vorige geval; (29 en (30) gelden ook hier.

Evenwel zullen de gevolgtrekkingen gedeeltelijk anders luiden. Bij kleine vermeerdering van de energie moet hier de slingerwijdte altijd zeer klein zijn, terwijl dan ν^2 alleen dicht bij de eenheid ligt, als λ dicht bij γ is; ν^2 groeit met λ aan. De slingertijd T, die in het vorige geval voor H dicht bij a zeer groot is, is het hier alleen als λ dicht bij γ ligt, en is kleiner naarmate λ het valmoment meer overtreft.

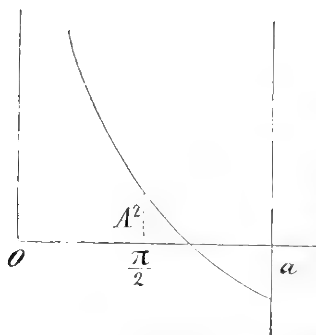
18. *Tweede geval*: $\lambda + \mu = 0$.

De vergelijking (18) van de kromme der hellings-energie kan nu op de volgende wijze geschreven worden:

$$y = a \cos \theta + A^2 \cot^2 \tfrac{1}{2} \theta.$$

Nu is

$$\frac{d\,y}{d\,\theta} = -\frac{\cos\frac{1}{2}\,\theta}{\sin^3\frac{1}{2}\,\theta}\,(A^2 + 2\,a\,\sin^4\tfrac{1}{2}\,\theta),$$



zoodat de kromme eene minimum-ordinaat $-a$ heeft voor $\theta = \pi$, en daar $\frac{d\,y}{d\,\theta}$ negatief is voor alle waarden van θ tusschen 0 en π, zal de kromme dalende wezen voor toenemende abscissen, en de ordinaten-as tot asymptoot hebben.

Het lichaam kan dus slechts éene conische beweging hebben, nl. de eenparige wenteling om de verticaal naar beneden gerichte as. Alle overige bewegingen zijn gestoorde van deze, waarbij de lichaams-as om de verticaal als middenstand schommelingen zal maken, terwijl de wenteling van het schommelvlak steeds in den zin van de oorspronkelijke wenteling zal plaats grijpen.

De slingerwijdte neemt toe met de energie, doch de lichaams-as zal nimmer de naar boven gerichte verticaal bereiken.

Ter berekening van de bewegings-elementen beschouwen wij eerst

19. *De oneindig weinig gestoorde conische beweging.*

De eerste van (16) wordt hier

$$\theta'^2 = H - a\cos\theta - A^2\cot^2\tfrac{1}{2}\,\theta,$$

zoodat

$$-\tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2\,\theta'^2}{d\,\theta^2}\right)_\pi = \frac{A^2 + 2\,a}{4}$$

is. Volgens (14) en (15) vinden wij dus voor den slingertijd T en de overeenkomstige verandering Ψ van het azimuth:

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\sqrt{A^2 + 2a}} \\ \Psi &= \frac{\pi}{\sqrt{1 + \frac{2a}{A^2}}} \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (31)$$

Voor $A = \lambda = 0$ is $T = \pi\sqrt{\frac{\Delta}{g}}$ en $\Psi = 0$, zoodat wij dan de slingerende beweging van het lichaam onder de werking van zijn gewicht terug vinden, de slingerwijdte oneindig klein zijnde. Hoe grooter λ is, des te kleiner wordt T en des te grooter Ψ. Voor lim. $\lambda = \infty$ is lim. $T = 0$ en lim. $\Psi = \pi$.

20. *De eindig gestoorde conische beweging.*

De lijn van energie snijdt nu de kromme der hellings-energie in één punt, welks abscis wij door θ_1 zullen voorstellen.

De eerste van (16) wordt nu

$$\theta'^2 (1 - \cos\theta) = a \cos^2\theta - (H + A^2 + a)\cos\theta + H - A^2.$$

Het tweede lid moet dus een factor $\cos\theta_1 - \cos\theta$ hebben, en omdat dat lid negatief is voor $\cos\theta = 1$, doch positief voor $\cos\theta = \infty$, zal het ook een factor $\nu^2 - \cos\theta$ hebben, waar $\nu^2 > 1$ is.

Bovenstaande vergelijking kunnen wij dus ook op de volgende wijze schrijven:

$$\theta'^2 (1 - \cos\theta) = a(\nu^2 - \cos\theta)(\cos\theta_1 - \cos\theta).$$

De coëfficienten van deze vergelijkingen onderling vergeleken geeft

$$\frac{H + A^2}{a} = \nu^2 + \cos\theta_1 - 1,$$

$$\frac{H - A^2}{a} = \nu^2 \cos\theta_1,$$

zoodat

$$\frac{2A^2}{a} = (\nu^2 - 1)(1 - \cos\theta_1)$$

is.

De vergelijkingen (16) kunnen nu als volgt geschreven worden:

$$\left.\begin{aligned}
&\pm\sqrt{a}\,dt = \frac{-d\cos\theta}{\sqrt{(1+\cos\theta)(\cos\theta_1-\cos\theta)(\nu^2-\cos\theta)}}\\
&\pm d\psi = \sqrt{\frac{(\nu^2-1)(1-\cos\theta_1)}{2}}\times\\
&\times\frac{-d\cos\theta}{(1-\cos\theta)\sqrt{(1+\cos\theta)(\cos\theta_1-\cos\theta)(\nu^2-\cos\theta)}}\\
&d\varphi = (n+A)\,dt - d\psi.
\end{aligned}\right\}. \quad (32)$$

Stellen wij hierin

$$\nu^2 - \cos\theta = \frac{\nu^2-\cos\theta_1}{dn^2 u},$$

$$k^2 = \frac{1+\cos\theta_1}{1+\nu^2},$$

dan wordt

$$\frac{-d\cos\theta}{\sqrt{(1+\cos\theta)(\cos\theta_1-\cos\theta)(\nu^2-\cos\theta)}} = \frac{2\,du}{\sqrt{1+\nu^2}},$$

$$\frac{1}{1-\cos\theta} = \frac{1}{1-\cos\theta_1}\left(1 - \frac{\nu^2-\cos\theta_1}{1-\cos\theta_1}\,\frac{k^2 sn^2 u}{1+\dfrac{\nu^2-1}{1-\cos\theta_1}k^2 sn^2 u}\right).$$

Stellen we eindelijk in de laatste uitdrukking

$$\frac{\nu^2-1}{1-\cos\theta_1} = -sn^2(i\varepsilon),$$

dan gaat ze over in

$$\frac{1}{1-\cos\theta} = \frac{1}{1-\cos\theta_1}\left(1 + \frac{i\,cn\,i\varepsilon}{sn\,i\varepsilon\,.\,dn\,i\varepsilon}\,\frac{d\,i\,\Pi(u,i\varepsilon)}{du}\right).$$

Worden nu (32) geintegreerd tusschen de grenzen θ_1 en π, overeenkomende met o en K voor u, dan vinden wij, als wij voor $i\Pi(K, i\varepsilon)$ hare bekende waarde substitueeren, en de betrekking

$$\frac{icni\varepsilon}{sni\varepsilon . dni\varepsilon} = \sqrt{\frac{(\nu^2+1)(1-\cos\theta_1)}{2(\nu^2-1)}}$$

in acht nemen:

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{2K}{\sqrt{a(1+\nu^2)}} = \frac{k}{\cos\frac{1}{2}\theta_1} K \sqrt{\frac{\Delta}{g}} \\ \Psi &= K\left(Z(\varepsilon, k') + \frac{\pi\varepsilon}{2KK'}\right) \\ \Phi &= nT - K\left(Z(\varepsilon, k') + \frac{\pi\varepsilon}{2KK'} - \frac{2k'^2 sni\varepsilon}{icni\varepsilon . dni\varepsilon}\right) \end{aligned}\right\} \ldots (33)$$

waar Ψ en Φ hetzelfde teeken als n hebben.

Worden echter (32) geintegreerd tusschen de grenzen θ_1 en θ, dan vinden wij met behulp van (33):

$$\left.\begin{aligned} t &= T\frac{u}{K} \\ \psi &= \Psi\frac{u}{K} + \tfrac{1}{2} i l \frac{\Theta(u-i\varepsilon)}{\Theta(u+i\varepsilon)} \\ \varphi &= \Phi\frac{u}{K} - \tfrac{1}{2} i l \frac{\Theta(u-i\varepsilon)}{\Theta(u+i\varepsilon)} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (34)$$

Deelt de stoot slechts eene betrekkelijk geringe hoeveelheid energie aan het lichaam mede, terwijl dit de eenparige wenteling bezit, dan ligt k dicht bij 0. Voor $k = 0$ moeten dus (33) overgaan in (31), wat op de volgende wijze blijkt:

$$T = \frac{2K}{\sqrt{a(1+\nu^2)}} = \frac{\pi}{\sqrt{a\left(2+\frac{A^2}{a}\right)}} = \frac{\pi}{\sqrt{A^2+2a}};$$

$$\Psi = \tfrac{1}{2}\pi\, sn\,(\varepsilon, 1) = \tfrac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{tg^2\,(\varepsilon, 1)}{1 + tg^2\,(\varepsilon, 1)}} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{-\,sn^2\,i\,\varepsilon}{cn^2\,i\,\varepsilon}} = \tfrac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{\nu^2 - 1}{\nu^2 + 1}} = \frac{\tfrac{1}{2}\pi}{\sqrt{1 + \frac{2a}{A^2}}},$$

welke waarden met 2 moeten vermenigvuldigd worden, om T en Ψ voor eene volle slingering te vinden. Alsdan stemmen zij overeen met (31).

Hoe grooter de vermeerdering van de energie is, die de stoot veroorzaakt, des te grooter zal k^2 worden. Met het grooter worden van de slingerwijdte der schommelingen van de lichaams-as groeit ook de slingertijd onbepaald aan, terwijl voor $k^2 = 1$ lim. $\Psi = \varepsilon = \frac{1}{2}\pi$ is.

21. *Derde geval*: $\lambda^2 \gtrless \mu^2$.

De vergelijking (18) van de kromme der hellings-energie is

$$y = a \cos\theta + \left(\frac{A - B\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2.$$

De kromme heeft dus de ordinaten-as en de lijn $\theta = \pi$ tot asymptoten. Verder volgt uit

$$\frac{dy}{d\theta} = -\,a\sin\theta + 2\,\frac{A - B\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{B - A\cos\theta}{\sin^2\theta},$$

welke vergelijking wij liever op de volgende wijze schrijven;

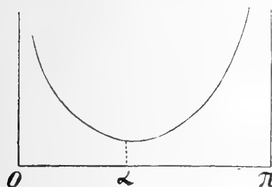
$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{-\,a}{\sin^3\theta}\left(\cos^4\theta - (2 + pq)\cos^2\theta + (p^2 + q^2)\cos\theta + (1 - pq)\right)$$

waar kortheidshalve $\frac{A}{\sqrt{\frac{1}{2}a}} = p$ en $\frac{B}{\sqrt{\frac{1}{2}a}} = q$ gesteld zijn,

dat $\frac{dy}{d\theta}$ gelijk nul wordt voor $\theta = \alpha < \frac{\pi}{2}$ als $pq > 1$ is,

voor $\theta = \frac{\pi}{2}$ als $pq = 1$ is, voor $\theta = \alpha > \frac{\pi}{2}$ als $pq < 1$

is, terwijl de toepassing van het theorema van STURM op deze vergelijking leert, dat $\frac{dy}{d\theta}$ slechts *eenmaal* nul wordt tusschen 0 en π.



De kromme der hellings-energie heeft dus slechts éene minimum-ordinaat.

Het lichaam kan dus slechts éene conische beweging hebben. Alle andere bewegingen zijn gestoorde van deze. De slingerwijdte wordt grooter met de energie, doch de lichaams-as zal nimmer door den verticalen stand gaan. De slingerings-energie verkrijgt de grootste waarde, als de as door de helling van de oorspronkelijke conische beweging gaat.

Daar

$$\psi' = \frac{A - B\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

is, zal voor $A^2 > B^2$ of $\lambda^2 > \mu^2$ de azimuthale verandering gedurende de beweging steeds het teeken van A hebben, dus steeds plaats grijpen in den zin, waarin ze geschiedt bij de oorspronkelijke conische beweging.

Is echter $\lambda^2 < \mu^2$, dan kan ψ' nul worden en van teeken veranderen.

Stellen wij in dit geval

$$\lambda = \mu \cos\beta,$$

dan blijkt vooreerst, dat $\frac{dy}{d\theta}$ voor $\theta = \beta$ negatief is, zoodat $\alpha > \beta$ zal wezen.

Noemen wij nu de abscissen der snijpunten van de lijn van energie met de kromme der hellings-energie $\theta_1 < \alpha$ en $\theta_2 > \alpha$, zoodat θ_1 de kleinste, θ_2 de grootste helling is die de lichaams-as verkrijgt, dan zal ψ'

voor $\theta_1 > \beta$ niet van teeken veranderen;

» $\theta_1 = \beta$ te gelijk met θ' nul worden;

» $\theta_1 < \beta$ nul worden bij de helling β, en gedurende

al den tijd, dien de as noodig heeft om hare helling van β tot θ_1 te verminderen en van θ_1 tot β te vermeerderen, in tegengestelden zin plaats grijpen.

Daar verder

$$\frac{\theta'}{\psi'} = \sin\theta \sqrt{\frac{H - a\cos\theta}{(A - B\cos\theta)^2}\sin^2\theta - 1}$$

voor $\theta = \beta$ oneindig groot is, zal dus de pool van het lichaam eene regelmatige kromme beschrijven, altijd in denzelfden zin, als $\theta_1 > \beta$ is, en beurteling de horizontale cirkels met de spherische stralen θ_1 en θ_2 aanraken (fig. 3). Is $\theta_1 = \beta$, dan zal de pool bogen beschrijven, die in de eindpunten loodrecht staan op den cirkel met den spherischen straal β, terwijl zij in hunne middens geraakt worden door den cirkel met den spherischen straal θ_2 (fig. 6).

Is eindelijk $\theta_1 < \beta$, dan zal de baan van de pool den cirkel met den spherischen straal β loodrecht snijden, en bij elke schommeling van de as eene *lus* vormen, wier midden door den cirkel met den spherischen straal θ_1 wordt geraakt, terwijl de takken geraakt worden door den cirkel met den spherischen straal θ_2.

Het is duidelijk, dat de beweging, waarbij $\theta_1 = \beta$ is, ook tot stand kan gebracht worden door op het lichaam bij de helling θ_1 een koppel van impulsie te laten werken, die het de aswenteling n geeft. Bij de helling $\theta_1 = \beta$ toch heeft het lichaam alleen eene wenteling om de as. Als wij deze beweging van het lichaam aanduiden door het woord *impulsie-beweging*, dan komen de bovengenoemde gevallen $\theta_1 > \beta$, $\theta_1 = \beta$, $\theta_1 < \beta$ respectievelijk overeen met de gevallen, dat de energie van de beweging $\substack{<\\=\\>}$ de energie van de impulsie-beweging is.

22. Ter berekening van de bewegings-elementen merken wij op, dat de eerste vergelijking van (16) op de volgende wijze kan geschreven worden:

$$\theta'^2\sin^2\theta = a\cos^3\theta - (H + B^2)\cos^2\theta + (2AB - a)\cos\theta + H - A^2.$$

Wij weten reeds, dat het tweede lid $\cos\theta_1 - \cos\theta$ en $\cos\theta - \cos\theta_2$ tot factoren moet hebben; daarenboven bezit het nog een factor $\nu^2 - \cos\theta$, waar $\nu^2 > 1$ is, omdat het negatief is voor $\cos\theta = 1$ en positief voor $\cos\theta = \infty$. De vergelijking kan dus vervangen worden door

$$\theta'^2 \sin^2\theta = a(\cos\theta_1 - \cos\theta)(\cos\theta - \cos\theta_2)(\nu^2 - \cos\theta).$$

Eene onderlinge vergelijking van de coefficienten geeft:

$$\frac{H + B^2}{a} = \nu^2 + \cos\theta_1 + \cos\theta_2,$$

$$\frac{H - A^2}{a} = -\nu^2 \cos\theta_1 . \cos\theta_2,$$

$$\frac{2AB - a}{a} = \cos\theta_1 . \cos\theta_2 + \nu^2(\cos\theta_1 + \cos\theta_2).$$

Hieruit volgt:

$$\frac{(A + B)^2}{a} = (\nu^2 + 1)(1 + \cos\theta_1)(1 + \cos\theta_2),$$

$$\frac{(A - B)^2}{a} = (\nu^2 - 1)(1 - \cos\theta_1)(1 - \cos\theta_2).$$

De vergelijkingen (16) kunnen nu op de volgende wijze geschreven worden:

$$\left.\begin{aligned} \pm\sqrt{a}\,dt &= \frac{-d\cos\theta}{\sqrt{(\cos\theta_1 - \cos\theta)(\cos\theta - \theta_2)(\nu^2 - \cos\theta)}} \\ \psi' &= \frac{A+B}{2}\frac{1}{1+\cos\theta} + \frac{A-B}{2}\frac{1}{1-\cos\theta} \\ \varphi' &= \frac{A+B}{2}\frac{1}{1+\cos\theta} - \frac{A-B}{2}\frac{1}{1-\cos\theta} + n - B \end{aligned}\right\}\ldots(35)$$

Wordt hierin

$$\nu^2 - \cos\theta = \frac{\nu^2 - \cos\theta_1}{d\,n^2\,u},\quad k^2 = \frac{\cos\theta_1 - \cos\theta_2}{\nu^2 - \cos\theta_2}$$

gesteld, dan wordt

$$\frac{-\,d\cos\theta}{\sqrt{(\cos\theta_1 - \cos\theta)(\cos\theta - \cos\theta_2)(\nu^2 - \cos\theta)}} = \frac{2\,d\,u}{\sqrt{\nu^2 - \cos\theta_2}}.$$

Verder is

$$\frac{1}{1+\cos\theta} = \frac{1}{1+\cos\theta_1}\left(1 + \frac{\nu^2 - \cos\theta_1}{1+\cos\theta_1}\,\frac{k^2\,s\,n^2\,u}{1 - \dfrac{\nu^2+1}{1+\cos\theta_1}\,k^2\,sn^2\,u}\right),$$

$$\frac{1}{1-\cos\theta} = \frac{1}{1-\cos\theta_1}\left(1 - \frac{\nu^2 - \cos\theta_1}{1-\cos\theta_1}\,\frac{k^2\,s\,n^2\,u}{1 + \dfrac{\nu^2-1}{1-\cos\theta_1}\,k^2\,sn^2\,u}\right).$$

Stellen wij dus

$$\frac{\nu^2+1}{1+\cos\theta_1} = s\,n^2\,(i\,\varepsilon + K) \text{ en } \frac{\nu^2-1}{1-\cos\theta_1} = -\,s\,n^2\,i\,\eta$$

dan gaan deze uitdrukkingen over in

$$\frac{1}{1+\cos\theta} = \frac{1}{1+\cos\theta_1}\left(1 + \frac{i\,c\,n\,(i\,\varepsilon+K)}{sn(i\varepsilon+K)\,.\,dn(i\varepsilon+K)}\,\frac{d\,i\,\Pi(u,i\varepsilon+K)}{d\,u}\right),$$

$$\frac{1}{1-\cos\theta} = \frac{1}{1-\cos\theta_1}\left(1 + \frac{i\,c\,n\,i\,\eta}{s\,n\,i\,\eta\,.\,d\,n\,i\,\eta}\,\frac{d\,i\,\Pi\,(u,\,i\,\eta)}{d\,u}\right).$$

De vergelijkingen (35) kunnen nu op de volgende wijze geschreven worden

$$
\left.
\begin{aligned}
& \pm\, dt = \frac{2\,du}{\sqrt{a(\nu^2 - \cos\theta_2)}}, \\
& d\psi = \frac{A+B}{\sqrt{a(\nu^2 - \cos\theta_2)(1+\cos\theta_1)^2}} \times \\
& \times\left(du + \frac{i\,cn(i\varepsilon + K)}{sn(i\varepsilon + K)\,.\,dn(i\varepsilon + K)}\, d\,i\,\Pi(u, i\varepsilon + K)\right) \\
& + \frac{A-B}{\sqrt{a(\nu^2 - \cos\theta_2)(1-\cos\theta_1)^2}}\left(du + \frac{i\,cn\,i\eta}{sn\,i\eta\,.\,dn\,i\eta}\, d\,i\,\Pi(u, i\eta)\right) \\
& d\varphi = (n - B)\,dt + \frac{A+B}{\sqrt{a(\nu^2 - \cos\theta_2)(1+\cos\theta_1)^2}} \times \\
& \times\left(du + \frac{i\cos(i\varepsilon + K)}{sn(i\varepsilon + K)\,.\,dn(i\varepsilon + K)}\, d\,i\,\Pi(u, i\varepsilon + K)\right) \\
& - \frac{A-B}{\sqrt{a(\nu^2 - \cos\theta_2)(1-\cos\theta_1)^2}}\left(du + \frac{i\,cn\,i\eta}{sn\,i\eta\,.\,dn\,i\eta}\, d\,i\,\Pi(u, i\eta)\right)
\end{aligned}
\right\} (36)
$$

Omdat voor $\lambda^2 > \mu^2$ $A + B$ en $A - B$ hetzelfde teeken hebben, en voor $\lambda^2 < \mu^2$ daarentegen tegengesteld teeken, moeten wij bij de integratie van (36) op deze twee gevallen letten.

23. *De oneindig weinig gestoorde conische beweging.*

Uit

$$\theta'^2 \sin^2\theta = a(\nu^2 - \cos\theta)(\cos\theta_1 - \cos\theta)(\cos\theta - \cos\theta_2),$$

volgt

$$-\tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2\theta'^2}{d\theta^2}\right)_\alpha = a(\nu^2 - \cos\alpha),$$

zoodat volgens (14) de schommeltijd T van de lichaams-as gegeven wordt door

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{a(\nu^2 - \cos\alpha)}} \quad \ldots\ldots\ldots (37)$$

Verder volgt uit

$$\psi' = \frac{A+B}{2}\,\frac{1}{1+\cos\theta} + \frac{A-B}{2}\,\frac{1}{1+\cos\theta}$$

met inachtneming van de uitdrukkingen van $A+B$ en $A-B$:

$$\psi'_{\alpha} = \tfrac{1}{2}\sqrt{a}\,\{\sqrt{\nu^2+1} \pm \sqrt{\nu^2-1}\}$$

waar het bovenste teeken moet genomen worden voor $\lambda^2 > \mu^2$, het onderste voor $\lambda^2 < \mu^2$. Bijgevolg is volgens (15):

$$\Psi = \tfrac{1}{2}\pi\,\frac{\sqrt{\nu^2+1} \pm \sqrt{\nu^2-1}}{\sqrt{\nu^2-\cos\alpha}} \quad \ldots\ldots \quad (38)$$

24. *De eindig gestoorde beweging.*

Eerste geval: $\lambda^2 > \mu^2$.

De uitdrukkingen $A+B$ en $A-B$ hebben nu beiden het teeken van A of λ.

Derhalve is

$$\frac{A+B}{\sqrt{a(\nu^2-\cos\theta_2)(1+\cos\theta_1)^2}} = \pm\sqrt{\frac{(\nu^2+1)(1+\cos\theta_2)}{(\nu^2-\cos\theta_2)(1+\cos\theta_1)}} =$$

$$= \pm\,\frac{sn\,(i\varepsilon+K)\,.\,dn\,(i\varepsilon+K)}{i\,cn\,(i\varepsilon+K)},$$

$$\frac{A-B}{\sqrt{a(\nu^2-\cos\theta_2)(1-\cos\theta_1)^2}} = \pm\sqrt{\frac{(\nu^2-1)(1-\cos\theta_2)}{(\nu^2-\cos\theta_2)(1-\cos\theta_1)}} =$$

$$= \pm\,\frac{sn\,i\eta\,.\,dn\,i\eta}{i\,cn\,i\eta},$$

waar het bovenste teeken geldt voor $A > 0$, het onderste voor $A < 0$.

Hieruit volgt:

$$B = \pm\sqrt{a\,\frac{\nu^2-\cos\theta_2}{4}}\left((1+\cos\theta_1)\,\frac{sn\,(i\varepsilon+K)\,dn\,(i\varepsilon+K)}{i\,cn\,(i\varepsilon+K)} - \right.$$

$$\left. - (1-\cos\theta_1)\,\frac{sn\,i\eta\,.\,dn\,i\eta}{i\,cn\,i\eta}\right).$$

De vergelijkingen (36) zullen hiermede tot integralen opleveren, als wij t beginnen te tellen bij $\theta = \theta_1$:

$$t = \frac{2u}{\sqrt{a(\nu^2 - \cos\theta_2)}},$$

$$\pm\psi = \left(\frac{sn(i\varepsilon + K) \, . \, dn(i\varepsilon + K)}{i\, cn(i\varepsilon + K)} + \frac{sni\eta \, . \, dni\eta}{i\, cn\, i\eta}\right) u +$$
$$+ i\Pi(u, i\varepsilon + K) + i\Pi(u, i\eta)$$

$$\pm d\varphi = -\cos\theta_1 \left(\frac{sn(i\varepsilon + K) \, . \, dn(i\varepsilon + K)}{i\, cn(i\varepsilon + K)} + \frac{sni\eta \, . \, dni\eta}{t\, cn\, i\eta}\right) u +$$
$$\pm nt + i\Pi(u, i\varepsilon + K) - i\Pi(u, i\eta)$$

waar het bovenste teeken geldt voor $\lambda > 0$, het onderste voor $\lambda < 0$.

Voor $u = K$ vinden wij voor den slingertijd T van de as en de overeenkomstige waarden Ψ en Φ van ψ en φ:

$$\left.\begin{aligned}
t &= \frac{2K}{\sqrt{a(\nu^2 - \cos\theta_2)}} \\
\pm\Psi &= K\left\{Z(\varepsilon,k') + Z(\eta,k') + \pi\frac{\varepsilon + \eta}{2KK'} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{dn(i\varepsilon + K)}{sn(i\varepsilon + K) \, . \, i\, cn(i\varepsilon + K)}\right\} . \\
\pm\Phi &= \pm(n - B)\,T + K\left\{Z(\varepsilon,k') - Z(\eta,k') + \pi\frac{\varepsilon - \eta}{2KK'} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{dn(i\varepsilon + K)}{sn(i\varepsilon + K) \, . \, i\, cn(i\varepsilon + K)}\right\}
\end{aligned}\right\} . 39)$$

zoodat wij nu de vergelijkingen van de bewegings-elementen met behulp van (39) op de volgende wijze kunnen schrijven:

$$\left.\begin{aligned}
t &= T\frac{u}{K}, \\
\psi &= \Psi\frac{u}{K} + \tfrac{1}{2}\, i\, l\, \frac{\Theta(u - i\varepsilon - K) \, . \, \Theta(u - i\eta)}{\Theta(u + i\varepsilon + K) \, . \, \Theta(u + i\eta)}, \\
\varphi &= \Phi\frac{u}{K} + \tfrac{1}{2}\, i\, l\, \frac{\Theta(u - i\varepsilon - K) \, . \, \Theta(u + i\eta)}{\Theta(u + i\varepsilon + K) \, . \, \Theta(u - i\eta)}.
\end{aligned}\right\} . (40).$$

Deze vergelijkingen stemmen overeen met (11) en (21) van Dr. C. LOTTNER.

25. *Tweede geval*: $\lambda^2 < \mu^2$.

Nu hebben $A + B$ en $A - B$ een tegengesteld teeken; dat van de eerste uitdrukking is hetzelfde als dat van B.

Voor B moet nu genomen worden:

$$B = \pm \sqrt{a\frac{\nu^2 - \cos\theta_2}{4}}\left((1 + \cos\theta_1)\frac{sn(i\varepsilon + K)\,.\,dn(i\varepsilon + K)}{i\,cn\,(i\,\varepsilon + K)} + \right.$$

$$\left. + \ (1 - \cos\theta_1)\frac{sn\,i\,\eta\,.\,dn\,i\,\eta}{i\,cn\,i\,\varepsilon}\right)$$

De integratie van (36) geeft nu

$$\left.\begin{aligned}
&t = \frac{2\,u}{\sqrt{a\,(\nu_2 - \cos\theta_2)}}\,,\\
&\pm\,\psi = \left(\frac{sn(i\varepsilon + K).dn(i\varepsilon + K)}{i\,cn\,(i\,\varepsilon + K)} - \frac{sn\,i\eta.dn\,i\eta}{i\,cn\,i\,\eta}\right)u + \\
&+ i\,\Pi\,(u, i\,\varepsilon + K) - i\,\Pi\,(u, i\,\eta)\,,\\
&\pm\varphi = -\cos\theta_1\left(\frac{sn(i\varepsilon + K).dn(i\varepsilon + K)}{i\,cn\,(i\,\varepsilon + K)} - \frac{sn\,i\eta.dn\,i\eta}{i\,cn\,i\,\eta}\right)u + \\
&\pm\,n\,t + i\,\Pi\,(u, i\,\varepsilon + K) + i\,\Pi\,(u, i\,\eta)\,,
\end{aligned}\right\} \quad (41)$$

waar nu het bovenste teeken geldt voor $B > 0$, het onderste voor $B < 0$.

Wordt hierin $u = K$ gesteld, dan vinden wij voor den schommeltijd van de as en de overeenkomstige waarden van ψ en φ:

$$\left.\begin{aligned}
&T = \frac{2\,K}{\sqrt{a\,(\nu^2 - \cos\theta_1)}}\,,\\
&\pm\,\Psi = K\left\{Z(\varepsilon,k') - Z(\eta,k') + \pi\,\frac{\varepsilon - \eta}{2KK'} + \right.\\
&\left. + \frac{dn\,(i\,\varepsilon + K)}{sn\,(i\,\varepsilon + K)\,.\,i\,cn\,(i\,\varepsilon + K)}\right\},\\
&\pm\,\Phi = \pm(n - B)\,T + K\left\{Z(\varepsilon,k') + Z(\eta,k') + \pi\,\frac{\varepsilon + \eta}{2KK'} + \right.\\
&\left. + \frac{dn\,(i\,\varepsilon + K)}{sn\,(i\,\varepsilon + K)\,.\,i\,cn\,(i\,\varepsilon + K)}\right\},
\end{aligned}\right\} \ . \ (42)$$

zoodat nu (39) kunnen voorgesteld worden als volgt:

$$\left.\begin{aligned} t &= T\frac{u}{K}, \\ \psi &= \Psi\frac{u}{K} + \tfrac{1}{2}\,i\,l\,\frac{\Theta(u - i\varepsilon - K)\,.\,\Theta(u + i\eta)}{\Theta(u + i\varepsilon + K)\,.\,\Theta(u - i\eta)}, \\ \varphi &= \Phi\frac{u}{K} + \tfrac{1}{2}\,i\,l\,\frac{\Theta(u - i\varepsilon - K)\,.\,\Theta(u - i\eta)}{\Theta(u + i\varepsilon + K)\,.\,\Theta(u + i\eta)}. \end{aligned}\right\} \quad (43)$$

26. Een paar opmerkingen mogen hier nog volgen.
De waarden van T en Ψ

$$T = \frac{2K}{\sqrt{a\,(\nu^2 - \cos\theta_1)}}$$

$$\Psi = K\left\{Z(\varepsilon, k') \pm Z(\eta, k') + \pi\frac{\varepsilon \pm \eta}{2KK'} + \frac{dn(i\varepsilon + K)}{icn(i\varepsilon + K)\ sn(i\varepsilon + K)}\right\}$$

bij de *eindig* gestoorde beweging gevonden moeten eerstens voor $k = 0$ overgaan in (37) en (38). Dit blijkt onmiddellijk voor T; voor Ψ op de volgende wijze.

Voor $k = 0$ is

$$\frac{dn\,(i\varepsilon + K)}{i\,cn\,(i\varepsilon + K)\,.\,sn\,(i\varepsilon + K)} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sqrt{\nu^2 + 1)\,(\nu^2 - \cos\alpha)}},$$

$$Z(\varepsilon, k') = sn\,(\varepsilon, 1) = \sqrt{\frac{\nu^2 - \cos\alpha}{\nu^2 + 1}},$$

$$Z(\eta, k') = sn\,(\eta, 1) = \sqrt{\frac{\nu^2 - 1}{\nu^2 - \cos\alpha}},$$

zoodat Ψ overgaat in

$$\Psi = \tfrac{1}{2}\pi\left\{\frac{1 + \cos\alpha}{\sqrt{(\nu^2 + 1)(\nu^2 - \cos\alpha)}} + \sqrt{\frac{\nu^2 - \cos\alpha}{\nu^2 + 1}} \pm \sqrt{\frac{\nu^2 - 1}{\nu^2 - \cos\alpha}}\right\} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi\,\frac{\sqrt{\nu^2 + 1} \pm \sqrt{\nu^2 - 1}}{\sqrt{\nu^2 - \cos\alpha}},$$

overeenkomstig (38).

Ten tweede moeten de vergelijkingen (41) overgaan in de door Dr. P. VAN GEER gevondenen formules, ingeval wij onderstellen, dat $\theta_1 = \beta$ is, dus $\psi' = 0$ voor $\theta = \theta_1$.

Is $\psi' = 0$ voor $\theta = \theta_1$, dan moet

$$\frac{A + B}{2\,(1 + \cos\theta_1)} + \frac{A - B}{2\,(1 - \cos\theta_1)} = 0$$

zijn. Nu is in ons geval

$$\frac{A + B}{2\,(1 + \cos\theta_1)} = \pm \sqrt{a\,\frac{(\nu^2 + 1)\,(1 + \cos\theta_2)}{4\,(1 + \cos\theta_1)}} =$$

$$= \pm \sqrt{\frac{\nu^2 - \cos\theta_2}{4}\,a\,\frac{sn\,(i\,\varepsilon + K)\,.\,dn\,(i\,\varepsilon + K)}{i\,\cos\,(i\,\varepsilon + K)}}\,;$$

$$\frac{A - B}{2\,(1 - \cos\theta_1)} = \mp \sqrt{a\,\frac{(\nu^2 - 1)\,(1 - \cos\theta_2)}{4\,(1 - \cos\theta_1)}} =$$

$$= \mp \sqrt{\frac{\nu^2 - \cos\theta_2}{4}\,a\,\frac{sn\,i\,\eta\,.\,dn\,i\,\eta}{i\,cn\,i\,\eta}}\,.$$

waar het bovenste teeken geldt voor $B > 0$, het onderste voor $B < 0$.

Hieruit volgt

$$\frac{A + B}{2\,(1 + \cos\theta_1)} + \frac{A - B}{2\,(1 - \cos\theta_1)} =$$

$$= \pm \sqrt{a\,\frac{\nu^2 - \cos\theta_2}{4}}\left(\frac{sn(i\,\varepsilon + K)\,.\,dn\,(i\,\varepsilon + K)}{i\,cn\,(i\varepsilon + K)} - \frac{sn\,i\eta\,.\,dn\,i\eta}{i\,cn\,i\,\eta}\right)$$

zoodat nu

$$\frac{sn\,(i\,\varepsilon + K)\,.\,dn\,(i\,\varepsilon + K)}{i\,cn\,(i\,\varepsilon + K)} = \frac{sn\,i\,\eta\,.\,dn\,i\,\eta}{i\,cn\,i\,\eta}$$

is, en de tweede en de derde van (41) resp. overgaan in

$$\pm\,\psi = i\,\Pi\,(u, i\,\varepsilon + K) - i\,\Pi\,(u, i\,\eta),$$

$$\pm\,\varphi = i\,\Pi\,(u, i\,\varepsilon + K) + i\,\Pi\,(u, i\,\eta) \pm nt,$$

overeenstemmende met (57) en (58) in de verhandeling van Dr. P. van Geer.

OVER DEN INVLOED

VAN HET

LICHT OP DE KIEMING DER SPOREN VAN HEMILEIA VASTATRIX Berk. en Br.,

DOOR

W. BURCK,

Corresp. Lid van de Koninkl. Akad. v. Wet.



Bij mijn onderzoek naar de oorzaken der koffiebladziekte en de middelen ter bestrijding daarvan, is het mij gebleken, dat de sporen van Hemileia vastatrix in een droppel luchthoudend water tot kieming konden worden gebracht, en in overeenstemming met Marshall Ward meende ik derhalve gerechtigd te zijn, zuurstof en water te beschouwen als de eenige voorwaarden voor de kieming dezer sporen.

Bij vele mijner kiemproeven bleef evenwel de kieming achterwege, zonder dat het mij duidelijk werd, aan welke omstandigheden dit moest worden toegeschreven.

Een nader onderzoek heeft mij thans de oorzaak van het veelvuldig mislukken mijner proeven doen kennen; het is mij namelijk gebleken, dat de kieming der sporen afhankelijk is van de intensiteit van het licht, waaraan de kiemproeven zijn blootgesteld.

Het is niet de eerste maal dat de aandacht wordt gevestigd op den invloed, dien het licht vermag uit te oefenen op de kieming der sporen. Vooral in het laatste jaar werd die zaak herhaaldelijk ter sprake gebracht met betrekking

tot de sporen van verschillende micro-organismen en werden reeds eenige onderzoekingen daarover bekend gemaakt, waarvan de resultaten zijn bijeengebracht door Duclaux en Roux in de *Annales de l'Institut Pasteur.*

Een korte uiteenzetting van hetgeen omtrent dit onderwerp bekend is, moge aan de omschrijving van mijn eigen onderzoek voorafgaan.

Het was een reeds lang bekend feit, dat er in de lucht veel meer doode dan levende micro-organismen worden aangetroffen. Herhaaldelijk is hierop door Pasteur, Miquel en anderen de aandacht gevestigd geworden.

Downes en Blunt nu waren de eersten, die in 1877 en 1878 eenig licht hierover deden opgaan en aantoonden, dat er geen ontwikkeling van »micro-organismen" plaats vond in buizen met suikerhoudende vloeistof, die bij de tegenwoordigheid van lucht aan het zonlicht werden blootgesteld.

Dit feit is thans door andere onderzoekers, zooals Arloing, Duclaux, Strauss, Roux en anderen bevestigd geworden. Allen kwamen bij hun onderzoek tot het besluit, dat de ontwikkeling van microben bij eene min of meer sterke en langdurige blootstelling aan het zonlicht werd tegengegaan en dat deze invloed van het licht zich alleen liet gevoelen bij de tegenwoordigheid van zuurstof.

Verder liepen echter de meeningen van deze geleerden uiteen. Terwijl toch Downes en Blunt van oordeel waren, dat de kiemen gedood werden en de vloeistof niets van hare voedende kracht verloor, meende Roux, dat het zonlicht aan de zuurstof der lucht een meerdere energie, een hooger oxydeerend vermogen meêdeelde, die de voedingsvloeistof, en wel waarschijnlijk de koolwaterstofverbindingen daaruit, ongeschikt maakten om de kieming en de voeding der bacteriën te onderhouden.

Uit de proeven, door Roux genomen om dit feit in 't licht te stellen, bleek dat zuivere bouillon, die 3 à 4 uur lang aan het zonlicht was blootgesteld geweest, het vermogen niet meer had om daarin overgebachte sporen te doen kiemen. Werden dergelijke buizen met dezelfde voedings-

vloeistof, waarin sporen waren uitgezaaid, in 't zonlicht gebracht, dan ontwikkelden zich de kiemen niet meer na 2 uur. Toch waren deze geenszins gedood, want toen zij, na 7 uur aan 't licht te zijn blootgesteld geweest, uit de vloeistof genomen en overgebracht werden in dezelfde vloeistof, die niet in 't licht had gestaan, gaven zij nog schoone kulturen.

De proeven van Roux zijn zeker overtuigend.

Men mag echter niet uit het oog verliezen, dat Roux zijne proeven nam met Bacillus anthracis en dat deze waarschijnlijk veel meer wêerstand biedt aan de werking van het zonlicht dan de »micro-organismen" waarmede Downes en Blunt proeven hebben genomen.

Ook de voedingsvloeistof van laatstgenoemden (vloeistof van Pasteur en Cohn) was niet dezelfde als die, welke door Roux werd gebruikt. Dit maakt, dat de proeven moeilijk met elkander kunnen vergeleken worden.

Houden wij hierbij in 't oog, dat reeds Duclaux heeft aangetoond, dat de verschillende soorten van coccus veel minder weêrstand bieden aan de werking van het zonlicht dan de sporen van Bacillus anthracis en dat in het algemeen het weêrstandbiedend vermogen afhankelijk is van de soort, en voor dezelfde soort van de natuur der voedingsvloeistof, dan is het niet te gewaagd te vooronderstellen, dat zoowel Downes en Blunt als Roux zeer juiste conclusiën hebben getrokken uit hunne waarnemingen.

Bij de proeven van Downes en Blunt was derhalve de verandering, die de vloeistof onder de gezamenlijke werking van zonlicht en lucht onderging, onmerkbaar in zooverre hare voedende eigenschappen behouden bleven, terwijl daarentegen de »micro-organismen" zelven werden gedood.

De voedingsvloeistof, door Roux bij zijne proeven gebruikt, onderging daarentegen vrij spoedig een zeer merkbare omzetting, terwijl de sporen van Bacillus anthracis vele dagen achtereen aan het licht konden worden blootgesteld, zonder haar kiemvermogen te verliezen.

Dat ook, buiten de voedingsvloeistof om, het zonlicht eene doodelijke werking op de sporen kan uitoefenen, was boven-

dien reeds door Duclaux meêgedeeld. Na een maand in drogen staat aan 't licht te zijn blootgesteld, werden de sporen ongeschikt om zich verder te ontwikkelen.

De resultaten van mijn eigen onderzoek kunnen, naar ik meen, er toe bijdragen om eenig meerder licht te doen opgaan over deze belangrijke zaak, vooral omdat de sporen van Hemileia vastatrix reeds in gedestilleerd water tot kieming kunnen worden gebracht en er derhalve geen rekening behoeft te worden gehouden met veranderingen, die een voedingsvloeistof kan ondergaan onder de gelijktijdige inwerking van zuurstof en licht, en voorts omdat deze sporen, in vergelijking met die der bovengenoemde bacteriën, buitengewoon gevoelig zijn ten opzichte van het licht.

Wanneer de sporen van Hemileia vastatrix, uitgezaaid in een droppel gedestilleerd en luchthoudend water, worden blootgesteld aan het licht, dan gaan zij niet tot kieming over. Dit licht behoeft geen direct zonlicht te zijn; zelfs bij de zeer geringe intensiteit van het diffuse licht in het achterste gedeelte van het laboratorium, op geruimen afstand van het venster, gelukte het mij nimmer de sporen tot kieming te brengen. Worden deze echter in het duister gebracht, dan ziet men reeds na 2 à $2^1/_2$ uur de kiembuis te voorschijn treden om na weinige uren een vrij uitgestrekt mycelium te vormen. Volkomen duisternis is voor de kieming niet noodzakelijk; de kieming begint, wanneer slechts de lichtintensiteit tot een zeker minimum gedaald is.

Bij nader onderzoek blijkt, dat niet alleen de kieming der sporen door het licht tijdelijk wordt tegengehouden, zoodat zij eerst later begint, maar dat de sporen inderdaad haar kiemvermogen verliezen en zij, na de blootstelling aan het licht in een donkere kamer overgebracht, niet meer tot de ontwikkeling der kiembuis te brengen zijn

Het verlies van het kiemvermogen of de dood der sporen heeft reeds betrekkelijk spoedig plaats. Bij vele mijner proeven, waarbij de sporen geplaatst waren op een paar meter afstand van het venster, bleek, dat na $1^1/_4$ uur reeds de meeste sporen niet meer tot kieming konden

worden opgewekt, terwijl na $1^3/_4$ uur alle sporen waren gedood.

De tijd, noodig om de sporen te dooden, is afhankelijk van de intensiteit van het licht; op geringeren afstand van het venster, werden de sporen reeds binnen het uur gedood; bij een geringere intensiteit, b. v. bij een bewolkten hemel, is een langere blootstelling aan het licht een vereischte.

Bij deze proeven werd een aantal voorwerpglaasjes, waarop de sporen in een vrij liggenden droppel luchthoudend water waren uitgezaaid, in een met waterdamp verzadigde glazen kamer aan het diffuse daglicht blootgesteld.

Elk kwartier werd één der voorwerpglaasjes overgebracht naar een dergelijke vochtige kamer, die zorgvuldig van het licht was afgesloten.

Den volgenden dag bleek dan bij het onderzoek, dat de sporen, die langer dan 5—7 kwartier aan het licht waren blootgesteld geweest, niet meer tot kieming waren overgegaan.

Er moet hier nog uitdrukkelijk worden vermeld, dat deze nadeelige werking van het licht dan alleen op de sporen wordt uitgeoefend, als deze gelegenheid hebben gehad om water op te nemen. In drogen toestand zijn de sporen zelfs tegen eene langdurige inwerking van het directe zonlicht volkomen bestand.

Afgeplukte koffiebladen met sporen-afsnoerende mycelia kunnen uren achtereen aan den invloed van het sterke zonlicht worden blootgesteld, tot zij geheel zijn uitgedroogd, zonder dat de sporen hierbij haar kiemvermogen verliezen.

Het is derhalve de door opneming van water turgesceerende spore, die door het licht gedood wordt.

Reeds vroeger heb ik er op gewezen, dat vochtige lucht niet in staat is de kieming op te wekken; dat sporen uren achtereen in een met waterdamp verzadigde ruimte kunnen gehouden worden, zonder hare kiembuizen te voorschijn te brengen, en dat ook nimmer, zelfs niet in de vochtigste dagen van den regenmousson, de sporen in gekiemden staat op de afsnoerende mycelia worden aangetroffen. De sporen

moeten 2 à $2^1/_2$ uur lang bij zeer geringe intensiteit van het licht in een droppel water hebben gelegen, alvorens te kunnen kiemen. Dat voorts voor de kieming tegenwoordigheid van zuurstof noodzakelijk is, blijkt reeds uit het feit, dat ondergedompelde sporen zelden kiemen en dat dit nog zeldzamer wordt opgemerkt, wanneer het water door voorafgegane verhitting luchtvrij is gemaakt.

De voorwaarden waarop de sporen van Hemileia vastatrix kiemen, zijn derhalve: water in vloeibaren vorm, zuurstof en min of meer volkomen duisternis.

Het is een zeer opmerkelijk feit, dat het licht, hetwelk in staat is de sporen der Hemileia in korten tijd te dooden, daarop in het geheel geen merkbaren invloed meer oefent, zoodra zij tot kieming zijn overgegaan, en even min op het reeds ontwikkelde mycelium. Worden de sporen in een donkere ruimte tot kieming opgewekt en daarna overgebracht in het licht, dan blijven de kiembuizen zich ontwikkelen en voortgroeien, zonder ook maar in het allerminste blijken te geven van onder de inwerking van het licht te lijden.

Het klinkt zeker zeer vreemd, dat de spore, die tegen vele reagentiën en tegen uitdroging veel meer weêrstand biedt dan de kiembuis, zich tegenover het licht zoo geheel anders gedraagt.

Het laat zich dan ook hooren, dat, toen Arloing tot hetzelfde resultaat gekomen was bij zijn onderzoek naar den invloed van het licht op de sporen van Bacillus, men getracht heeft tot een verklaring te komen van hetgeen men een anomalie meende te zijn. Arloing had namelijk aangetoond, dat 2 uren voldoende waren om allen groei van de sporen van een Bacillus te onderdrukken, terwijl de Bacillus in vegetatieven toestand 27—30 uren aan het licht moest worden blootgesteld om hetzelfde doel te bereiken. Nocard en Strauss meenden dit feit te mogen verklaren door aan te nemen, dat de spore bij de temperatuur, waaraan de proef was blootgesteld, juist begon te kiemen en dat de zeer jeugdige Bacillus veel gevoeliger was voor de inwerking van het zonlicht dan de volwassen bacterie, zoodat de kiemende

spore kon worden gedood en de bacterie zelve niet onder den invloed van het licht behoefde te lijden.

Om dit te bewijzen, bracht Strauss de sporen in gedestilleerd water, waarin geen kieming mogelijk was, en zag hij ook werkelijk dat zij, uren achtereen aan het licht blootgesteld, niet werden gedood.

Hiertegenover echter bewees Arloing, dat de sporen wel degelijk gedood werden, wanneer de proeven door ijs werden afgekoeld, ver beneden de temperatuur, die kieming toelaat.

Eindelijk toonde Roux door een proef aan, dat de verandering, die de voedingsvloeistof ondergaat door haar bloot te stellen aan het zonlicht, wel voldoende is om de ontkieming der sporen tegen te gaan, maar nochthans in staat de reeds gevormde bacillen te voeden.

Hoe dit ook zij, zeker is het, dat bij Hemileia vastatrix, waar de kieming in gedestilleerd water kan worden opgewekt, het licht geen invloed uitoefent op de kiemende spore of op de daaruit ontwikkelde kiembuis.

Aannemend, dat de dood der sporen veroorzaakt wordt door de zuurstof der lucht, die onder den invloed van het licht een hooger oxydeerend vermogen verkrijgt, meen ik, dat de verklaring van het laatstgenoemde feit gezocht moet worden in de omstandigheid, dat de oliehoudende reservestoffen van de spore zich gemakkelijker laten oxydeeren dan de verbindingen, die ten tijde der kieming uit dit reservevoedsel ontstaan zijn; een veronderstelling, die niet te gewaagd is, nu Duclaux heeft aangetoond, hoe gemakkelijk zich deze plantaardige vetten met zuurstof verbinden *).

Het licht zou derhalve juist dezelfde werking uitoefenen op de sporen van Hemileia vastatrix, als een temperatuursverhooging tot 70°, volgens Roux, uitoefent op de sporen van Bacillus anthracis. Ook hier zou het de zuurstof zijn der lucht, die bij deze temperatuur zich met de vetlichamen der spore verbindt en den dood der sporen veroorzaakt †).

---

*) Duclaux. Sur la migration des matières grasses. *Ann. de l'Inst. Pasteur.* Aug. 1887.

†) Roux. De l'action de la chaleur et de l'air sur les spores de la bactéridie du charbon. *Annal. de l'Inst. Pasteur.* Août. 1887.

Het scheen mij toe, dat het niet van belang ontbloot was, tevens door een proef uit te maken of deze nadeelige werking van het zonlicht moest worden toegeschreven aan het licht, dan wel aan sommige stralen van eene bepaalde golflengte.

Ook deze vraag was gemakkelijk op te lossen met zulk een snel kiemend en uiterst gevoelig materiaal voor proefnemingen.

Aan Arloing, die den invloed der 7 verschillende kleuren op de sporen der bacillen bestudeerde, gelukte het niet, tot een bepaalde conclusie te geraken.

Het is mij bij Hemileia gebleken, dat de nadeelige werking van het zonlicht op de kieming der sporen uitsluitend moet worden toegeschreven aan de blauwe helft van 't spectrum.

Als de lichtstralen genoodzaakt worden hun weg door een koperoxydammoniak-oplossing te nemen, alvorens tot de sporen te geraken, dan is kieming niet mogelijk; de sporen worden gedood. Als evenwel het licht een geconcentreerde oplossing van bichromas kalicus is doorgegaan, zoodat het een groot deel zijner actinische stralen verloren heeft, alvorens op de sporen te kunnen inwerken, gaan zij kiemen alsof zij in volkomen duisternis waren gebracht.

Bij de bichromas kalicus-oplossing dient men echter in het oog te houden, dat deze niet alle actinische stralen absorbeert, vooral niet indien de intensiteit van het daglicht vrij groot is, en meermalen ziet men dan ook, als men geen voldoende voorzorgsmaatregelen genomen heeft, dat de sporen niet tot ontwikkeling komen.

Naarmate de intensiteit van het licht sterker is, moet de dikte der vloeistofmassa grooter genomen worden. Het eenvoudigst laat zich dit regelen door een proef met photographisch papier. Dit gebruikend, zag ik, dat telken male als de sporen in de roode kamer niet tot kieming overgingen, er dan nog actinisch licht werd doorgelaten van genoegzame intensiteit om het papier te kleuren.

Het chloorzilver-albumine-papier leent zich hiertoe beter dan het broomzilver-gelatine-papier. Dit laatste is te ge-

voelig en moeilijk is het de hoeveelheid vloeistof zoo te regelen, dat dit papier in 't geheel niet meer gekleurd wordt.

Als nu de intensiteit van de blauwe helft van het doorgelaten licht in die mate verzwakt is, dat het chloorzilver-albumine-papier in de roode kamer niet meer wordt aangedaan, dan ook kiemen de sporen in dit roode licht even goed als in het donker.

Een nader bewijs voor de stelling, dat de nadeelige werking, die het zonlicht uitoefent op de sporen van Hemileia vastatrix, uitsluitend moet worden toegeschreven aan de blauwe helft van het spectrum, is gelegen in het feit, dat de sporen. ook in het sterkste petroleum-licht, even goed en even snel kiemen als in volslagen duisternis. De actinische stralen van het petroleum-licht hebben een te geringe intensiteit om een nadeeligen invloed op de sporen te kunnen uitoefenen.

Buitenzorg, Juni 1888.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 27 October 1888.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voorzitter, HUBRECHT, BEHRENS, GRINWIS, MULDER, HOEK, MARTIN, VAN DORP, RIJKE, KORTEWEG, MAC GILLAVRY, FRANCHIMONT, DE VRIES, HOFFMANN, ZAAIJER, ZEEMAN, BIERENS DE HAAN, FORSTER, RAUWENHOFF, SCHOLS, SCHOUTE, KAPTEYN, STOKVIS, LORENTZ, A. C. OUDEMANS JR., BUYS BALLOT, VAN DIESEN, MICHAËLIS, DIBBITS, PEKELHARING, ENGELMANN, J. A. C. OUDEMANS, PLACE, HOOGEWERFF en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1⁰. G. F. WESTERMAN, Directeur van het koninklijk zoölogisch Genootschap: Natura Artis Magistra te Amsterdam, 1 October 1888; 2⁰. G. J. W. BREMER, Secretaris van het Bataafsch Genootschap der proefondervindelijke Wijsbegeerte te Rotterdam, 7 October 1888; 3⁰. H. HEINEN, Bibliothecaris van het provinciaal Genootschap van Kunsten en Wetenschappen te 's Hertogenbosch, 4 October 1888; 4⁰. F. KRAUSS, Bibliothecaris van het Verein für vater-

ländische Naturkunde te Stuttgart, 19 Mei 1888; 5^{0}. den Bibliothecaris der Academia Romana te Bucharest, 5 October 1888; 6^{0}. Bonola, Secretaris der Société Khédiviale de Géographie te Caïro, 18 October 1888; 7^{0}. E. Burgess, Secretaris der Boston Society of natural History te Boston, 14 Februari 1888; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1^{0}. G. C. W. Bohnensieg, Conservator van Teyler's Stichting te Haarlem, October 1888; 2^{0}. Förstemann, Archivaris der kön. sächsische Gesellschaft der Wissenschaften te Leipzig, 20 April 1888; 3^{0}. den Secretaris der Gesellschaft für bildende Kunst und Alterthümer te Emden, 15 Augustus 1888; 4^{0}. E. Burgess, Secretaris der Boston Society of natural History te Boston, 27 Februari 1888; 5^{0}. den Bibliothecaris van den State Board of Agriculture of Michigan, April 1888; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— De Heeren Bierens de Haan en van den Berg zijn nog niet gereed met hun rapport over de verhandeling van den Heer Dr. Jan de Vries. Eene nieuwe verhandeling van denzelfden auteur: »Over eene groep van regelmatige configuraties", inmiddels ter plaatsing in de werken der Akademie bij den Secretaris ingekomen, wordt door den Voorzitter om advies in handen gesteld derzelfde Commissie.

— De Heer Behrens spreekt over eene geologische excursie, door hem in den Eifel gedaan, om aldaar gesteenten te verzamelen, tot hiertoe niet onderzocht.

Bij deze gelegenheid hebben ook de vulkanische meren, de Eifeler »Maare", zijne aandacht getrokken. Deze zijn, zijns inziens, niet door instorting van uitgedoofde vulkanen ontstaan. Ware dit zoo, dan zou men de koppen der afgeknapte lagen moeten kunnen zien, en meren met oevers van bazaltlava moeten vinden, beantwoordend aan de talrijke bazaltische vulkanen van den Eifel.

De spreker deelt vervolgens de uitkomsten mede van proeven, door hem genomen met het uitblazen van kuilen in verschillende losse materialen, door openingen, op verschillende diepten daarin aangebracht. Het is hem bij deze proeven gebleken:

1⁰. dat in fijne en lichte materialen, b. v. fijn poeder van puimsteen en tras, steeds trechtervormige, naar onder nagenoeg cilindrische kolken ontstaan, besloten in vrij hooge en steile kegelvormige opstortingen;

2⁰. dat bijmenging van grover en zwaarder materiaal de wijdte der kuilen doet toenemen, terwijl de diepte afneemt en de bodem vlak wordt;

3⁰. dat de bijmenging van zulk zwaar materiaal tot ondermijning in de diepte en daarop volgende instorting aanleiding kan geven;

4⁰. dat de bijmenging van betrekkelijk groote brokken en scherven aanleiding geeft tot *opheffing*, en tot eene *schifting*, die ten gevolge heeft, dat het lichtste materiaal — puimsteen — aan de oppervlakte komt en dat hoofdzakelijk dit lichtste materiaal weggeslingerd wordt. De kuil wordt hierbij zeer wijd en ondiep, de rand steil, zijne ophooging onbeduidend.

De Heer Behrens meende op grond van een en ander te mogen aannemen, dat de Eifeler meren als niet voltooide vulkanen moeten opgevat worden, en dat zij gevormd zijn geworden door het murw worden en het lang voortgezette uitblazen van het sedimentaire gesteente, waarbij dan slechts weinig lava aan de oppervlakte gebracht werd.

Ten slotte werden modellen vertoond, verkregen door het inpersen van gipsmortel in kegelvormige hoopen van zand en puin. Deze modellen moesten bewijzen, dat centrale uitholingen in vulkanische kegels en centrale opvullingen met eruptieve gesteenten, die von Hochstetter tot uitsmelting meende te moeten terugbrengen, op meer eenvoudige wijze, nl. door zijdelingsche uitspreiding en omkorsting van lavakolommen kunnen verklaard worden. Al naar de mate van vloeibaarheid der ingeperste specie en de geaardheid van den zand- of puinhoop, konden peervormige, cilindri-

sche en veelvuldig vertakte kernen, met of zonder krater-openingen, verkregen worden.

— Voor de Verslagen en Mededeelingen worden aangeboden, door den Heer Grinwis een opstel, getiteld: »De energie van den bolvormigen condensator", en door den Heer Schols, uit naam van den Heer van den Berg, diens: »Eenige formulen voor de berekening van de Bernoulliaansche en van de tangenten-coëfficiënten".

— Voor de Boekerij der Akademie worden aangeboden:

1. door den Heer Martin, diens »Aanteekeningen bij eene geognostische overzichtskaart van Suriname";

2. door den Heer Bierens de Haan, uit naam van het wiskundig Genootschap: »Een onvermoeide arbeid komt alles te boven": »Register naar eene wetenschappelijke verdeeling op de werken van het wiskundig Genootschap: Een onvermoeide arbeid komt alles te boven".

3. door den Heer de Vries, uit naam van den Heer Dr. Ritzema Bos te Wageningen, diens: *a.* L'anguillule de la tige et les maladies des plantes dues à ce Nématode; *b.* Landbouwdierkunde; *c.* De dierlijke parasieten van den mensch en de huisdieren; en nog enkele kleinere brochuren over zoölogische onderwerpen.

— Eene verhandeling van den Heer J. Cardinaal, leeraar aan 's Rijks H. B. S. te Tilburg: »Meetkundige theorie der scheeve oppervlakken der vierde orde" wordt in handen gesteld der Heeren Schoute en Bierens de Haan, om daarover, zoo mogelijk, rapport uit te brengen in de volgende Vergadering.

— Daar er verder niets te verhandelen is, wordt de Vergadering gesloten.

DE ENERGIE

VAN DEN

BOLVORMIGEN CONDENSATOR.

DOOR

C. H. C. GRINWIS.

1. De potentieele electrische energie van een stelsel geleiders heeft tot waarde

$$W = \tfrac{1}{2} \Sigma M V \,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

waarbij het somteeken geldt voor de producten der electrische massa's M met de overeenkomstige potentiaalwaarden V voor iederen geleider.

Laat men de bewegelijke geleiders, wier ladingen onveranderlijk worden ondersteld, aan zichzelve over, zoo geven zij aan de electrische werkingen, die tusschen hen bestaan, gevolg; de arbeid dier krachten is positief en de energie van het stelsel vermindert.

Is A de arbeid der electrische krachten, zoo zal, ingevolge het beginsel van behoud van arbeidsvermogen,

$$d\,W + d\,A = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Uit (1) volgt,

$$d\,W = \tfrac{1}{2} \Sigma M d\,V + \tfrac{1}{2} \Sigma V d\,M ,$$

doch daar de ladingen constant blijven, vervalt de laatste term en wordt

$$d\,W = \tfrac{1}{2}\,\Sigma\,M\,d\,V \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (3)$$

Daar dan eene positieve waarde van $d\,A$, volgens (2) eene negatieve waarde van $d\,W$ met zich brengt, de energie dus afneemt, wordt volgens (3) ook $d\,V$ negatief; de verplaatsing der geleiders vermindert hunne potentiaalwaarden.

2. Zijn voor twee geleiders de electrische ladingen M_1 en M_2, de totale potentialen over die geleiders V_1 en V_2, zoo bestaan tusschen deze *vier* grootheden de betrekkingen,

$$V_1 = p_1\,M_1 + p^1\,M_2 \qquad V_2 = p^1\,M_1 + p_2\,M_2 \quad . \quad . \quad (4)$$

waarin p_1 p^1 en p_2 de potentiaalcoëfficiënten van het stelsel aanduiden; zooals bekend, zijn het positieve grootheden van de afmeting L^{-1}, terwijl $p^1 < p_1$ en $< p_2$ is.

Uit (4) volgen voor M_1 en M_2 twee andere betrekkingen van den vorm

$$M_1 = q_1\,V_1 + q^1\,V_2 \qquad M_2 = q^1\,V_1 + q_2\,V_2 . \quad . \quad . \quad (5$$

De factoren q_1 en q_2 worden de coëfficiënten van capaciteit, q^1 de inductiecoëfficiënt der beide geleiders op elkander genoemd.

Substitueeren wij de waarden van M_1 en M_2 uit (5) in (4), zoo volgen twee identische vergelijkingen in V_1 en V_2, waaruit voor de 6 coëfficiënten p en q de volgende drie onafhankelijke betrekkingen ontstaan:

$$p_1\,q_1 + p^1\,q^1 = 1 \quad p^1\,q^1 + p_2\,q_2 = 1 \quad p_1\,q^1 + p^1\,q_2 = 0 . . (6)$$

zoodat de 3 coëfficiënten q uit de 3 coëfficiënten p kunnen worden afgeleid en omgekeerd.

Voor een bolvormigen condensator met concentrische geleidende schil als buitenoppervlak, volgt (zie onze bijdrage »Over den invloed van geleiders op de verdeeling der electrische energie". Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen, 3de Reeks, Deel II, blz. 31—32), als a de straal van den bol, b en b^1 de stralen van de daarom geplaatste schil aanduiden:

$$\left.\begin{array}{l} p_1 = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{b^1}, \quad p^1 = \frac{1}{b^1}, \quad p_2 = \frac{1}{b^1} \\ \text{dus, in gevolge vergel. (6),} \\ q_1 = \frac{a\,b}{b-a}, \quad q^1 = -\frac{a\,b}{b-a}, \quad q_2 = b^1 + \frac{a\,b}{b-a} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (7)$$

3. Bij dezen condensator onderscheiden wij, als de massa M_1 constant is, twee gevallen:

1e Wanneer de tweede geleider (de schil) geïsoleerd en neutraal is, dus $M_2 = 0$, zal

$$V'_1 = p_1 M_1 = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{b^1}\right) M_1;$$

stond de kern alleen, zonder schil, zoo ware bij dezelfde lading M_1

$$\overline{V} = \frac{M_1}{a},$$

derhalve

$$V_1' = \left(1 - \frac{a}{b} + \frac{a}{b'}\right) \overline{V} = f\,\overline{V},$$

waarin $f < 1$. De schil vermindert dus de potentiaalwaarde der kern.

2e. Als de schil is afgeleid (met den grond verbonden), volgt

$$V_2 = p' M_1 + p_2 M_2 = 0;$$

dus

$$M_2 = -\frac{p'}{p_2} M_1$$

en de potentiaal der kern wordt in dit geval

$$V_1'' = p_1 M_1 + p' M_2 = \left(\frac{p_1 p_2 - p'^2}{p_2}\right) M_1 = \frac{b-a}{a\,b} M_1$$

of

$$V_1'' = \left(1 - \frac{a}{b}\right) \frac{M_1}{a} = \left(1 - \frac{a}{b}\right) \overline{V} = g\, V$$

waarin

$$g < f < 1\,,$$

zoodat

$$V_1'' < V_1' < V;$$

de potentiaal der kern wordt bij constante lading door de tegenwoordigheid der neutrale schil verminderd en die vermindering neemt toe, wanneer de schil daarna met den grond verbonden wordt.

4. Voor de potentiaal vonden wij, bij het aanbrengen en daarna afleiden van de schil, steeds kleinere waarden; hetzelfde geldt voor de electrische energie van het stelsel.

Daar dit stelsel uit *twee* geleiders bestaat, volgt uit (1) en (4)

$$W = \tfrac{1}{2} (M_1 V_1 + M_2 V_2) = \tfrac{1}{2} (p_1 M_1^2 + 2\, p^1 M_1 M_2 + p_2 M_2^2)$$

dus voor den condensator, ingevolge de in (7) gegeven waarden,

$$W = \tfrac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right) M_1^2 + \frac{2}{b'} M_1 M_2 + \frac{1}{b'} M_2^2 \right\}.$$

Is de schil niet aanwezig, zoo is

$$\overline{W} = \frac{M_1^2}{2\,a}.$$

Is de schil neutraal en geïsoleerd, dan $M_2 = 0$ en

$$W'_1 = \tfrac{1}{2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right) M_1^2 = \left(1 - \frac{a}{b} + \frac{a}{b'}\right) \overline{W} = f\, \overline{W}, \text{ waar}$$

$$f < 1.$$

Is de schil afgeleid, dan geeft (4) voor $V_2 = 0$

$$M_2 = -\frac{p^1}{p_2} M_1,$$

dus, daar wegens (7) $p^1 = p_2$,

$$M_2 = - M_1;$$

de energie van den condensator wordt dan

$$W_1'' = \tfrac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) M_1^2 \right\} = \left(1 - \frac{a}{b} \right) \overline{W} = g \, \overline{W}$$

De energie van den condensator wordt derhalve door de tegenwoordigheid der neutrale schil verminderd; die vermindering neemt toe, wanneer de schil daarna wordt afgeleid.

Dezelfde regel geldt dus voor de energie als voor de potentiaal der kern en wel zijn beide grootheden steeds evenredig aan elkander.

5 Nemen wij thans aan, dat de potentiaal V_1 der kern *constant* gehouden wordt en onderzoeken wij de verandering der lading M_1 voor de beide gevallen 1e dat de schil geïsoleerd en zonder lading is, 2e dat de schil met den grond is verbonden.

Wij hebben dan:

1e. Als de schil *neutraal* (zonder lading) en *geïsoleerd* is,

$$M_2 = q^1 \, V_1 + q_2 \, V_2 = 0 \qquad V_2 = - \frac{q^1}{q_2} \, V_1$$

$$M_1 = q_1 \, V_1 + q^1 \, V_2 = \left(\frac{q_1 \, q_2 - q^{12}}{q_2} \right) V_1$$

dus wegens (7),

$$M_1 = \frac{a \, b \, b'}{b \, b' - a \, b' + a \, b} \, V_1.$$

Zonder schil is bij dezelfde waarde V_1 de massa $\overline{M}$ bepaald door

$$V_1 = \frac{\overline{M_1}}{a},$$

dus wordt

$$M_1 = \frac{b \, b'}{b \, b' - a b' + a b} \, \overline{M_1} = \frac{\overline{M_1}}{f},$$

waarin weder

$$f = 1 - \frac{a}{b} + \frac{a}{b'}$$

dus

$$M_1 > \overline{M}_1;$$

de massa op de kern is door toevoeging der neutrale schil toegenomen en wel met een bedrag

$$\Delta_1 \overline{M}_1 = \frac{a\,(b' - b)}{b\,b' - a\,(b' - b)}\,\overline{M}_1$$

$$= \frac{a}{b\left(\frac{b'}{b' - b}\right) - a}\,\overline{M}_1$$

2[e]. Als de schil is *afgeleid* (met den grond verbonden) dan

$$V_2 = 0 \qquad M_1 = q_1\,V_1 = \frac{a\,b}{b - a}\,V_1 = \frac{b}{b - a}\,\overline{M}_1$$

$$M_1 = \frac{1}{1 - \frac{a}{b}}\,\overline{M}_1 = \frac{\overline{M}_1}{g},$$

waarin weder

$$g = 1 - \frac{a}{b};$$

dus

$$g < f < 1,$$

zoodat de massa weder is toegenomen en die toename bedraagt meer dan toen de geïsoleerde schil werd aangebracht.

Immers die toename is voor de afgeleide schil

$$\Delta_2 \overline{M}_1 = \frac{a}{b - a}\,\overline{M}_1$$

en blijkbaar is

$$\Delta_2 \overline{M}_1 > \Delta_1 \overline{M}_1.$$

6. Onderzoeken wij thans bij constante potentiaal de waarde der energie van het stelsel, uitgedrukt door

$$W_2 = \tfrac{1}{2}(q_1 V_1^2 + 2 q^1 V_1 V_2 + q_2 V_2^2).$$

Is alleen de kern aanwezig, zoo is

$$\overline{W} = \tfrac{1}{2} p_1 M_1^2,$$

daar nu

$$\overline{M_1} = \overline{V_1} a$$

en terwijl in dit geval

$$p_1 = \frac{1}{a},$$

zal

$$\overline{W} = \tfrac{1}{2} a V_1^2.$$

Onderscheiden wij verder ieder der beide gevallen, dat de schil geïsoleerd, zonder lading en met den grond verbonden is.

1e. *Schil geïsoleerd en zonder lading.*

$$M_1 = q_1 V_1 + q^1 V_2, \quad M_2 = q^1 V_1 + q_2 V_2$$

$$M_2 = 0 \quad \text{dus} \quad V_2 = -\frac{q^1}{q_2} V_1$$

en de energie wordt

$$W'_2 = \tfrac{1}{2}\left(q_1 V_1^2 - \frac{2 q'^2}{q_2} V_1^2 + \frac{q'^2}{q_2} V_1^2\right)$$

$$= \tfrac{1}{2} V_1^2 \left(\frac{q_1 q_2 - q'^2}{q_2}\right) = \tfrac{1}{2} V_1^2 \left(\frac{a b b'}{a b + b b' - a b'}\right)$$

$$= \frac{b b'}{a b + b b' - a b'} \overline{W'} = \frac{1}{1 - \frac{a}{b} + \frac{a}{b'}} \overline{W},$$

zoodat

$$W'_2 = \frac{1}{f} \overline{W}$$

derhalve daar

$$f < 1, \quad W'_2 > \overline{W},$$

terwijl voor de vermeerdering van W volgt

$$\Delta_1 \overline{W} = \frac{a(b'-b)}{ab + bb' - ab'} \overline{W} = \frac{a}{b\frac{b'}{b'-b} - a} \overline{W}.$$

2e. *Schil met den grond verbonden.*
In dit geval is

$$V_2 = 0,$$

derhalve

$$W''_2 = \tfrac{1}{2} q_1 V_1^2 = \frac{ab}{2(b-a)} V_1^2 = \frac{b}{b-a} W,$$

zoodat

$$W''_2 = \frac{1}{g} \overline{W}$$

dus

$$W''_2 > \overline{W}$$

en voor de vermeerdering der energie volgt in dit geval

$$\Delta_2 \overline{W} = \frac{a}{b-a} \overline{W},$$

zoodat

$$\Delta_2 \overline{W} > \Delta_1 \overline{W} \quad \text{en} \quad W''_2 > W'_2 > \overline{W}_1,$$

terwijl

$$\frac{1}{g} > \frac{1}{f} > 1;$$

wanneer dus de schil met den grond verbonden is en de kern op standvastige potentiaal wordt gehouden, heeft de energie van het stelsel hare maximumwaarde.

7. Vergelijken wij de grootste en kleinste waarden van W met de middenwaarde (waarbij de kern alleen aanwezig is), dus met

$$W = \frac{M_1^2}{2\,a} = \tfrac{1}{2}\,a\,V_1^2 = C\,,$$

zoo geeft het boven gevondene voor

$$\text{de kleinste waarde, } W''_1 = A = \frac{b - a}{b}\,C = g\,C$$

$$\text{de grootste waarde, } W''_2 = B = \frac{b}{b - a}\,C = \frac{1}{g}\,C$$

hieruit volgt, $A\,B = C^2$, zoodat de electrische energie van den kern, wanneer de schil verwijderd is, middenevenredig is tot de minimum en maximum waarde der energie van het stelsel; in het eerste geval bij constante lading van den kern, in het tweede geval, wanneer die kern eene constante potentiaal heeft. — Die minimum en maximum waarden treden beiden op, wanneer de schil met den grond is verbonden.

Utrecht, October 1888.

EENIGE FORMULEN VOOR DE BEREKENING

VAN DE

BERNOULLIAANSCHE EN VAN DE TANGENTEN-COËFFICIËNTEN.

DOOR

F. J. VAN DEN BERG.

Evenals in mijne vroegere, in de Verslagen en Mededeelingen, Afdeeling Natuurkunde, 2e Reeks, Deel XVI, 1e Stuk, 1881, blz. 74—176, opgenomen bijdrage »Over periodieke terugloopende betrekkingen tusschen de coëfficiënten in de ontwikkeling van functiën; meer in het bijzonder tusschen de Bernoulliaansche en ook tusschen eenige daarmede verwante coëfficiënten", ga ik ook in het onderstaande uit van de bepaling der Bernoulliaansche en der tangenten-coëfficiënten als coëfficiënten in de ontwikkeling van twee der meest eenvoudige goniometrische functiën. In aansluiting namelijk aan blz. 82—83, 84—85 en 154—155 van die bijdrage stel ik de beide ontwikkelingen

$$-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2} = \sum_{0}^{\infty}{}_{q}\frac{B_{2q-1}}{(2q)!}x^{2q-1} \quad \text{en} \quad tg\frac{x}{2} = \sum_{0}^{\infty}{}_{q}\frac{T_{2q-1}}{(2q)!}x^{2q-1}$$

op den voorgrond, waarin weder, omdat de gebezigde boog niet x zelf, maar $\frac{x}{2}$ is, B_{2q-1} den q^{den} Bernoulliaanschen of verkleinden cotangenten-coëfficiënt en T_{2q-1} den q^{den} verkleinden tangenten-coëfficiënt beteekent, zijnde ook nu slechts

voor de regelmaat en de beknoptheid der formulen de op zich zelf eigenlijk overbodige notatiën $B_{-1} = -1$ en $T_{-1} = 0$ als vooropstaande of 0[de] coëfficiënten ingevoerd, terwijl overigens ook in het verdere het teeken $p!$ steeds in plaats van het gedurig product $1 . 2 . 3 \ldots p$ staat, zoodat blijkens $p! = \frac{(p+1)!}{p+1}$ aan het symbool $0!$ de waarde 1 is te hechten. Al dadelijk geeft nu de formule

$$cot \frac{x}{2} - 2 \, cot \, x = cot \frac{x}{2} - \frac{cot^2 \frac{x}{2} - 1}{cot \frac{x}{2}} = tg \frac{x}{2},$$

door in haar eerste en haar derde lid, uitgedrukt in de coëfficiënten B en T, de coëfficiënten van den algemeenen term x^{2q-1} onderling gelijk te stellen, de betrekking $2 (2^{2q} - 1) B_{2q-1} = T_{2q-1}$; en deze doet alzoo iedere formule voor de Bernoulliaansche coëfficiënten tevens als eene zoodanige voor de tangenten-coëfficiënten kennen, en omgekeerd. Deze betrekking eens en vooral gevonden zijnde, zullen wij ons dan ook in het volgende, alwaar gewoonlijk de formulen in T een meer beknopten vorm hebben, in den regel tot deze formulen bepalen, zonder ze nogmaals neêr te schrijven in den gewijzigden vorm dien zij verkrijgen door voor iederen T de waarde uitgedrukt in den overeenkomstigen B in te vullen.

Vooreerst heeft men nu, overgaande van goniometrische tot exponentiale functiën en daarbij als gewoonlijk door e de Neperiaansche logarithmen-basis en door i de onbestaanbare eenheid verstaande,

$$i \, tg \frac{x}{2} = \frac{2 \, i \, sin \frac{x}{2}}{2 \, cos \frac{x}{2}} = \frac{e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}} + e^{-\frac{ix}{2}}} = 1 - \frac{2}{e^{ix} + 1},$$

en dus, vervangende x door $-ix$ en gelijktijdig de bovenstaande tangenten-ontwikkeling toepassende,

$$-i\,tg\,\frac{ix}{2} = -i\sum_0^\infty{}_q \frac{T_{2q-1}}{(2q)!}(ix)^{2q-1} = \sum_0^\infty{}_q (-)^{q-1}\frac{T_{2q-1}}{(2q)!}x^{2q-1} =$$

$$= 1 - \frac{2}{e^x+1}.$$

Denkt men zich hierin het laatste lid volgens de reeks van MACLAURIN ontwikkeld, dan komt onmiddellijk door gelijkstelling van den coëfficiënt van x^{2q-1} aan den gelijknamigen van het voorlaatste lid:

$$(-)^{q-1}\frac{T_{2q-1}}{(2q)!} = \frac{1}{(2q-1)!}\cdot\frac{d^{2q-1}\left(1-\frac{2}{e^x+1}\right)}{dx^{2q-1}}_{(x=0)} =$$

$$= -\frac{2}{(2q-1)!}\cdot\frac{d^{2q-1}\left(\frac{1}{e^x+1}\right)}{dx^{2q-1}}_{(x=0)},$$

hetgeen onder den vorm

$$B_{2q-1} = \frac{T_{2q-1}}{2(2^{2q}-1)} = (-)^q\frac{2q}{2^{2q}-1}\cdot\frac{d^{2q-1}\left(\frac{1}{e^x+1}\right)}{dx^{2q-1}}_{(x=0)}$$

naar behooren dezelfde differentiaal-uitdrukking voor den q^{den} Bernoulliaanschen coëfficiënt geeft als onder anderen bij R. LOBATTO, Lessen over de differentiaal- en integraalrekening, 2e Deel, 1e Afdeeling, 1852, blz. 374—376, en bij S. F. LACROIX, Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, 2e Ed., Tome 3, 1819, blz. 107—114, uit andere gronden volgens LAPLACE is afgeleid. Aldaar wordt dan verder uiteengezet hoe LAPLACE, door het $(2q-1)^e$ differentiaalquotient van de functie $\frac{1}{e^x+1}$ op te maken eensdeels onder den vorm eener eindige breuk met $(e^x+1)^{2q}$ tot noemer en met onbepaalde coëfficiënten voor de $2q-1$ eerste magten van e^x in den teller, ten andere onder den vorm eener oneindige reeks komende door eerst die functie $\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

zelve volgens de negatieve magten van e^x te ontwikkelen, tot zijne formule voor de regtstreeksche of onafhankelijke berekening van een willekeurigen Bernoulliaanschen coëfficiënt geraakt is. Deze formule, die zich, weder in T- in plaats van in B-vorm, en gebruik makende van dubbele Σ-teekens en van de gewone notatie voor de binomiaal-coëfficiënten, aanvankelijk aldus laat schrijven:

$$(-)^{q-1}\frac{2^{2q-2}}{q}T_{2q-1}=\sum_{1}^{2q-1}{}_n(-)^{n-1}\sum_{0}^{n-1}{}_r(-)^r\binom{2q}{r}(n-r)^{2q-1},$$

levert het groote voordeel op dat zij zich in het tweede lid tot slechts het halve aantal onder het eerste Σ-teeken staande termen laat terugbrengen: immers, op grond dat de $(2q-1)^e$ magten van de natuurlijke getallen eene rekenkundige reeks van de $(2q-1)^e$ orde vormen en dus hunne $(2q)^e$ verschillen allen gelijk nul zijn, heeft men

$$\sum_{0}^{2q}{}_r(-)^r\binom{2q}{r}(n-r)^{2q-1}=0$$

of, omdat hierin de term voor $r=n$ van zelf gelijk nul is,

$$\sum_{0}^{n-1}{}_r(-)^r\binom{2q}{r}(n-r)^{2q-1}+\sum_{n+1}^{2q}{}_r(-)^r\binom{2q}{r}(n-r)^{2q-1}=0,$$

waaruit volgt, vervangende in den tweeden Σ-term den willekeurigen veranderlijken aanwijzer r door $2q-r$ en daarbij op $\binom{2q}{2q-r}=\binom{2q}{r}$ lettende,

$$(-)^{n-1}\sum_{0}^{n-1}{}_r(-)^r\binom{2q}{r}(n-r)^{2q-1}=$$

$$=(-)^{2q-n-1}\sum_{0}^{2q-n-1}{}_r(-)^r\binom{2q}{r}(2q-n-r)^{2q-1};$$

en het blijkt alzoo dat in gezegde formule telkens elke

twee evenver uit het midden verwijderde termen, in n en $2q-n$ namelijk, onderling gelijk zijn, dat dus ook de middelste term, voor $n=q$, op zich zelf staat, en dat bijgevolg LAPLACE zijne formule teregt heeft kunnen inkorten tot wat weder in T- en in Σ-vorm luidt:

$$(-)^{q-1}\frac{2^{2q-2}}{q}T_{2q-1}=2\sum_{1}^{q-1}{}_{n}(-)^{n-1}\sum_{0}^{n-1}{}_{r}(-)^{r}\binom{2q}{r}(n-r)^{2q-1}+$$
$$+(-)^{q-1}\sum_{0}^{q-1}{}_{r}(-)^{r}\binom{2q}{r}(q-r)^{2q-1}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Maar ook zonder een beroep te doen op de reeks van MACLAURIN kan men de bovenstaande onderlinge gelijkheid der twee voor $-i\,tg\frac{ix}{2}$ verkregen waarden bij voorbeeld als volgt onder anderen vorm verder ontwikkelen. Men heeft

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{q}(-)^{q-1}\frac{T_{2q-1}}{(2q)!}x^{2q-1}=1-\frac{2}{e^{x}+1}=1-\frac{1}{1+\frac{e^{x}-1}{2}}=$$
$$=-\sum_{1}^{\infty}{}_{n}(-\tfrac{1}{2})^{n}(e^{x}-1)^{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

En hierin laat zich nu substitueren

$$(e^{x}-1)^{n}=\sum_{0}^{n}{}_{r}(-)^{r}\binom{n}{r}e^{(n-r)x}=\sum_{0}^{n}{}_{r}(-)^{r}\binom{n}{r}\sum_{0}^{\infty}{}_{s}\frac{((n-r)x)^{s}}{s!},$$

welke substitutie vooreerst wegens het ontbreken van alle even magten van x in het eerste lid der vorenstaande gelijkheid aanleiding geeft tot de opmerking dat in de uitkomst de coëfficiënt van elken term x^{s} voor $s=2q$ gelijk nul moet zijn, dat is

$$\sum_{1}^{2q}{}_{n}(-\tfrac{1}{2})^{n}\sum_{0}^{n-1}{}_{r}(-)^{r}\binom{n}{r}(n-r)^{2q}=0,$$

(waarin namelijk voor r de bovengrens n door $n-1$ ver-

vangen mogt worden omdat voor $r = n$ de term $(n-r)^{2q}$ verdwijnt, terwijl voor n de bovengrens van ∞ tot $2q$ mogt verminderd worden omdat volgens het zoo even reeds herinnerde de $(2q+1)^e$, en ook alle hoogere, verschillen van de reeks der $(2q)^e$ magten van zelf gelijk nul worden). Maar ten andere geeft diezelfde substitutie door onderlinge gelijkstelling, voor $s = 2q - 1$, van de coëfficiënten van x^{2q-1}, en met inachtneming van eene overeenkomstige grensverlaging, en na vermenigvuldiging met $2^{2q-1}.(2q-1)!$, de formule:

$$\left.\begin{aligned} &(-)^{q-1}\frac{2^{2q-2}}{q}T_{2q-1} = \\ &= \sum_1^{2q-1}{}_n (-)^{n-1}2^{2q-n-1}\sum_0^{n-1}{}_r (-)^r\binom{n}{r}(n-r)^{2q-1} = \\ &= \sum_1^{2q-1}{}_n (-)^{n-1}2^{2q-n-1}.n\sum_0^{n-1}{}_r (-)^r\binom{n-1}{r}(n-r)^{2q-2}, \end{aligned}\right\}..(2)$$

waarin namelijk als vereenvoudigde vorm het laatste lid mogt worden bijgeschreven op grond van

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n}{n-r}\cdot\frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} = \frac{n}{n-r}\binom{n-1}{r}.$$

In plaats van, zooals hier geschied is, in het tweede of het derde lid voor ieder der $2q-1$ waarden van n den in de ontwikkeling van $(e^x-1)^n$ voorkomenden coëfficiënt van den term x^{2q-1} zelfstandig in $\sum_r$-vorm uit te drukken, kan men deze coëfficiënten voor de opvolgende n ook geschikt door eene teruglopende formule uit elkander afleiden. Uitgaande namelijk van dézen vorm van ontwikkeling:

$$\frac{(e^x-1)^n}{n!} = \sum_n^{\infty}{}_s P_{n.s}\frac{x^s}{s!},$$

waarin men wegens $e^x - 1 = x +$ enz. de veranderlijke s werkelijk eerst bij n als benedengrens behoeft te doen aanvangen, en opmerkende dat

$$\frac{d\,\dfrac{(e^x-1)^n}{n!}}{dx} = \frac{(e^x-1)^{n-1}}{(n-1)!}\,e^x = n\,\frac{(e^x-1)^n}{n!} + \frac{(e^x-1)^{n-1}}{(n-1)!}$$

is, verkrijgt men door substitutie hierin:

$$\sum_n^\infty {}_s\, P_{n.s}\,\frac{x^{s-1}}{(s-1)!} = n\sum_n^\infty {}_s\, P_{n.s}\,\frac{x^s}{s!} + \sum_{n-1}^\infty {}_s\, P_{n-1.s}\,\frac{x^s}{s!}\,;$$

en na dus, ten einde de coëfficiënten van x^{s-1} in beide leden onderling gelijk te kunnen stellen, in het tweede lid de willekeurige veranderlijke s door $s-1$ vervangen te hebben, geeft deze gelijkstelling de algemeene herleidingsformule

$$P_{n.s} = n\,P_{n.s-1} + P_{n-1.s-1}$$

voor de coëfficiënten P. In aanmerking nemende dat voor $n=1$ alle $P_{1.s}=1$ bekend zijn, en evenzeer voor $s=n$ alle $P_{n.n}=1$, vult men door deze formule gemakkelijk de volgende

Tabel der coëfficiënten $P_{n.s}$ van $\frac{x^s}{s!}$ in $\frac{(e^x-1)^n}{n!}$

	$\frac{x^1}{1!}$	$\frac{x^2}{2!}$	$\frac{x^3}{3!}$	$\frac{x^4}{4!}$	$\frac{x^5}{5!}$	$\frac{x^6}{6!}$	$\frac{x^7}{7!}$	enz.
$n=1$	1	1	1	1	1	1	1	
$n=2$		1	3	7	15	31	63	
$n=3$			1	6	25	90	301	
$n=4$				1	10	65	350	
$n=5$					1	15	140	
$n=6$						1	21	
$n=7$							1	
enz.								

in, waarvan alzoo de beteekenis is dat men voor eenige waarde van n de ontwikkeling van $\frac{(e^{t}-1)^{n}}{n!}$ verkrijgt door de som te nemen der producten van de coëfficiënten voorkomende in de door deze n aangewezen rij met de daarboven staande termen aan het hoofd der tabel. (In het voorbijgaan zij hier herinnerd dat de coëfficiënten der tabel dezelfde zijn die voorkomen in de formulen voor de eindige differentiën der opvolgende orden van eene willekeurige functie uitgedrukt in de differentiaal-quotienten dier functie: immers voor $y = f(x)$ in verband met $y + \Delta y = f(x + h)$ geeft het theorema van TAYLOR, wanneer men daarop eene symbolische schrijfwijze toepast,

$$\Delta y = f(x + h) - f(x) = \sum_{1}^{\infty}{}_{s} \frac{h^{s}}{s!} \frac{d^{s} y}{d x^{s}} = \left(e^{h \frac{d}{dx}} - 1\right) y,$$

en dus de herhaling van dezelfde bewerking in het algemeen

$$\Delta^{n} y = \left(e^{h \frac{d}{dx}} - 1\right)^{n} y,$$

zoodat ook te dezer zake, zij het symbolisch, eene uitdrukking van denzelfden vorm $(e^{t}-1)^{n}$ als zoo even optreedt. De vorenstaande tabel komt dan ook werkelijk te voorschijn indien men de onder anderen bij LOBATTO op blz. 335 uit zijne herleidingsformule

$$p_{r}^{(n)} = n \left(p_{r-1}^{(n-1)} + p_{r-1}^{(n)}\right),$$

opgemaakte tabel der coëfficiënten p voor de gezegde differentiën vereenvoudigt door de opvolgende rijen te deelen door hare eerste termen $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$, $7! = 5040$, enz., hetgeen nederkomt op den overgang van zijne tot onze coëfficiënten volgens $p_{r}^{(n)} = n!\, P_{n,s}$ en den daaruit dadelijk en naar behooren voortvloeijenden overgang van zijne herleidingsformule in p tot de onze in P. Ter zake van vorenstaande tabel vond ik overigens nog aangehaald LACROIX, blz. 124 en 300, en L. EULER, Differentialrechnung, 2[er] Theil, 1790, blz. 59—63).

De substitutie nu in de formule (α) van de op deze wijze in de coëfficiënten P uitgedrukte $(e^x-1)^n$ geeft

$$\sum_0^\infty{}^q (-)^{q-1} \frac{T_{2q-1}}{(2q)!} x^{2q-1} = - \sum_1^\infty{}^n (-\tfrac{1}{2})^n \, n! \sum_n^\infty{}^s P_{n.s} \frac{x^s}{s!},$$

waarbij wij niet op nieuw stilstaan bij het noodwendig verdwijnen van den volledigen coëfficiënt van iedere even magt van x in het tweede lid, maar daarentegen door onderlinge gelijkstelling der coëfficiënten van de algemeene oneven magt x^{2q-1} in beide leden, na dezelfde grensverlaging voor n en dezelfde vermenigvuldiging met $2^{2q-1}.(2q-1)!$ als bij (2), besluiten tot:

$$(-)^{q-1} \frac{2^{2q-2}}{q} T_{2q-1} = \sum_1^{2q-1}{}^n (-)^{n-1} 2^{2q-n-1} \, n! \, P_{n.2q-1} \,..\, (2')$$

En deze formule, die in wezenlijkheid slechts een andere, terugloopende, vorm van den zelfstandigen vorm (2) is, behoeft aan de vorenstaande tabel dus telkens slechts de gezamenlijke coëfficiënten P eener zelfde kolom van oneven rangorde $2q-1$ te ontleenen: voor de hier te maken toepassing zijn de even kolommen allen overbodig, en dit geeft dan ook aanleiding tot het regtstreeks zamenstellen voor ons doel van de tabel in zamengedrongen vorm, met behoud namelijk van alle rijen maar alleen van de oneven kolommen. Daartoe dient in plaats van de bovenstaande van s op $s-1$ terugloopende herleidingsformule voor P eene andere te komen, die telkens van s op $s-2$ verspringt; en zulk eene verkrijgt men door het toenmaals gevonden eerste differentiaal-quotient van $\dfrac{(e^x-1)^n}{n!}$ nogmaals te differentiëren en in de uitkomst dit quotient zelf, zoowel voor n als voor $n-1$, te substitueren, hetgeen geeft

$$\frac{d^2 \dfrac{(e^x-1)^n}{n!}}{dx^2} = n \frac{d \dfrac{(e^x-1)^n}{n!}}{dx} + \frac{d \dfrac{(e^x-1)^{n-1}}{(n-1)!}}{dx} =$$

$$= n^2 \frac{(e^x-1)^n}{n!} + (2n-1) \frac{(e^x-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(e^x-1)^{n-2}}{(n-2)!},$$

dat is

$$\sum_{n}^{\infty} {}_s P_{n.s} \frac{x^{s-2}}{(s-2)!} = n^2 \sum_{n}^{\infty} {}_s P_{n.s} \frac{x^s}{s!} + (2n-1) \sum_{n-1}^{\infty} {}_s P_{n-1.s} \frac{x^s}{s!} + \\ + \sum_{n-2}^{\infty} {}_s P_{n-2.s} \frac{x^s}{s!},$$

waaruit, na vervanging in het tweede lid van s door $s-2$, de bedoelde formule

$$P_{n.s} = n^2 P_{n.s-2} + (2n-1) P_{n-1.s-2} + P_{n-2.s-2}$$

komt. Deze formule die, ware het noodig, even goed voor het zamenstel der uitsluitend even als voor dat der oneven kolommen zou kunnen dienen, strekt alzoo tot grondslag van de volgende in ons geval toereikende

Tabel der coëfficiënten $P_{n.s}$ van de oneven termen $\frac{x^s}{s!}$ in $\frac{(e^x - 1)^n}{n!}$.

	$\frac{x^1}{1!}$	$\frac{x^3}{3!}$	$\frac{x^5}{5!}$	$\frac{x^7}{7!}$	$\frac{x^9}{9!}$	enz.
$n = 1$	1	1	1	1	1	
$n = 2$		3	15	63	255	
$n = 3$		1	25	301	3025	
$n = 4$			10	350	7770	
$n = 5$			1	140	6951	
$n = 6$				21	2646	
$n = 7$				1	462	
$n = 8$					36	
$n = 9$					1	
enz.						

Hiermede afstappende van hetgeen voor ons doel uit de ontwikkeling van (α) voortvloeit, gaan wij over tot het opmaken van andere, meer eenvoudige, formulen voor de onafhankelijke berekening van de tangenten- en dus ook van de Bernoulliaansche coëfficiënten. Wij beginnen daarbij, ten einde zoo straks een herhaald gebruik van de uitkomsten te kunnen maken, met een onderzoek naar de ontwikkeling, zoowel in zelfstandigen als in terugloopenden vorm, eener willekeurige magt van den sinus uitgedrukt in de magten van den boog. Hiertoe kan als uitgangspunt de formule

$$(2\,i\,sin\,x)^n = (e^{ix} - e^{-ix})^n = \sum_0^n {}_r (-)^r \binom{n}{r} (e^{ix})^{n-r}\, (e^{-ix})^r =$$

$$= \sum_0^n {}_r (-)^r \binom{n}{r} e^{(n-2r)ix} = \sum_0^n {}_r (-)^r \binom{n}{r} \sum_0^\infty {}_s \frac{((n-2r)ix)^s}{s!}$$

dienen. Maar omdat $\frac{sin\,x}{x}$ en dus ook $\left(\frac{sin\,x}{x}\right)^n$ slechts de positieve even magten van x bevat, kunnen in het laatste lid geene andere magten dan van den vorm x^{n+2s} voorkomen. Vervangende dus aldaar s door $n + 2\,s$, keerende de volgorde der beide sommatiën om, en deelende door i^n, verkrijgt men vooreerst

$$(2\,sin\,x)^n = \sum_0^\infty {}_s (-)^s \frac{x^{n+2s}}{(n+2s)!} \sum_0^n {}_r (-)^r \binom{n}{r} (n-2\,r)^{n+2s},$$

in welke formule echter de onder het tweede Σ-teeken staande termen tot slechts het halve aantal zijn terug te brengen omdat steeds

$$(-)^r \binom{n}{r} (n-2\,r)^{n+2s} = (-)^{n-r} \binom{n}{n-r} (n-2(n-r))^{n+2s}$$

is, dat is elke twee evenver uit het midden verwijderde termen, in r en $n-r$, onderling gelijk; zoodat men, deelende

door 2, en ingeval van even n opmerkende dat dan de middelste term, voor $r = \frac{n}{2}$, van zelf gelijk nul is, en dat dan tevens overal $n - 2r = 2\left(\frac{n}{2} - r\right)$ kan geschreven worden, verkrijgt:

$$2^{n-1} sin^n x = \left\{\begin{array}{l} \text{(voor oneven } n) \\ \sum_0^\infty {}^s(-)^s \frac{x^{n+2s}}{(n+2s)!} \sum_0^{\frac{n-1}{2}} {}^r(-)^r \binom{n}{r} (n-2r)^{n-2s}, \\ \text{(voor even } n) \\ \sum_0^\infty {}^s(-)^s \frac{(2x)^{n+2s}}{(n+2s)!} \sum_0^{\frac{n}{2}-1} {}^r(-)^r \binom{n}{r} \left(\frac{n}{2} - r\right)^{n+2s}. \end{array}\right\} \ldots (\beta)$$

Thans de ontwikkeling derzelfde functie $sin^n x$ volgens terugloopende coëfficiënten. Stel daartoe

$$\frac{sin^n x}{n!} = \sum_0^\infty {}^s(-)^s \, Q_{n.n+2s} \frac{x^{n+2s}}{(n+2s)!}, \quad \ldots \ldots (\beta')$$

dan make men gebruik van

$$\frac{d^2 \frac{sin^n x}{n!}}{dx^2} = \frac{d\frac{sin^{n-1}x cos x}{(n-1)!}}{dx} = \frac{-sin^n x + (n-1) sin^{n-2} x (1 - sin^2 x)}{(n-1)!} =$$

$$= -n^2 \frac{sin^n x}{n!} + \frac{sin^{n-2} x}{(n-2)!},$$

dat is bij substitutie

$$\sum_0^\infty {}^s(-)^s Q_{n.n+2s} \frac{x^{n+2s-2}}{(n+2s-2)!} = -n^2 \sum_0^\infty {}^s(-)^s Q_{n.n+2s} \frac{x^{n+2s}}{(n+2s)!} +$$

$$+ \sum_0^\infty {}^s(-)^s \; Q_{n-2\; n+2s-2} \frac{x^{n+2s-2}}{(n+2s-2)!}.$$

Vervangt men hier, ten einde de coëfficiënten van x^{n+2s-2} in beide leden gelijk te kunnen stellen, in den eersten term van het tweede lid den veranderlijken aanwijzer s door $s-1$, dan geeft deze gelijkstelling de herleidingsformule

$$Q_{n.n+2s} = n^2\, Q_{n.n+2s-2} + Q_{n-2.n+2s-2}$$

voor de coëfficiënten Q. Ofschoon dus deze formule in verband met (β') even goed voor even als voor oneven waarden van n geldt, is echter voor even n de invoering van verkleinde getallencoëfficiënten Q' mogelijk en bij de toepassing verkieslijk. Stel namelijk dat in dat geval ieder dezer nieuwe coëfficiënten Q' met den gelijknamigen oorspronkelijken coëfficiënt Q zamenhangt volgens $Q_{n.n+2s} = 2^{2s}\, Q'_{n.n+2s}$ (waarin dus telkens de exponent van 2 gelijk is aan het verschil der beide aanwijzers van Q of Q'), dan kan men vooreerst de formule (β') bij vermenigvuldiging met 2^n schrijven onder den vorm

$$\frac{(2 \sin x)^n}{n!} = \sum_0^\infty {}_s (-)^s\, Q'_{n\ n+2s}\, \frac{(2x)^{n+2s}}{(n+2s)!} \quad . \; . \; (\beta'')$$

en ten andere de daarin alsnu voorkomende coëfficiënten Q' uitrekenen door de herleidingsformule

$$Q'_{n\ n+2s} = \left(\frac{n}{2}\right)^2 Q'_{n.n+2s-2} + Q'_{n-2.n+2s-2}$$

komende door de drie termen van de evengevonden formule in Q opvolgend te deelen door de drie, ieder aan 2^{2s} gelijke, waarden $2^{(n+2s)-n}$, $2^2.2^{(n+2s-2)-n}$ en $2^{(n+2s-2)-(n-2)}$. In aansluiting nu aan de twee omschreven, oneven en even, stelsels, en in aanmerking nemende eensdeels dat in (β') voor $n = 1$ wegens

$$\frac{\sin^1 x}{1!} = \sum_0^\infty {}_s (-)^s \frac{x^{1+2s}}{(1+2s)!}$$

alle $Q_{1.1+2s}=1$ en voor $s=0$ alle $Q_{n.n}=1$ bekend zijn, anderdeels dat in (β'') voor $n=2$ wegens

$$\frac{(2\,sin\,x)^2}{2\,!}=1-\,cos\,2\,x=\sum_0^{\infty}{}_s\,(-)^s\,\frac{(2x)^{2+2s}}{(2+2\,s)\,!}$$

alle $Q'_{2.2+2s}=1$ en voor $s=0$ alle $Q'_{n.n}=1$ evenzeer bekend zijn, verkrijgt men zonder moeite de beide onderstaande afzonderlijk voor oneven en voor even n dienstige tabellen :

Tabel der coëfficiënten $Q_{n.n+2s}$ van $\dfrac{x^{n+2s}}{(n+2s)\,!}$ in $(-)^{\frac{n-1}{2}}\dfrac{sin^n x}{n\,!}$ (voor oneven n).

	$\frac{x^1}{1\,!}$	$-\frac{x^3}{3\,!}$	$\frac{x^5}{5\,!}$	$-\frac{x^7}{7\,!}$	$\frac{x^9}{9\,!}$	$-\frac{x^{11}}{11\,!}$	enz.
$n=1$	1	1	1	1	1	1	
$n=3$		1	10	91	820	7381	
$n=5$			1	35	966	24970	
$n=7$				1	84	5082	
$n=9$					1	165	
$n=11$						1	
enz.							

Tabel der coëfficiënten $Q'_{n.n+2s}$ van $\frac{(2x)^{n+2s}}{(n+2s)!}$ in $(-)^{\frac{n}{2}-1}\frac{(2sinx)^n}{n!}$ (voor even n).

	$\frac{(2x)^2}{2!}$	$-\frac{(2x)^4}{4!}$	$\frac{(2x)^6}{6!}$	$-\frac{(2x)^8}{8!}$	$\frac{(2x)^{10}}{10!}$	$-\frac{(2x)^{12}}{12!}$	enz.
$n=2$	1	1	1	1	1	1	
$n=4$		1	5	21	85	341	
$n=6$			1	14	147	1408	
$n=8$				1	30	627	
$n=10$					1	55	
$n=12$						1	
enz.							

in ieder van welke tabellen, evenals in de allereerste tabel, de ontwikkeling der aan het hoofd vermelde functie voor eenige waarde van n weder komt als algebraïsche som der producten van de door deze n aangewezen coëfficiëntenrij met de daarboven geplaatste termen in x.

Wat nu het gebruik betreft, dat wij van de voor $sin^n x$ gevonden formulen (β), (β') en (β'') voor ons doel wenschen te maken, merken wij in de eerste plaats op dat men — in dit geval liever dan van $tg\frac{x}{2}$ — dadelijk van

$$tg\,x = \frac{sin\,x}{cos\,x} = sin\,x(1-sin^2x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^\infty{}_n \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6......(2n)} sin^{2n+1}x$$

zelf de ontwikkeling volgens de opklimmende oneven magten van $sin\,x$ voor zich heeft; en daarbij blijkt voor den door $n=0$ aangeduiden term niet alleen aan den noemer $2.4.6...(2n) = 2^n.n!$ van de vooropstaande breuk, krach-

tens het in den aanhef gezegde, maar evenzeer aan den onder den vorm $\frac{(-1).1.3.5\ldots(2n-1)}{-1}$ te beschouwen teller, en dus ook aan de breuk zelve, de eenheid tot waarde te moeten worden toegekend. Vult men nu in het eerste lid de waarde uitgedrukt in de tangenten-coëfficiënten in, en in het laatste lid voor de algemeene oneven magt van *sin x* de waarde die bij vervanging van n door $2n+1$ hetzij uit de eerste formule (β) hetzij uit de formule (β') komt, dan beschikt men over de dubbele gelijkheid

$$\sum_0^\infty{}_q \frac{T_{2q-1}}{(2q)!}(2x)^{2q-1} = \sum_0^\infty{}_n \left\{ \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots(2n)} \cdot \frac{1}{2^{2n}} \right.$$

$$\left. \sum_0^\infty{}_s (-)^s \frac{x^{2n+2s+1}}{(2n+2s+1)!} \sum_0^n{}_r (-)^r \binom{2n+1}{r} (2n-2r+1)^{2n+2s+1} \right\} =$$

$$= \sum_0^\infty{}_n \left\{ \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots(2n)} \cdot (2n+1)! \right.$$

$$\left. \sum_0^\infty{}_s (-)^s \, Q_{2n+1 \,.\, 2n+2s+1} \frac{x^{2n+2s+1}}{(2n+2s+1)!} \right\} .$$

En nu is niets anders noodig dan, na in het tweede en het derde lid, om aldaar dezelfde magt x^{2q-1} als in het eerste lid op den voorgrond te kunnen brengen, $s=q-n-1$ genomen te hebben, de coëfficiënten van deze magt in de drie leden onderling gelijk te stellen, ten einde na vermenigvuldiging met $(-)^{q-1}(2q-1)!$ te kunnen besluiten tot déze dubbele formule, de eerste onafhankelijk, de tweede in de teruglòopende coëfficiënten Q, voor den willekeurigen tangenten-coëfficiënt:

$$(-)^{q-1}\frac{2^{2q-2}}{q} T_{2q-1} = \sum_0^{q-1}{}_n \left\{ (-)^n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots(2n)} \cdot \frac{1}{2^{2n}} \right.$$

$$\left. \sum_0^n{}_r (-)^r \binom{2n+1}{r} (2n-2r+1)^{2q-1} \right\} \quad \ldots \; (3)$$

$$=\sum_{0}^{q-1}{}_{n}(-)^{n}\,(1.3.5\ldots(2n-1))^{2}(2n+1)\,Q_{2n+1.2q-1};\ldots(3')$$

zijnde hierin weder voor n de bovengrens van ∞ tot $q-1$ verlaagd kunnen worden, omdat in (3) het $(2n+1)^e$ verschil van de reeks der $(2q-1)^e$ magten van de opvolgende oneven getallen voor iedere $2n+1>2q-1$ van zelf verdwijnt, of, wat hetzelfde zegt, omdat de in (3′) aan eene zelfde kolom van de voorlaatste tabel te ontleenen coëfficiënten $Q_{2n+1.2q-1}$ blijkbaar komen te ontbreken zoodra ook hier $2n+1>2q-1$ zou zijn.

Ook de ontwikkeling

$$tgx=\sqrt{\frac{1-cos2x}{1+cos2x}}=\frac{1-(1-sin^2 2x)^{\frac{1}{2}}}{sin\,2\,x}=\sum_{0}^{\infty}{}_{n}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n+2)}sin^{2n+1}2x$$

volgens de opklimmende oneven magten van $sin\,2\,x$ in plaats van $sin\,x$ zelf kan geschikt tot een paar nagenoeg gelijkvormige formulen voor den algemeenen tangenten-coëfficiënt dienen. Past men hier namelijk geheel dezelfde bewerking toe, maar bovendien eene deeling door 2^{2q-2}, dan vindt men:

$$(-)^{q-1}\frac{T_{2q-1}}{q}=\sum_{0}^{q-1}{}_{n}\left\{(-)^{n}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n+2)}\cdot\frac{1}{2^{2n-1}}\right.$$

$$\left.\sum_{0}^{n}{}_{r}(-)^{r}\binom{2n+1}{r}(2n-2r+1)^{2q-1}\right\}\ldots\ldots\ldots(4)$$

$$=\sum_{0}^{q-1}{}_{n}(-)^{n}\frac{(1.3.5\ldots(2n-1))^{2}(2n+1)}{n+1}Q_{2n+1.2q-1}\ldots(4')$$

En in plaats van de tangens zelf, kan men, en wat eenvoudigheid van uitkomst betreft nog met wel zoo goed gevolg, haar differentiaalquotient tot uitgang van berekening doen strekken: zelfs heeft men hier niet alleen weder geschikte ontwikkelingen in $sin\,x$ zelf en in $sin\,2\,x$, maar bovendien in $sin\frac{x}{2}$. Men kan toch schrijven — wat den tweeden

regel betreft door de laatst gevonden ontwikkeling van *tg x* zelf te substitueren —

$$\frac{d\,tg\,x}{dx}=\frac{1}{cos^2 x}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-sin^2 x}=\sum\limits_0^\infty{}_n\, sin^{2n} x\\[2ex] 2\,\dfrac{tg\,x}{sin\,2\,x}=2\sum\limits_0^\infty{}_n\dfrac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n+2)}sin^{2n}\,2\,x\\[2ex] \left(1-2sin^2\dfrac{x}{2}\right)^{-2}=\sum\limits_0^\infty{}_n(n+1)2^n sin^{2n}\dfrac{x}{2}\end{cases}$$

en heeft dus hier telkens met de opvolgende even magten van den sinus van x, of van $2\,x$, of van $\frac{x}{2}$, te doen. Alzoo geeft bij voorbeeld de eerste regel, door nu bij vervanging van n door $2\,n$ hetzij de tweede formule (β), hetzij de formule (β') toe te passen — daarbij evenwel lettende dat de toepasselijkheid van beide deze formulen zelve eerst bij $n=2$, en dus na de gezegde vervanging eerst bij $n=1$ begint, en dat alzoo de noodzakelijkheid ontstaat in ieder der drie voor $\frac{d\,tg\,x}{dx}$ verkregen ontwikkelingen telkens den term voor $n=0$, dat is de eenheid, afzonderlijk op den voorgrond te brengen —

$$\sum_0^\infty{}_q\frac{2(2q-1)\,T_{2q-1}}{(2q)!}(2\,x)^{2q-2}=$$

$$=1+\sum_1^\infty{}_n\frac{1}{2^{2n-1}}\sum_0^\infty{}_s(-)^s\frac{(2\,x)^{2n+2s}}{(2n+2s)!}\sum_0^{n-1}{}_r(-)^r\binom{2n}{r}(n-r)^{2n+2s}=$$

$$=1+\sum_1^\infty{}_n\frac{(2\,n)!}{2^{2n}}\sum_0^\infty{}_s(-)^s\;Q'_{2\,n\,.\,2\,n\,+\,2\,s}\,\frac{(2\,x)^{2\,n\,+\,2\,s}}{(2\,n+2\,s)!}\,.$$

En neemt men hier, ter onderlinge gelijkstelling der coëfficiënten van $(2\,x)^{2\,q-2}$, thans in het tweede en het derde

lid weder $s = q-n-1$, dan verkrijgt men na vermenigvuldiging met $(-)^{q-1}(2q-2)!$ het stel:

$$(-)^{q-1}\frac{T_{2q-1}}{q}=\sum_{1}^{q-1}{}_n(-)^n\frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{0}^{n-1}{}_r(-)^r\binom{2n}{r}(n-r)^{2q-2}\;..\;(5)$$

$$=\sum_{1}^{q-1}{}_n(-)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}}Q'_{2n.2q-2},\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(5')$$

waarin ook nu, om reden als zoo even, voor n de bovengrens ∞ door $q-1$ vervangen mogt worden.

Op dezelfde wijze geeft de tweede regel aanleiding tot de dubbele formule:

$$(-)^{q-1}\frac{T_{2q-1}}{q}=$$

$$=\sum_{1}^{q-1}{}_n(-)^n\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6..(2n+2)}2^{2(q-n)}\sum_{0}^{n-1}{}_r(-)^r\binom{2n}{r}(n-r)^{2q-2}\;..(6)$$

$$=\sum_{1}^{q-1}{}_n(-)^n\frac{(1.3.5...(2n-1))^2}{2n+2}2^{2q-2n-1}\,Q'_{2n.2q-2}\;...(6')$$

En de derde regel tot de dubbele formule:

$$(-)^{q-1}\frac{2^{2q-2}}{q}T_{2q-1}=\sum_{1}^{q-1}{}_n(-)^n\frac{n+1}{2^{n-1}}\sum_{0}^{n-1}{}_r(-)^r\binom{2n}{r}(n-r)^{2q-2}.\;.(7)$$

$$=\sum_{1}^{q-1}{}_n(-)^n\frac{(n+1)(2n)!}{2^n}Q'_{2n.2q-2}\;.\;.\;(7')$$

Eenigzins meer zamengestelde formulen verkrijgt men door van het tweede differentiaalquotient van $tg\,x$ uit te gaan, hetgeen hier doelmatig onder den dubbelen vorm

$$\frac{d^2 tgx}{dx^2}=\frac{2sinx}{cos^3 x}=\begin{cases} 2sinx(1-sin^2x)^{-\frac{3}{2}}=2\sum_0^{\infty}{}_n\frac{1.3.5...(2n+1)}{2.4.6.....(2n)}sin^{2n+1}x \\ 2^2\frac{(1-cos2x)^2}{sin^3 2x}=2^2\frac{2-sin^2 2x-2(1-sin^2 2x)^{\frac{1}{2}}}{sin^3 2x}= \\ =2^3\sum_0^{\infty}{}_n\frac{1.3.5...(2n+1)}{2.4.6...(2n+4)}sin^{2n+1}2x \end{cases}$$

kan geschieden, zoodat in beide deze gevallen de eerste formule (β) en de formule (β') voor de oneven sinusmagten weder aan de orde zijn. Men heeft nu, dezelfde handelwijze als tot nog toe volgende, déze bewerkingen: de twee evengenoemde formulen, na vervanging van n door $2n+1$ en in het tweede geval bovendien van x door $2x$, te substitueren; op te merken dat, al begint, evenals in de te vinden uitkomsten, in het in

$$\sum_0^{\infty}{}_q\frac{2^2(2q-1)(2q-2)\,T_{2q-1}}{(2q)!}(2x)^{2q-3}$$

overgaande eerste lid de feitelijke toepassing eerst bij $q=2$, het niet eens noodig is voor de ondergrens aldaar 2 in plaats van 0 te schrijven, wijl voor $q=0$ de factor T_{-1} en voor $q=1$ de factor $2q-2$ toch van zelf gelijk nul worden; voorts ten behoeve der gelijkstelling van de coëfficiënten van x^{2q-3} of van $(2x)^{2q-3}$ thans $s=q-n-2$ te nemen; eindelijk met $(-)^{q-1}(2q-3)!$ te vermenigvuldigen en voor n de thans geoorloofde verlaging der bovengrens van ∞ tot $q-2$ toe te passen. De uitkomsten zijn: in het eerste geval het stel

$$(-)^{q-1}\frac{2^{2q-2}}{q}T_{2q-1}=\sum_0^{q-2}{}_n\Big\{(-)^{n-1}\frac{1.3.5...(2n+1)}{2.4.6.....(2n)}\cdot\frac{1}{2^{2n-1}}$$

$$\sum_0^{n}{}_r(-)^r\binom{2n+1}{r}(2n-2r+1)^{2q-3}\Big\}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(8)$$

$$=2\sum_0^{q-2}{}_n(-)^{n-1}(1.3.5...(2n+1))^2\,Q_{2n+1\,.\,2q-3},\;.\;.\;(8')$$

en in het tweede geval het stel

$$(-)^{q-1}\frac{T_{2q-1}}{q}=\sum_{0}^{q-2}{}_n\Big\{(-)^{n-1}\frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots(2n+4)}\cdot\frac{1}{2^{2n-2}}$$

$$\sum_{0}^{n}{}_r(-)^r\binom{2n+1}{r}(2n-2r+1)^{2q-3}\Big\}\ldots\ldots\ldots\ (9)$$

$$=2^2\sum_{0}^{q-2}{}_n(-)^{n-1}\frac{(1.3.5\ldots(2n+1))^2}{(2n+2)(2n+4)}Q_{2n+1.2q-3}\ldots\ (9')$$

Wilde men in denzelfden trant met de hoogere differentiaalquotienten van $tg\,x$ voortgaan, dan zou men als volgt, om daarvoor de ontwikkelingen volgens de magten van $sin\,x$ te verkrijgen, weder geschikt van herleidingsformulen gebruik kunnen maken, die bovendien nagenoeg onveranderd voor de ontwikkeling volgens $sin\,2\,x$, en voor oneven differentiaalquotienten ook nog voor die volgens $sin\,\frac{x}{2}$ zouden kunnen dienen. Stel dat in het algemeen voor zekere p reeds gevonden is

$$\frac{d^p\,tg\,x}{d\,x^p}=\sum_{0}^{\infty}{}_n N_{p.n}\,sin^{2n+\alpha}\,x\,,$$

waarin de coëfficiënt $N_{p.n}$ dus eene bekende functie van den rangwijzer n is, terwijl voor oneven p steeds $\alpha=0$ en voor even p steeds $\alpha=1$ zal blijken te zijn, dan komt door tweemaal te differentiëren: $\frac{d^{p+2}\,tg\,x}{d\,x^{p+2}}$, dat is

$$\sum_{0}^{\infty}{}_n N_{p+2.n}\,sin^{2n+\alpha}\,x=\frac{d\sum_{0}^{\infty}{}_n(2n+\alpha)\,N_{p.n}\,sin^{2n+\alpha-1}\,x\cos x}{dx}=$$

$$=\sum_{0}^{\infty}{}_n(2n+\alpha)N_{p.n}\{(2n+\alpha-1)sin^{2n+\alpha-2}x(1-sin^2x)-sin^{2n+\alpha}x\}=$$

$$=\sum_{0}^{\infty}{}_n(2n+\alpha-1)(2n+\alpha)\,N_{p.n}\,sin^{2n+\alpha-2}\,x\,-$$

$$-\sum_{0}^{\infty}{}_n(2n+\alpha)^2\,N_{p.n}\,sin^{2n+\alpha}\,x\,,$$

en dus door, in den eersten term van het laatste lid n vervangende door $n+1$, de coëfficiënten van $sin^{2n+\alpha} x$ in de beide uiterste leden gelijk te stellen:

$$N_{p+2.n} = (2n+\alpha+1)(2n+\alpha+2) N_{p.n+1} - (2n+\alpha)^2 N_{p\,n}.$$

Of afzonderlijk: voor oneven p, bij vervanging door $2p+1$,

$$N_{2p+3.n} = (2n+1)(2n+2) N_{2p+1.n+1} - (2n)^2 N_{2p+1.n};$$

en voor even p, bij vervanging door $2p$,

$$N_{2p+2.n} = (2n+2)(2n+3) N_{2p.n+1} - (2n+1)^2 N_{2p.n},$$

terwijl men in dit laatste geval nog doelmatig volgens

$$N_{2p.n} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots(2n)} N'_{2p.n}$$

eenvoudiger functiën N' kan invoeren, waarvoor dan

$$N'_{2p+2.n} = (2n+1)\left\{(2n+3) N'_{2p.n+1} - (2n+1) N'_{2p.n}\right\}$$

wordt. Men heeft alzoo in het algemeen de twee typen

$$\frac{d^{2p+1}\, tg\, x}{dx^{2p+1}} = \sum_0^\infty{}_n\, N_{2p+1.n}\, sin^{2n} x$$

en

$$\frac{d^{2p}\, tg\, x}{dx^{2p}} = \sum_0^\infty{}_n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots(2n)} N'_{2p.n}\, sin^{2n+1} x,$$

en verkrijgt hiervoor, uitgaande voor $p=0$ van de boven voor $tg\, x$ zelf en voor $\dfrac{d\, tg\, x}{dx}$ opgemaakte ontwikkelingen volgens $sin\, x$, dat is van $N'_{0.n} = 1$ voor de tweede en van $N_{1.n} = 1$ voor de eerste type, en verder beurtelings de evengevonden herleidingsformulen voor de functiën $N'_{2p+2.n}$ en $N_{2p+3.n}$ toepassende:

$N'_{2.n} = 2(2n+1)$ (in overeenstemming naar behooren met de boven reeds regtstreeks voor $\dfrac{d^2\, tg\, x}{dx^2}$ berekende waarde),

$$N_{3.n} = 2(3n+1), \quad N'_{4.n} = 16(2n+1)(n+1),$$
$$N_{5.n} = 4(15n^2+15n+4), \quad N'_{6.n} = 16(2n+1)(12n^2+28n+17),$$
$$N_{7.n} = 8(105n^3+210n^2+147n+34), \text{ enz.}$$

Deze functiën blijken dus al spoedig zamengesteld te worden en ieder voor zich geene in het oog loopende wet te volgen; en juist daardoor zou het voordeel, dat bij aanwending der klimmende differentiaalquotienten van $tg\,x$ de komende formulen voor den algemeenen tangenten-coëfficiënt steeds uit minder termen in n zouden bestaan en bovendien in ieder dezer termen steeds lager magten zouden bevatten, meer dan te niet gedaan worden. Wij gaan dan ook op dezen weg niet verder voort, behoudens alleen de vermelding dat uit het betrekkelijk nog eenvoudige derde quotient, namelijk

$$\frac{d^3\,tg\,x}{d\,x^3} = \sum_0^\infty{}_n N_{3.n}\, sin^{2n}\, x = 2\sum_0^\infty{}_n (3n+1)\, sin^{2n}\, x,$$

wanneer men daarop dezelfde handelwijze als voor de vorigen toepast, te voorschijn komt het stel formulen (waarvan de toepassing nu echter eerst met $q=3$ begint):

$$(-)^{q-1}\frac{T_{2q-1}}{q} = \sum_1^{q-2}{}_n (-)^{n-1}\frac{3n+1}{2^{2n}}\sum_0^{n-1}{}_r (-)^r \binom{2n}{r}(n-r)^{2q-4} \ldots (10)$$

$$= \sum_1^{q-2}{}_n (-)^{n-1}\frac{(3n+1)(2n)!}{2^{2n+1}}\, Q'_{2n.2q-4} \ldots (10')$$

Zooals zich na het vorenstaande wel verwachten laat, bestaan de uit integratie in plaats van differentiatie af te leiden formulen weder uit meer termen in n. Ook ten deze zullen wij ons bekorten, en alleen de dubbele uitgangsformule:

$$\int tgx dx = -Nep.log.cosx = \begin{cases} -\frac{1}{2}Nep.log.(1-sin^2x) = \frac{1}{2}\sum_1^\infty{}_n \frac{sin^{2n}x}{n} \\ -Nep.log.\left(1-2sin^2\frac{x}{2}\right) = \sum_1^\infty{}_n \frac{2^n}{n} sin^{2n}\frac{x}{2} \end{cases}$$

en het daaruit voortkomende dubbele stel:

$$(-)^{q-1}\frac{T_{2q-1}}{q}=\sum_{1}^{q}{}_{n}(-)^{n-1}\frac{1}{n.2^{2n-2}}\sum_{0}^{n-1}{}_{r}(-)^{r}\binom{2n}{r}(n-r)^{2q}\text{..}(11)$$

$$=\sum_{1}^{q}{}_{n}(-)^{n-1}\frac{(2n)!}{n.2^{2n-1}}Q'_{2n.2q}\;\ldots\ldots\ldots\;(11')$$

en

$$(-)^{q-1}\frac{2^{2q-2}}{q}T_{2q-1}=\sum_{1}^{q}{}_{n}(-)^{n-1}\frac{1}{n.2^{n-1}}\sum_{0}^{n-1}{}_{r}(-)^{r}\binom{2n}{r}(n-r)^{2q}\text{..}(12)$$

$$=\sum_{1}^{q}{}_{n}(-)^{n-1}\frac{(2n)!}{n\,.\,2^{n}}Q'_{2n.2q}\;\ldots\ldots\;(12')$$

neêrschrijven.

Om door een bepaald voorbeeld de meerdere of mindere eenvoudigheid van alle voor de tangenten-coëfficiënten verkregen formulen duidelijk in het oog te doen vallen, plaatsen wij ten besluite van deze afdeeling de voluit geschreven vormen bijeen die zij ieder voor zich voor $q=4$, dat is voor den vierden coëfficiënt T_7, opleveren. Men verkrijgt daarvoor opvolgend:

door de formule van Laplace:

$$-\frac{2^6}{4}T_7=2\left\{1-\left(2^7-\binom{8}{1}\right)+\left(3^7-\binom{8}{1}2^7+\binom{8}{2}\right)\right\}-$$
$$-\left(4^7-\binom{8}{1}3^7+\binom{8}{2}2^7-\binom{8}{3}\right)\;\ldots\ldots\;(1)$$

en verder:

$$\left.\begin{array}{l}-\frac{2^6}{4}T_7=2^6-2^5\left(2^7-\binom{2}{1}\right)+2^4\left(3^7-\binom{3}{1}2^7+\right.\\ \left.+\binom{3}{2}\right)-2^3\left(4^7-\binom{4}{1}3^7+\binom{4}{2}2^7-\binom{4}{3}\right)+2^2\left(5^7-\binom{5}{1}4^7+\right.\\ \left.+\binom{5}{2}3^7-\binom{5}{3}2^7+\binom{5}{4}\right)-2\left(6^7-\binom{6}{1}5^7+\binom{6}{2}4^7-\binom{6}{3}3^7+\right.\end{array}\right\}\text{..}(2)$$

$$+\binom{6}{4}2^7-\binom{6}{5}\Big)\Big)+\Big(7^7-\binom{7}{1}6^7+\binom{7}{2}5^7-\binom{7}{3}4^7+$$

$$+\binom{7}{4}3^7-\binom{7}{5}2^7+\binom{7}{6}\Big)\Big)=$$

$$=2^6.1-2^5.2\,(2^6-1)+2^4.3\left(3^6-\binom{2}{1}2^6+1\right)-$$

$$-2^3.4\left(4^6-\binom{3}{1}3^6+\binom{3}{2}2^6-1\right)+2^2.5\Big(5^6-\binom{4}{1}4^6+$$

$$+\binom{4}{2}3^6-\binom{4}{3}2^6+1\Big)-2.6\Big(6^6-\binom{5}{1}5^6+\binom{5}{2}4^6-\binom{5}{3}3^6+$$

$$+\binom{5}{4}2^6-1\Big)+1.7\Big(7^6-\binom{6}{1}6^6+\binom{6}{2}5^6-\binom{6}{3}4^6+$$

$$+\binom{6}{4}3^6-\binom{6}{5}2^6+1\Big)\Bigg\}\ldots($$

$$=2^6.\,1\,!\,\mathbf{1}-2^5.2\,!\,\mathbf{63}+2^4.3\,!\,\mathbf{301}-2^3.4\,!\,\mathbf{350}+$$
$$+\,2^2.5\,!\,\mathbf{140}-2.6\,!\,\mathbf{21}+1.7\,!\,\mathbf{1}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(2')$$

$$-\frac{2^6}{4}T_7=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{3^7-\binom{3}{1}}{2^2}+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{5^7-\binom{5}{1}3^7+\binom{5}{2}}{2^4}-$$

$$-\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\;\,4\,.\,6}\cdot\frac{7^7-\binom{7}{1}5^7+\binom{7}{2}3^7-\binom{7}{3}}{2^6}\;\ldots\;(3)$$

$$=\mathbf{1.1}-1^2.3.\mathbf{91}+(1.3)^2.5\,.\,\mathbf{35}-(1.3.5)^2.7.\mathbf{1}\,..\,(3')$$

$$-\frac{T_7}{4}=\frac{1}{2}\,.\,2-\frac{1}{2.4}\cdot\frac{3^7-\binom{3}{1}}{2}+\frac{1.3}{2.4.6}\cdot\frac{5^7-\binom{5}{1}3^7+\binom{5}{2}}{2^3}-$$

$$-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}\cdot\frac{7^7-\binom{7}{1}5^7+\binom{7}{2}3^7-\binom{7}{3}}{2^5}\;\ldots\;(4)$$

$$=\mathbf{1.1}-\frac{1^2.3}{2}\,.\,\mathbf{91}+\frac{(1.3)^2.5}{3}\,.\,\mathbf{35}-\frac{(1.3.5)^2.7}{4}.\mathbf{1}\,..\,(4')$$

$$-\frac{T_7}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{2^6 - \binom{4}{1}}{2^3} - \frac{3^6 - \binom{6}{1}2^6 + \binom{6}{2}}{2^5} \quad \ldots (5)$$

$$= -\frac{2!}{2^2}.\mathbf{1} + \frac{4!}{2^4}.\mathbf{5} - \frac{6!}{2^6}.\mathbf{1} \quad \ldots (5')$$

$$-\frac{T_7}{4} = -\frac{1}{2.4}2^6 + \frac{1.3}{2.4.6}2^4\left(2^6 - \binom{4}{1}\right) -$$
$$-\frac{1.3.5}{2.4\,6.8}2^2\left(3^6 - \binom{6}{1}2^6 + \binom{6}{2}\right) \quad \ldots (6)$$

$$= -\frac{1^2}{4}2^5.\mathbf{1} + \frac{(1.3)^2}{6}2^3.\mathbf{5} - \frac{(1.3.5)^2}{8}2.\mathbf{1} \quad \ldots (6')$$

$$-\frac{2^6}{4}T_7 = -2 + 3.\frac{2^6 - \binom{4}{1}}{2} - 4.\frac{3^6 - \binom{6}{1}2^6 + \binom{6}{2}}{2^2} \quad \ldots (7)$$

$$= -\frac{2.2!}{2}.\mathbf{1} + \frac{3.4!}{2^2}.\mathbf{5} - \frac{4.6!}{2^3}.\mathbf{1} \quad \ldots (7')$$

$$-\frac{2^6}{4}T_7 = -2 + \frac{1.3}{2}.\frac{3^5 - \binom{3}{1}}{2} - \frac{1.3.5}{2.4}.\frac{5^5 - \binom{5}{1}3^5 + \binom{5}{2}}{2^3} \quad \ldots (8)$$

$$= 2\{-1^2.\mathbf{1} + (1.3)^2.\mathbf{10} - (1.3.5)^2.\mathbf{1}\} \quad \ldots (8')$$

$$-\frac{T_7}{4} = -\frac{1}{2.4}2^2 + \frac{1.3}{2.4.6}\left(3^5 - \binom{3}{1}\right) -$$
$$-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}.\frac{5^5 - \binom{5}{1}3^5 + \binom{5}{2}}{2^2} \quad \ldots (9)$$

$$= 2^2\left\{-\frac{1^2}{2.4}.\mathbf{1} + \frac{(1.3)^2}{4.6}.\mathbf{10} - \frac{(1.3.5)^2}{6.8}.\mathbf{1}\right\} \quad \ldots (9')$$

$$-\frac{T_7}{4} = \frac{4}{2^2} - 7 \cdot \frac{2^4 - \binom{4}{1}}{2^4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

$$= \frac{4 \cdot 2!}{2^3} \cdot \mathbf{1} - \frac{7 \cdot 4!}{2^5} \cdot \mathbf{1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10')$$

$$-\frac{T_7}{4} = \frac{1}{1} - \frac{2^8 - \binom{4}{1}}{2.2^2} + \frac{3^8 - \binom{6}{1}2^8 + \binom{6}{2}}{3.2^4} -$$

$$- \frac{4^8 - \binom{8}{1}3^8 + \binom{8}{2}2^8 - \binom{8}{3}}{4.2^6} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

$$= \frac{2!}{1 \cdot 2} \cdot \mathbf{1} - \frac{4!}{2 \cdot 2^3} \cdot \mathbf{21} + \frac{6!}{3 \cdot 2^5} \cdot \mathbf{14} - \frac{8!}{4 \cdot 2^7} \cdot \mathbf{1} \ldots (11')$$

$$-\frac{2^6}{4} T_7 = \frac{1}{1} - \frac{2^8 - \binom{4}{1}}{2.2} + \frac{3^8 - \binom{6}{1}2^8 + \binom{6}{2}}{3.2^2} -$$

$$- \frac{4^8 - \binom{8}{1}3^8 + \binom{8}{2}2^8 - \binom{8}{3}}{4.2^3} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

$$= \frac{2!}{1 \cdot 2} \cdot \mathbf{1} - \frac{4!}{2 \cdot 2^2} \cdot \mathbf{21} + \frac{6!}{3 \cdot 2^3} \cdot \mathbf{14} - \frac{8!}{4 \cdot 2^4} \cdot \mathbf{1} \ldots (12')$$

Terwijl alle formulen van dit overzigt — waarin de zooals gezegd telkens gezamenlijke aan eene zelfde kolom van onze tweede of derde of vierde tabel ontleende coëfficiënten P of Q of Q' ter onderscheiding vetter gedrukt zijn — werkelijk in de gemeenschappelijke uitkomst $T_7 = 17$ zamenvallen, ziet men hoezeer de dubbele formule (10) (10') het van alle overigen wint én in minder aantal termen of coëfficiënten Q' én in lagere in die termen voorkomende magten. Toch neemt dit niet weg dat, wanneer de bedoeling is eenige opvolgende tangenten-coëfficiënten, te begin-

nen met den eersten, feitelijk uit te rekenen, dit wel in den regel eenvoudiger dan door de hier behandelde zelfstandige formulen zal gelukken bij voorbeeld door periodieke terugloopende formulen zooals ik in mijne vroegere bijdrage ontwikkelde. Steunende op blz. 125 van die bijdrage haal ik daarvan als enkele beknopte voorbeelden voor de periode 3 aan (wat dit betreft in Bernoulliaanschen in plaats van in tangenten-vorm):

$$\binom{15}{0} B_{-1} - \binom{15}{6} B_5 + \binom{15}{12} B_{11} = -\frac{15}{3},$$
$$\binom{17}{2} B_1 - \binom{17}{8} B_7 + \binom{17}{14} B_{13} = \frac{17}{3},$$
$$\binom{19}{4} B_3 - \binom{19}{10} B_9 + \binom{19}{16} B_{15} = \frac{1}{2} \cdot \frac{19}{3},$$

die dus opvolgend kunnen dienen om, nadat langs denzelfden weg eerst B_{-1} of B_1 of B_3, en daarna B_5 of B_7 of B_9 berekend zijn, thans ook B_{11} of B_{13} of B_{15} te bepalen.

Op blz. 113—116 van mijne vroegere bijdrage gaf ik ook eene afleiding van de beide door M. A. Stern gevonden afgebroken terugloopende betrekkingen tusschen de Bernoulliaansche coëfficiënten. Thans ga ik hier evenzeer dergelijke afgebroken — dat wil zeggen, niet over alle, maar slechts over eenige onmiddellijk voorafgaande coëfficiënten terugloopende — betrekkingen, ofschoon van eenigzins anderen vorm, ontwikkelen; deze zullen dan ook blijken, eenvoudiger weder dan in de Bernoulliaansche, in de tangenten-coëfficiënten te worden uitgedrukt, of liever nog in andere coëfficiënten die met deze laatsten onmiddellijk zamenhangen. Als uitgangspunt van berekening zal hiertoe eene formule voor eene willekeurige magt van $tg\frac{x}{2}$ in func-

tie van de differentiaalquotienten dezer tangens worden opgemaakt.

Stellende kortheidshalve $t = tg\,\frac{x}{2}$, heeft men voor de eerste differentiaalquotienten, uitgedrukt in t zelf,

$$\frac{d\,t}{d\,x} = \frac{1}{2\,cos^2\frac{x}{2}} = \frac{t^2+1}{2},$$

dus

$$\frac{d^2\,t}{d\,x^2} = t\,\frac{d\,t}{d\,x} = \frac{t^3+t}{2},\ \frac{d^3\,t}{d\,x^3} = \frac{3\,t^2+1}{2}\,\frac{d\,t}{d\,x} = \frac{3\,t^4+4\,t^2+1}{4},$$

enz., waaruit bij omkeering volgt

$$0\,!\,t = t,\ 1\,!\,t^2 = 2\,\frac{d\,t}{d\,x} - 1,\ 2\,!\,t^3 = 2\left(2\,\frac{d^2\,t}{d\,x^2} - t\right),$$

$$3\,!\,t^4 = 2\left(4\,\frac{d^3\,t}{d\,x^3} - 8\,\frac{d\,t}{d\,x} + 3\right),\ \text{enz.};$$

en het blijkt al spoedig dat men wel geregtigd is in het algemeen de beide vormen

$$(p-1)!\,t^p = \left\{\begin{array}{l} \text{(voor oneven } p\text{)} \\ \sum\limits_{0}^{\frac{p-1}{2}}{}_r\,(-)^r\,A_{p.2\,r}\,\dfrac{d^{p-2r-1}\,t}{d\,x^{p-2r-1}}, \\ \text{(voor even } p\text{)} \\ \sum\limits_{0}^{\frac{p}{2}-1}{}_r\,(-)^r\,A_{p.2\,r}\,\dfrac{d^{p-2r-1}\,t}{d\,x^{p-2r-1}} + (-)^{\frac{p}{2}}\,A_{p.p} \end{array}\right\}\ldots(\gamma)$$

op te stellen, die men voor de nu volgende terugloopende bepaling der coëfficiënten A zelfs zonder bezwaar onder den eersten vorm kan zamenvatten, mits dan voor even p de bovengrens aldaar door $\frac{p}{2}$ vervangende en er bovendien

op bedacht blijvende dat in dat geval in den laatsten, door $r=\frac{p}{2}$ bepaalden, term, in plaats van $\frac{d^{p-2r-1}t}{dx^{p-2r-1}}$, wat zou worden $\frac{d^{-1}t}{dx^{-1}}$, dat is $\int t\,dx$, als uitzondering op den regel moet gelezen worden de eenheid. Onder dien gemeenschappelijken eersten vorm dan komt door het dubbel van het differentiaalquotient naar x te nemen:

$$p!\,t^{p-1}(t^2+1),$$

dat is

$$p!\,t^{p+1}+(p-1)p\left\{(p-2)!\,t^{p-1}\right\},$$

dat is

$$\sum_0^{\frac{p+1}{2}\text{ of }\frac{p}{2}}{}_r(-)^r A_{p+1.2r}\frac{d^{p-2r}t}{dx^{p-2r}}+(p-1)p\sum_0^{\frac{p-1}{2}\text{ of }\frac{p}{2}-1}{}_r(-)^r A_{p-1.2r}\frac{d^{p-2r-2}t}{dx^{p-2r-2}}=$$

$$=2\sum_0^{\frac{p-1}{2}\text{ of }\frac{p}{2}}{}_r(-)^r A_{p.2r}\frac{d^{p-2r}t}{dx^{p-2r}},$$

waaruit men, na in den tweeden term van het eerste lid den veranderlijken aanwijzer r vervangen te hebben door $r-1$ en dus dien term zelf door

$$-(p-1)p\sum_1^{\frac{p+1}{2}\text{ of }\frac{p}{2}}{}_r(-)^r A_{p-1.2r-2}\frac{d^{p-2r}t}{dx^{p-2r}},$$

vindt, door alsdan de coëfficiënten van $\frac{d^{p-2r}t}{dx^{p-2r}}$ in beide leden gelijk te stellen, de algemeene herleidingsformule

$$A_{p+1.2r}=2A_{p.2r}+(p-1)p\,A_{p-1.2r-2}$$

voor de coëfficiënten A. Echter valt — de evengezegde vervanging van den tweeden term in het oog blijvende houden — bij het toepassen van deze formule het volgende

wel op te merken: 1°. (zoowel voor oneven als voor even p) Voor $r = 0$ geldt, wegens het ontbreken van dezen term in den nieuwen tweeden term, $A_{p+1.0} = 2\, A_{p.0}$. 2°. (voor oneven p) Voor $r = 1$ tot en met $\frac{p-1}{2}$ geldt de algemeene formule; voor $r = \frac{p+1}{2}$ geldt, wegens het ontbreken van dezen term in het tweede lid, $A_{p+1.p+1} = (p-1)\, p\, A_{p-1.p-1}$. 3°. (voor even p) Voor $r = 1$ tot en met $\frac{p}{2} - 1$ geldt de algemeene formule; voor $r = \frac{p}{2}$ zou zij eveneens schijnen te gelden, maar juist dan moet de bijbehoorende term in het tweede lid, dat is het dubbel van het differentiaalquotient van den laatsten term in (γ), die volgens het evengezegde niet is $(-)^{\frac{p}{2}} A_{p.p} \frac{d^{-1}\, t}{d\, x^{-1}}$, maar alleen de standvastige $(-)^{\frac{p}{2}} A_{p.p}$, door nul vervangen worden, zoodat nu als uitzonderingsformule geldt $A_{p+1.p} = (p-1)\, p\, A_{p-1.p-2}$. Dit een en ander strekt tot grondslag van de volgende

Tabel der coëfficiënten $A_{p.2r}$ van $(-)^r \frac{d^{p-2r-1}\, t}{d\, x^{p-2r-1}}$ in $(p-1)!\, t^p$.

$p = 1$	(2; 1.2) {1}
$p = 2$	(2; 2.3) {2, (1)}
$p = 3$	(2; 3.4) {2 (2, 1)}
$p = 4$	(2; 4.5) {2 (4, 8, (3))}
$p = 5$	(2; 5.6) {8 (2, 10, 3)}
$p = 6$	(2; 6.7) {8 (4, 40, 46, (15))}
$p = 7$	(2; 7.8) {16 (4, 70, 196, 45)}
$p = 8$	(2; 8.9) {16 (8, 224, 1232, 1056, (315))}
$p = 9$	(2; 9.10) {128 (2, 84, 798, 1636, 315)}
enz.	

waarin namelijk telkens de tusschen { } geplaatste coëffi-

ciëntenrij voor $(p-1)!\,t^p$ — zijnde de met $p=3$ te beginnen gemeenschappelijke factor 2, 2, 8, 8, 16, 16, 128, enz. dezer rij telkens daarbinnen op den voorgrond gebragt — gevonden is door de overeenkomstige coëfficiëntenrij voor $(p-2)!\,t^{p-1}$ op den voorgaanden regel (met weglating evenwel, telkens als p oneven is, van den laatsten coëfficiënt daarvan, die om die reden tusschen ( ) geplaatst is) te vermenigvuldigen met den eersten der beide vóór dien regel bijgeschreven factoren, namelijk 2, en de overeenkomstige coëfficiëntenrij voor $(p-3)!\,t^{p-2}$ op den laatstvoorgaanden regel (steeds zonder uitzondering in haar geheel) met den tweeden der beide factoren vóór dien regel, namelijk $(p\text{-}2)\,(p\text{-}1)$, en door dan deze laatste uitkomst, ééne plaats naar regts verspringende, op te tellen bij de eerste. Zoo heeft men bij voorbeeld voor $p=6$ de coëfficiëntenrij in

$$5\,!\,t^6 = 8\left(4\,\frac{d^5\,t}{d\,x^5} - 40\,\frac{d^3\,t}{d\,x^3} + 46\,\frac{d\,t}{d\,x} - 15\right)$$

door

$$\{8\,(4, 40, 46, 15)\} = 2\,\{8\,(2, 10, 3)\} + 4.5\,\{2\,(0, 4, 8, 3)\}$$

te nemen, zijnde hier in den laatsten term de nul voorgevoegd ter aanduiding van de evenbedoelde verspringing; daarentegen voor $p=7$ de coëfficiëntenrij in

$$6\,!\,t^7 = 16\left(4\,\frac{d^6\,t}{d\,x^6} - 70\,\frac{d^4\,t}{d\,x^4} + 196\,\frac{d^2\,t}{d\,x^2} - 45\,t\right)$$

door

$$\{16\,(4,\ 70,\ 196,\ 45)\} = 2\,\{8\,(4,\ 40,\ 46,\ \not{15})\} +$$
$$+\,5.6\,\{8\,(0,\ 2,\ 10,\ 3)\}$$

te nemen, alwaar nu de niet in rekening mogende komen coëfficiënt 15 is doorgestreept, terwijl in den laatsten term weder als zoo even eene nul is voorgevoegd.

Hiermede de voorgenomen ontwikkeling zelve van $(p-1)!\,t^p$ volgens (γ) genoegzaam toegelicht achtende, maken wij

daarvan voor ons doel nu verder als volgt gebruik. Wij voeren in plaats van de tangenten-coëfficiënten T liever andere coëfficiënten T' in, daarmede telkens op de eenvoudige wijze $T'_{2q-1} = \frac{T_{2q-1}}{2q}$ zamenhangende; daardoor laat zich schrijven

$$t = tg\,\frac{x}{2} = \sum_0^\infty {}_q\, \frac{T_{2q-1}}{(2q)!}\, x^{2q-1} = \sum_1^\infty {}_q\, \frac{T'_{2q-1}}{(2q-1)!}\, x^{2q-1},$$

waarin namelijk tegelijkertijd de vooropstaande, door $q=0$ bepaalde, term, die toch op zich zelf gelijk nul is, is weggelaten. Hieruit volgt in het algemeen

$$\frac{d^{p-2r-1}\, t}{d\, x^{p-2r-1}} = \sum^\infty {}_q\, \frac{T'_{2q-1}}{(2q-p+2r)!}\, x^{2q-p+2r},$$

waarin telkens de ondergrens voor q bepaald wordt doordien dit differentiaalquotient blijkbaar geene negatieve magten van x kan bevatten, zoodat

$$2q - p + 2r \geqq 0 = \begin{Bmatrix} \text{(voor oneven } p\text{)}\ 2s+1 \\ \text{(voor even } p\text{)}\ 2s \end{Bmatrix}$$

moet zijn en men alzoo ook kan schrijven

$$\frac{d^{p-2r-1}\, t}{d\, x^{p-2r-1}} = \begin{Bmatrix} \text{(voor oneven } p\text{)} \displaystyle\sum_0^\infty {}_s\, \frac{T'_{p-2r+2s}}{(2s+1)!}\, x^{2s+1} \\ \text{(voor even } p\text{)} \displaystyle\sum_0^\infty {}_s\, \frac{T'_{p-2r+2s-1}}{(2s)!}\, x^{2s} \end{Bmatrix}.$$

Deze waarden substituerende in het tweede lid van (γ), en tevens het eerste lid regtstreeks ontwikkelende in x volgens

$$(p-1)!\left(tg\,\frac{x}{2}\right)^p = (p-1)!\left(\frac{x}{2} + \frac{x^3}{24} + \text{enz.}\right)^p =$$

$$= (p-1)!\left(\frac{x^p}{2^p} + p\,\frac{x^{p-1}}{2^{p-1}}\cdot\frac{x^3}{24} + \text{enz.}\right),$$

(waarin wij de meer zamengestelde hoogere termen niet verder uitwerken), verkrijgen wij:

$$\ldots\frac{(p-1)!}{2^p}x^p + \frac{p!}{3.2^{p+2}}x^{p+2} + \text{enz.} = \begin{cases} (\text{voor oneven } p) \displaystyle\sum_0^{\frac{p-1}{2}}{}_r \Big\{ (-)^r A_{p.2r} \sum_0^{\infty}{}_s \frac{T'_{p-2r+2s}}{(2s+1)!} x^{2s+1} \Big\}, \\ (\text{voor even } p) \displaystyle\sum_0^{\frac{p}{2}-1}{}_r \Big\{ (-)^r A_{p.2r} \sum_0^{\infty}{}_s \frac{T'_{p-2r+2s-1}}{(2s)!} x^{2s} \Big\} + (-)^{\frac{p}{2}} A_{p.p}. \end{cases}$$

En stelt men nu in het tweede lid de coëfficiënten van alle, in het eerste lid ontbrekende, lagere magten dan x^p gelijk nul, en de coëfficiënten van x^p zelf, van x^{p+2}, enz., gelijk aan die in het eerste lid, dan heeft men de afgebroken terugloopende betrekkingen, die wij ons voorstelden tusschen de coëfficiënten T' op te maken, namelijk vooreerst:

$$(\text{voor oneven } p) \sum_0^{\frac{p-1}{2}}{}_r (-)^r A_{p.2r}\; T'_{p-2r+2s} = 0 \left(\text{voor } s = 0 \text{ tot } \tfrac{p-3}{2}\right),$$

$$(\text{voor even } p) \sum_0^{\frac{p}{2}-1}{}_r (-)^r A_{p.2r}\; T'_{p-2r-1} + (-)^{\frac{p}{2}} A_{p.p} = 0$$

$$\text{en} \sum_0^{\frac{p}{2}-1}{}_r (-)^r A_{p.2r}\; T'_{p-2r+2s-1} = 0 \left(\text{voor } s = 1 \text{ tot } \tfrac{p}{2}-1\right),$$

en verder:

(voor oneven en voor even p)

$$\sum_{0}^{\frac{p-1}{2} \text{ of } \frac{p}{2}-1} {}^{r} (-)^r A_{p.2r} T'_{2p-2r-1} = \frac{(p-1)!\,p!}{2^p},$$

$$\sum_{0}^{\frac{p-1}{2} \text{ of } \frac{p}{2}-1} {}^{r} (-)^r A_{p.2r} T'_{2p-2r+1} = \frac{p!\,(p+2)!}{3.2^{p+2}}$$

enz.

Bij voorbeeld voor $p = 6$ geldt het stelsel:

$$\begin{aligned}
4\,T'_5 - 40\,T'_3 + 46\,T'_1 - 15 &= 0 \\
4\,T'_7 - 40\,T'_5 + 46\,T'_3 &= 0 \\
4\,T'_9 - 40\,T'_7 + 46\,T'_5 &= 0 \\
8\,(4\,T'_{11} - 40\,T'_9 + 46\,T'_7) &= \frac{5!\,6!}{2^6} \\
8\,(4\,T'_{13} - 40\,T'_{11} + 46\,T'_9) &= \frac{6!\,8!}{3.2^8}
\end{aligned}$$

enz.

En voor $p = 7$ het stelsel:

$$\begin{aligned}
4\,T'_7 - 70\,T'_5 + 196\,T'_3 - 45\,T'_1 &= 0 \\
4\,T'_9 - 70\,T'_7 + 196\,T'_5 - 45\,T'_3 &= 0 \\
4\,T'_{11} - 70\,T'_9 + 196\,T'_7 - 45\,T'_5 &= 0 \\
16\,(4\,T'_{13} - 70\,T'_{11} + 196\,T'_9 - 45\,T'_7) &= \frac{6!\,7!}{2^7} \\
16\,(4\,T'_{15} - 70\,T'_{13} + 196\,T'_{11} - 45\,T'_9) &= \frac{7!\,9!}{3.2^9}
\end{aligned}$$

enz.

Deze afgebroken betrekkingen onderscheiden zich in hoofdzaak hierin van die volgens STERN, dat telkens dezelfde getallencoëfficiënten A — voor $p = 6$ namelijk 8 (4, 40, 46, (15)), voor $p = 7$ evenzeer 16 (4, 70, 196, 45), enz. — van toepassing blijven op de verschillende groepen van $\frac{p+1}{2}$ of $\frac{p}{2}$ opvolgende coëfficiënten T'. En daar bovendien het aantal $\frac{p-1}{2}$ of $\frac{p}{2}$ onderling onafhankelijke ver-

houdingen dezer getallencoëfficiënten telkens juist gelijk is aan het aantal van diegene der betrekkingen waarin zij voorkomen, wier tweede lid gelijk nul is, zijn dan ook deze hier regtstreeks opgemaakte getallencoëfficiënten A de eenige mogelijke die eene dergelijke gemeenschappelijke toepassing bij de verschillende groepen van opvolgende T' kunnen vinden. Bij STERN daarentegen treden in het algemeen bij iedere andere groep van opvolgende Bernoulliaansche coëfficiënten ook andere getallencoëfficiënten op. Hiertegenover staat echter, dat deze in den regel kleiner waarden hebben dan in ons geval de overeenkomstige getallencoëfficiënten A. Om dit te doen uitkomen brengen wij het volgende stelsel van meest eenvoudige afgebroken betrekkingen — ten minste indien men zich tot diegenen bepaalt die nul tot tweede lid hebben — ter berekening der opvolgende coëfficiënten T' uit elkander, namelijk:

$$2\,T'_1 - 1 = 0,$$
$$2\,T'_3 - T'_1 = 0,$$
$$4(T'_5 - 2\,T'_3) = 0,$$
$$2\,T'_7 - 10\,T'_5 + 3\,T'_3 = 0,$$
$$2(2\,T'_9 - 20\,T'_7 + 23\,T'_5) = 0,$$
$$4\,T'_{11} - 70\,T'_9 + 196\,T'_7 - 45\,T'_5 = 0,$$
$$8(T'_{13} - 28\,T'_{11} + 154\,T'_9 - 132\,T'_7) = 0,$$
$$2\,T'_{15} - 84\,T'_{13} + 798\,T'_{11} - 1636\,T'_9 + 315\,T'_7 = 0,$$

enz.,

in vergelijking met het overeenkomstige stelsel dat men uit de beide betrekkingen van STERN verkrijgt wanneer men deze toepast op het geval waarin zij ieder het geringste aantal termen bevatten. Dit geval is dát waarin men in die betrekkingen (zie mijne vroegere bijdrage, blz. 115 onder en 116 midden) neemt $k = q$, waardoor zij worden

$$\sum_1^q {}_r (-)^{r-1} \left\{ \binom{q+2}{2r} - \binom{q}{2r} \right\} B_{2q-2r+1} = \left\{ \begin{matrix} (\text{voor } q = 1) \ \frac{1}{2} \\ (\text{voor } q > 1) \ 0 \end{matrix} \right\}$$

en

$$\sum_1^q {}_r (-)^{r-1} \left\{ \binom{q+1}{2r-1} + \binom{q}{2r-1} \right\} B_{2q-2r+1} = \left\{ \begin{matrix} (\text{voor } q = 1) \ \frac{1}{2} \\ (\text{voor } q > 1) \ 0 \end{matrix} \right\}$$

en bijgevolg, omdat zoowel

$$\binom{q+2}{2r} - \binom{q}{2r} =$$

$$= \frac{q!}{(2r)!(q-2r+2)!} \{(q+1)(q+2) - ((q+1)-2r)((q+2)-2r)\} =$$

$$= (2q-2r+3) \frac{q!}{(2r-1)!(q-2r+2)!}$$

als ook

$$\binom{q+1}{2r-1} + \binom{q}{2r-1} =$$

$$= \frac{q!}{(2r-1)!(q-2r+2)!} \{(q+1) + (q-2r+2)\} =$$

$$= (2q-2r+3) \frac{q!}{(2r-1)!(q-2r+2)!}$$

is, zamenvallen, als men nog r door $r+1$ vervangt, in den gemeenschappelijken vorm

$$\sum_{0}^{\frac{q-1}{2} \text{ of } \frac{q}{2}} {}_r (-)^r \frac{2q-2r+1}{2r+1} \binom{q}{2r} B_{2q-2r-1} = \left\{ \begin{array}{l} (\text{voor } q=1) \ \frac{1}{2} \\ (\text{voor } q>1) \ 0 \end{array} \right\},$$

zijnde hierin tegelijkertijd voor r de bovengrens verlaagd tot het bedrag voortvloeijende uit het nul worden van den binomiaalcoëfficiënt $\binom{q}{2r}$ zoodra $2r > q$ zou zijn. En deze vorm geeft nu, door achtervolgens $q = 1, 2, 3$, enz. te nemen, het bedoelde stelsel:

$$3B_1 = \frac{1}{2},$$

$$5B_3 - B_1 = 0,$$

$$7B_5 - 5B_3 = 0,$$

$$9B_7 - 14B_5 + B_3 = 0,$$

$$11B_9 - 30B_7 + 7B_5 = 0,$$

$$13B_{11} - 55B_9 + 27B_7 - B_5 = 0,$$

$$15B_{13} - 91B_{11} + 77B_9 - 9B_7 = 0,$$

$$17B_{15} - 140B_{13} + 182B_{11} - 44B_9 + B_7 = 0,$$

enz.

Wij hebben dit laatste stelsel te meer nedergeschreven om er op te wijzen dat daarin de getallencoëfficiënten van een zelfden Bernoulliaanschen coëfficiënt in de opvolgende regels op eenvoudige wijze telkens uit elkander zijn af te leiden, zoodat men voor het stelsel in zijn geheel die getallen gemakkelijk in evenwijdige schuine volgorden zou invullen. Immers de coëfficiënt van den $(r+1)^{en}$ term in den q^{den} regel, dat is (afgezien van het teeken) juist de coëfficiënt van den algemeenen term $B_{2q-2r-1}$, bleek zoo even te bedragen $(2q-2r+1)\dfrac{q!}{(2r+1)!\,(q-2r)!}$; en vermeerdert men nu hierin gelijktijdig q en r met de eenheid, dan blijkt de coëfficiënt van denzelfden schuin daaronder geplaatsten term $B_{2q-2r-1}$ in den volgenden regel gelijk $(2q-2r+1)\dfrac{(q+1)!}{(2r+3)!(q-2r-1)!}$ en dus $\dfrac{(q+1)(q-2r)}{(2r+2)(2r+3)}$-maal zoo groot te zijn. De opvolgende door $(q, r=0)$, $(q+1, r=1)$, $(q+2, r=2)$, enz., $(2q-1, r=q-1)$, $(2q, r=q)$ bij wijze van regthoekige coördinaten aangeduide getallencoëfficiënten van denzelfden Bernoulliaanschen coëfficiënt B_{2q-1} in de $q+1$ opvolgende regels waarin deze voorkomt moeten dus ieder voor zich met

$$\frac{(q+1)q}{2.3}, \frac{(q+2)(q-1)}{4.5}, \frac{(q+3)(q-2)}{6.7}, \text{ enz.}, \frac{(2q)(1)}{(2q)(2q+1)} = \frac{1}{2q+1}$$

en nul vermenigvuldigd worden om telkens den naastvolgenden getallencoëfficiënt op te leveren. Zoo heeft men bij voorbeeld voor $q=4$, dat is voor de vijf opvolgende coëfficiënten 9, 30, 27, 9, 1 waarmede B_7 is aangedaan:

$$9)\times\frac{5.4}{2.3}=30)\times\frac{6.3}{4.5}=27)\times\frac{7.2}{6.7}=9)\times\frac{8.1}{8.9}=1)\times\frac{9.0}{10.11}=0.$$

Tot besluit van dit opstel deel ik hier voor de eerste Bernoulliaansche coëfficiënten nog eenige uitdrukkingen mede, waardoor zij op betrekkelijk eenvoudige wijze afhangen

van min of meer regelmatige algebraïsche sommen van zekere binomiaalcoëfficiënten. Behalve voor enkele der allereersten is het mij echter niet gelukt den wezenlijken grondslag, waarop dergelijke analogiën zouden berusten, op te sporen: ik geef ze dus als slechts bij toeval of bij tasting gevonden. Regelmatigheidshalve de eerste leden in eene tamelijk in het oog loopende volgorde brengende, zijn de bedoelde uitdrukkingen de onderstaande:

$$2^1.3\,B_1 = \binom{3}{0},$$

$$2^3.5.6\,B_3 = -\binom{6}{1} + \binom{6}{3} - \binom{6}{5},$$

$$2^5.7.8.9\,B_5 = 2^3\left\{-\binom{9}{2} + \binom{9}{6}\right\},$$

$$2^7.9.10.11.12\,B_7 = 2^6\left\{-\binom{12}{2} + \binom{12}{6} - \binom{12}{10}\right\} \text{ of ook}$$

$$= \frac{2^8.11}{3^3}\left\{\binom{12}{0} - \binom{12}{3} + \binom{12}{6} - \binom{12}{9} + \binom{12}{12}\right\},$$

$$2^9.11.12.13.14.15\,B_9 = 2^9.3\left\{-\binom{15}{3} + \binom{15}{6} + \binom{15}{9} - \binom{15}{12}\right\},$$

$$2^{11}.13.14.15.16.17.18 B_{11} = 2^{14}.3^2\left\{-\binom{18}{3} + \binom{18}{9} - \binom{18}{15}\right\},$$

$$2^{13}.15.16.17.18.19.20.21\,B_{13} = 2^{10}.3^3.5^2.17\left\{-\binom{21}{3} - \binom{21}{6} + \binom{21}{9} + \binom{21}{12} - \binom{21}{15} - \binom{21}{18}\right\}.$$

Voor B_{15} heb ik iets dergelijks niet anders kunnen verkrijgen dan met bijvoeging nog van 2 als factor bij sommige termen, namelijk:

$$2^{15}.17.18.19.20.21.22.23.24\,B_{15} = \frac{2^{18}.3^3.7.11.19}{5}\left\{-\binom{24}{3} + 2\binom{24}{6} - \binom{24}{9} + 2\binom{24}{12} - \binom{24}{15} + 2\binom{24}{18} - \binom{24}{21}\right\}.$$

Voor de hoogere Bernoulliaansche coëfficiënten zijn enkele pogingen in dezen zin mij in het geheel niet gelukt.

Zonder het verder uit te werken moge hier nog worden aangeduid dat dergelijke ontwikkelingen volgens de opklimmende magten van den sinus als in de eerste afdeeling dezes tot grondslag van zelfstandige formulen voor de tangenten-coëfficiënten dienden, ook tot hetzelfde doel voor de secanten-coëfficiënten zouden kunnen strekken. Zoo zou men kunnen uitgaan van

$$sec.\, x = (1 - sin^2 x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^\infty {}_n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots(2n)} sin^{2n} x; \text{ enz.}$$

De cosecanten-coëfficiënten C hangen (zie vroegere bijdrage, blz. 154) onmiddellijk met de Bernoulliaansche zamen volgens

$$C_{2q-1} = 2\,(2^{2q-1} - 1)\, B_{2q-1}.$$

Van welwillende zijde werd mij nog de navolgende litteratuur ter zake medegedeeld, die zich eenigzins aansluit aan wat ik vroeger op blz. 167—170 opgaf:

A. L. CRELLE — C. W. BORCHARDT, *Journal für die Mathematik*: STERN, in 92er Bd., 1882; WORPITZKY, *Studien über die Bern. und Eul. Zahlen*, en KRONECKER, *Ueber die Bern. Zahlen*, in 94er Bd., 1883; LIPSCHITZ, *Beiträge zu der Kenntniss der Bern. Zahlen*, in 96er Bd., 1884.

J. A. GRUNERT, *Archiv der Mathematik und Physik*: SACHSE, *Ueber die Darstellung der Bern. und Eul. Zahlen durch Determinanten*, in 68er Th., 1882.

SCHLÖMILCH'S *Zeitschrift für Mathematik etc.*: WORPITZKY, *Ueber die Partialbruchzerlegung der Functionen etc.*

Nouvelles Annales de mathématiques: CESARO, *Sur les nombres de Bernoulli et d'Euler*, in 3e Série, T. 5, 1886.

American Journal of Mathematics: G. S. ELY, *Bibliography of Bernoulli's numbers, Some Notes*, in Vol. 5; T. GOMES TEIXEIRA, *Notes sur les nombres de Bernoulli*, in Vol. 7.

September 1888.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 24 November 1888.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voorzitter, KORTEWEG, A. C. OUDEMANS JR., HUBRECHT, MICHAËLIS, VAN DIESEN, DIBBITS, ENGELMANN, FORSTER, SURINGAR, ZAAIJER, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, BIERENS DE HAAN, SCHOUTE, BAEHR, KAPTEIJN, HOEK, PEKELHARING, ZEEMAN, RAUWENHOFF, SCHOLS, MAC GILLAVRY, LORENTZ, PLACE, MARTIN, DE VRIES, FRANCHIMONT, GUNNING, VAN 'T HOFF en C. A. J. A. OUDEMANS Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1°. E. DUPONT, Directeur van het Musée royal d'Histoire naturelle de Belgique te Brussel, 14 November 1888; 2°. den Secretaris der Académie d'Archéologie de Belgique te Antwerpen, 9 November 1888; 3°. P. J. VAN BENEDEN, Leuven, 13 November 1888; 4°. het Ministère de l'Instruction publique et des beaux Arts te Parijs, 13 November 1888; 5°. L. DELIOLE, Directeur der Bibliothèque nationale te Parijs, 19 November 1888; 6°. J. DENIKER, Bibliothecaris van het Museum d'Histoire naturelle te Parijs,

20 November 1888; 7⁰. den Directeur der Ecole polytechnique te Parijs, 14 November 1888; 8⁰. den Secretaris der Société des Antiquaires de la Morinie te St. Omer, 16 November 1888; 9⁰. den Secretaris der Société agricole, scientifique et littéraire des Pyrénées orientales te Perpignan, 16 November 1888; 10⁰. A. DURIEUX, Secretaris der Société d'Emulation te Cambrai, 17 November 1888; 11⁰. den Secretaris der Académie des Sciences, Inscriptions et belles-Lettres te Toulouse, 17 November 1888; 12⁰. J. LECAT, Secretaris der Société d'Agriculture, Sciences et Arts te Valenciennes, 21 November 1888; 13⁰. DUHAMEL, Secretaris der Société des Antiquaires de Picardie te Amiens, 22 November 1888; 14⁰. den Secretaris der royal Society te Londen, 31 October 1888; 15⁰. W. H. WESLEY, Bibliothecaris der royal astronomical Society te Londen, 30 October 1888; 16⁰. D. W. FRESHFIELD, Secretaris der royal geographical Society te Londen, 31 October 1888; 17⁰. J. L. SCLATER, Secretaris der zoological Society te Londen, 2 November 1888; 18⁰. R. OWEN, Londen, 3 November 1888; 19⁰. den Directeur van het royal Observatory, Greenwich, 31 October 1888; 20⁰. H. WHITE, Bibliothecaris der Cambridge philosophical Society te Cambridge, 2 November 1888; 21⁰. W. WRIGHT, Cambridge, 3 November 1888; 22⁰. den Secretaris der literary and philosophical Society te Manchester, 2 November 1888; 23⁰. Sir WILLIAM THOMSON, Glasgow, 1888; 24⁰. J. B. BALFOUR, Bibliothecaris der royal botanical Society te Edinburg, 8 November 1888; 25⁰. den Secretaris der royal Dublin Society te Dublin, 2 November 1888; 26⁰. VON BEZOLD, Directeur van het kön. preuss. meteorologische Institut te Berlijn, 2 November 1888; 27⁰. E. DU BOIS-REYMOND, Secretaris der kön. preuss. Akademie der Wissenschaften te Berlijn, 5, 21 November 1888; 28⁰. den Directeur der kön. Sternwarte te Kiel, 2 November 1888; 29⁰. C. F. W. PETERS, Directeur der kön. Universitäts-Sternwarte te Koningsbergen, 2 November 1888; 30⁰. GILBERT, Directeur der kön. Universitäts-Bibliothek te Greifswald, 7 November 1888; 31⁰. FÖRSTEMANN, Archivaris der kön. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften te

Leipzig, 8 November 1888; 32°. B. WINDSCHEID, Leipzig, 9 November 1888; 33°. FÖRSTEMANN, Archivaris der fürstlich Jablonowskische Gesellschaft te Leipzig, 12 November 1888; 34°. A. KLINGBERG, Bibliothecaris van het Verein der Freunde der Naturgeschichte te Güstrow, 14 November 1888; 35°. den Bibliothecaris der Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften te Görlitz, 15 November 1888; 36°. J. LIMPRICHT, Bibliothecaris der Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur te Breslau, 15 November 1888; 37°. A. GRUBER, Secretaris der naturforschende Gesellschaft te Freiburg i/B., 19 November 1888; 38°. J. FRANCK, Bonn, 19 November 1888; 39°. SCHAARSCHMIDT, Bibliothecaris der kön. Universitäts-Bibliothek te Bonn, 20 November 1888; 40°. P. E. SONNENBURG, Bibliothecaris van het Verein von Alterthumsfreunden im Rheinlande te Bonn, 21 November 1888; 41°. C. GEGENBAUR, Heidelberg, 21 November 1888; 42°. C. KNOOP, Secretaris der Wetterauische Gesellschaft für die gesammte Naturkunde te Hanau, 22 November 1888; 43°. J. ROSENTHAL, Bibliothecaris der physikalisch-medicinische Gesellschaft te Würzburg, 22 November 1888; 44°. O. BUCHNER, Secretaris der Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde te Giessen, 23 November 1888; 45°. F. IMHOOF-BLUMER, Winterthur, 21 November 1888; 46°. J. GOMALES ALLERA, Bibliothecaris van het Museo de Ingenieros te Madrid, 17 November 1888; 47°. H. G. ZEUTHEN, Secretaris der kong. danske videnskabernes Selskab te Kopenhagen, 17 November 1888; 48°. TEGNER, Bibliothecaris der Universitets Bibliothek te Lund, 6 November 1888; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1°. het Ministerie van Binnenlandsche Zaken te 's Gravenhage, 14, 20 November 1888; 2°. J. BRUINSWOLD RIEDEL, Secretaris der Maatschappij tot Nut van 't Algemeen te Amsterdam, 10 November 1888; 3°. W. H. M. CHRISTIE, Directeur van het royal Observatory, Greenwich, 26 October 1888; 4°. A. AUWERS, Secretaris der kön. preuss. Akademie

der Wissenschaften te Berlijn, Juli 1888; 5°. A. PEUCKERT, Secretaris van het Verein für Erdkunde te Dresden, 1888; 6°. den Secretaris der Senckenbergische naturforschende Gesellschaft te Frankfort a/M., 1888; 7°. A. O. KIHLMAN, Secretaris der Societas pro Fauna et Flora fennica te Helsingfors, 1 November 1888; 8°. K. A. MOBERG, Secretaris der Commission géologique de la Finlande te Helsingfors, 1 November 1888; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Ingekomen zijn: 1°. een brief van den Heer BUYS BALLOT, ter begeleiding eener verhandeling van den Heer Dr. VAN RIJCKEVORSEL: »Magnetic Survey of the eastern part of Brazil"; en 2°. een brief van Dr. JAN DE VRIES, leeraar aan de H. B. S. te Kampen, ter begeleiding van een opstel: »Eene rangschikking van het puntenveld in involutorische groepen". Zoowel de verhandeling als het opstel werden aangeboden voor de werken der Akademie. — De beoordeeling van het werk van den Heer VAN RIJCKEVORSEL wordt door den Voorzitter opgedragen aan de Heeren J. A. C. OUDEMANS en KAMERLINGH ONNES, en die van de bijdrage des Heeren DE VRIES aan de Heeren SCHOUTE en BIERENS DE HAAN.

— De Heeren SCHOUTE en BIERENS DE HAAN brengen rapport uit over de verhandeling van den Heer J. CARDINAAL: »Meetkundige theorie der scheeve oppervlakken van de 4e orde"; en de Heeren BIERENS DE HAAN en VAN DEN BERG over de verhandelingen van den Heer Dr. JAN DE VRIES, aangeboden in de vergaderingen van 29 September en 27 October: »Over de polyedrale configuraties" en »Over eene groep van regelmatige configuraties". — De conclusie van beide commissiën van Rapporteurs strekt om de hun ter beoordeeling gegeven bijdragen op te nemen in de werken der Akademie. — In dezen zin wordt zonder discussie besloten.

— De Heer DE VRIES spreekt over DARWIN's Pangenesis. De

bestrijding, die deze hypothese in de twintig jaren van haar bestaan ondervonden heeft, acht hij niet in alle opzichten gerechtvaardigd. Want de Pangenesis bestaat uit twee van elkander onafhankelijke stellingen, waarvan de eerste volstrekt niet vervalt, als het gelukt is de tweede te weêrleggen. Volgens de eerste stelling worden de erfelijke eigenschappen der organismen in de cellen vertegenwoordigd door stoffelijke deeltjes, die, ontelbaar als de sterren in den hemel, elk eene afzonderlijke eigenschap vertegenwoordigen. De tweede stelling is de bekende hypothese van het transport der kiempjes door het organisme, van de organen naar de kiemcellen. De argumenten, tegen deze laatste aangevoerd, acht spreker overtuigend. Hij wijst er op, dat daarmede de eerste stelling echter niet weêrlegd is, en tracht aan te toonen, dat deze zoowel van de verschijnselen der erfelijkheid, als van de feiten, die in de beide laatste tientallen van jaren omtrent celdeeling en bevruchting ontdekt zijn, op zeer voldoende wijze rekenschap kan geven.

De Heer Hubrecht, die meende dat de Spreker Weismann's verdiensten geen recht had laten wedervaren, wordt door den Heer de Vries beantwoord.

— De Heer Korteweg deelt het volgende mede:

Wanneer een dubbelraakvlak over een gegeven oppervlak voortrolt, kan het gebeuren dat de beide gekoppelde raakpunten samenvallen. Daar ter plaatse ligt dan op het oppervlak een bijzonder punt, waaraan spreker den naam van »plooipunt" wenscht toe te kennen. Bij sommige thermodynamische oppervlakken heeft het eene gewichtige physische beteekenis, representeert namelijk den kritischen toestand. In de theorie der algebraïsche oppervlakken is het bekend als een gemeenschappelijk punt van de spinodale en flecnodale lijn.

Spreker begon met het bestudeeren van de gedaante van het oppervlak in de nabijheid van een plooipunt. Het bleek toen, dat er twee soorten van plooipunten onderscheiden moeten worden. Zij verschillen onder anderen in de doorsnede van raakvlak en oppervlak, welke bij de eerste soort uit een geïsoleerd punt met bestaanbare raaklijn, in

de tweede uit twee rakende takken bestaat. Voorts bevindt zich de lijn der gekoppelde raakpunten bij de eerste soort op 't elliptisch gekromde, bij de tweede soort op 't hyperbolisch gekromde gedeelte van het oppervlak. Spreker vertoont modellen van beide gevallen.

Daarna ging spreker over tot de vraag: hoe plooipunten nieuw ontstaan en verdwijnen op een vloeiend veranderend oppervlak. Een algemeene regel is het, dat bijzondere punten, die in eindig aantal op een oppervlak optreden, niet verdwijnen, dat is onbestaanbaar worden, alvorens twee of meer samengekomen zijn. Om dus op een vloeiend veranderend oppervlak het oogenblik van verdwijnen of verschijnen te leeren kennen, behoeft men slechts na te gaan het optreden van die bijzondere punten van hooger orde, waar meerdere der te onderzoeken bijzondere punten samenvallen.

In de eerste plaats komen dan in aanmerking die bijzondere punten van hooger orde, wier aanwezigheid op een algebraïsch oppervlak slechts aan ééne voorwaarde tusschen de coëfficienten gebonden is. Spreker zoude zulke bijzondere punten »uitzonderingspunten van den eersten graad (van uitzondering)'' willen noemen. Men kan een gegeven oppervlak van gegeven graad vloeiend laten overgaan in elk ander oppervlak van denzelfden graad, zonder andere dan deze uitzonderingspunten te zien verschijnen, en ook dan, wanneer de wijze van verandering niet geheel vrij is, maar veroorzaakt wordt door de aanwezigheid van een of meer parameters, zullen *in den regel* geene andere uitzonderingspunten behoeven op te treden.

Wat nu de plooipunten betreft, voor deze zijn de bedoelde uitzonderingspunten vier in getal, en wel (merkwaardig genoeg) twee geheel onderscheiden soorten van dubbelplooipunten, voorts osculatiepunten en kegelpunten.

De *eerste soort* van dubbel-plooipunt ontstaat als in de vergelijking:

$$z = c_1 x^2 + d_3 x y^2 + e_5 y^4$$

die in het algemeen de gedaante van het oppervlak in de

nabijheid van een plooipunt bepaalt, de coëfficient d_3 nul wordt. Zulk een plooipunt ontstaat door 't samenvallen van gelijksoortige enkele plooipunten, die dan na het samenvallen onbestaanbaar worden.

De *tweede soort* eischt: $d^2_3 - 4\, c_1\, e_5 = 0$. Het gelukte spreker aan te toonen, dat zij beschouwd moet worden te zijn ontstaan uit het samenvallen van twee ongelijksoortige plooipunten. Zij vormt tevens den overgang tusschen beide soorten van enkelvoudige plooipunten. Hieruit volgt dus dat een plooipunt zijn soortkarakter niet veranderen kan zonder eerst met andere plooipunten samen te komen. Geschiedt dit in een dubbelplooipunt tweede soort, dan worden beide onbestaanbaar. Bij 't samenkomen in een osculatiepunt kan echter wellicht 't karakter veranderen. Dit is door spreker niet onderzocht.

In een *osculatiepunt*, waar de doorsnede van raakvlak en oppervlak een driedubbelpunt vertoont, komen drie plooipunten samen. Van deze drie zijn er evenzoovele bestaanbaar als door het driedubbelpunt bestaanbare takken gaan. In de bestaanbaarheid komt na het optreden van een osculatiepunt geene verandering

Anders is het met de *kegelpunten* gesteld. Hier komen 24 plooipunten bijeen; toch kan hetgeen met die 24 punten voorvalt op tamelijk eenvoudige wijze worden beschreven. Brengt men een coördinaten-stelsel aan in het kegelpunt, dan kan de vergelijking van het oppervlak geschreven worden:

$$0 = H_2 + H_3 + H_4 + \dots$$

Laat men nu alle termen H_4 en hoogere weg, dan ontstaat een derdegraadsoppervlak met kegelpunt. Door dit kegelpunt gaan dan zes (dubbele) rechte lijnen, die al of niet bestaanbaar kunnen zijn. Vervormt men nu het oorspronkelijk oppervlak, zoodat binding of scheiding optreedt tusschen de twee bladen, die in het kegelpunt samenhingen, dan gaan de 24 plooipunten in zes groepen van vier uiteen. Ieder van deze groepen correspondeert met een der zes dubbellijnen van het derdegraadsoppervlak: met iedere onbestaanbare lijn een groep van vier punten, die bij binding

zoowel als scheiding onbestaanbaar blijven; met iedere bestaanbare lijn eene, waarvan twee plooipunten onbestaanbaar zijn en blijven, maar de twee andere òf bij scheiding òf bij binding bestaanbaar worden.

Spreker pastte nu de ontworpen theorie toe op derdegraadsoppervlakken. De 54 plooipunten van zulk een oppervlak liggen paarsgewijze op de 27 rechte lijnen. Dubbelplooipunten kunnen alleen optreden op rechten, die door twee kegelpunten gaan; deze rechten tellen dan voor vier en *al* hunne punten zijn als dubbelplooipunten te beschouwen. Daar evenwel bij 't vervormen van een derdegraadsoppervlak 't optreden van twee kegelpunten te gelijk steeds vermeden kan worden, kunnen de *dubbelplooipunten* evenzeer buiten beschouwing gelaten worden als de osculatiepunten, welke geene verandering in 't aantal bestaanbare plooipunten veroorzaken. De kegelpunten blijven nu over. Hier splitst zich bij *binding* iedere bestaanbare dubbellijn van het kegelpunt in twee bestaanbare rechte, waarop, blijkens de algemeene theorie, nu slechts twee bestaanbare plooipunten, beide aan dezelfde lijn eigen, gelegen kunnen zijn. Bij *scheiding* wordt alles onbestaanbaar.

Het verdwijnen van twee plooipunten van een derdegraadsoppervlak gaat dus gepaard met het verdwijnen van twee rechten. Weet men nu nog dat het samenvallen van rechten slechts kan voorkomen bij 't optreden van een kegelpunt, dan geraakt men van zelf tot het theorema, dat het verschil tusschen het aantal bestaanbare plooipunten en het aantal bestaanbare rechten voor alle derdegraadsoppervlakken gelijk moet zijn, en wel blijkens het diagonaalvlak van CLEBSCH, waar 27 bestaanbare rechte en 10 osculatiepunten, die elk voor 3 bestaanbare plooipunten tellen, aanwezig zijn, gelijk aan het getal *drie*.

Spreker vond in de tamelijk uitgebreide literatuur over derdegraadsoppervlakken, dit theorema nergens uitdrukkelijk geformuleerd, maar het bleek toch, wat den inhoud betreft, bekend te zijn. Zoo geeft ZEUTHEN (*Math. Annalen*, Bd. VIII, S. 5) voor de vijf hoofdsoorten, welke respectievelijk 27, 15, 7, 3 en 3 bestaanbare rechten bezitten, het aantal bestaan-

bare rechten met onbestaanbare plooipunten op als te zijn, resp. 12, 6, 2, 0, 0; waaruit het theorema natuurlijk onmiddellijk volgt.

— De Heer A. C. OUDEMANS JR. biedt voor de Verslagen en Mededeelingen aan eene verhandeling, getiteld: »Bijdrage tot de kennis van de Cupreïne".

— De Heer MARTIN deelt mede, dat door hem onlangs eene bezending versteeningen uit Nederlandsch Indië werd ontvangen, door den mijningenieur J. A. HOOZE in Martapoera, het zuidoostelijk gedeelte van Borneo, verzameld. Daaronder vond spreker karakteristieke fossielen der krijtformatie, vooral ook rudisten, en wel verscheidene soorten van *Sphaerulites* en *Radiolites*. Beide geslachten werden vroeger ook in Engelsch Indië waargenomen en door STOLICZKA beschreven, terwijl rudisten in de Nederlandsche bezittingen tot nu toe nooit waren aangetroffen. De aanwezigheid eener krijtformatie op Borneo, die reeds door GEINITZ hoogstwaarschijnlijk werd geacht, blijkt hieruit met zekerheid, en wel in streken, waar oudere dan tertiaire sedimenten nog niet ontdekt waren. Eene meer uitvoerige bewerking der krijtfauna hoopt spreker binnen kort te kunnen beginnen.

Dezelfde spreker handelt vervolgens over eene menschelijke onderkaak, in 1823 in den Caberg bij Maastricht gevonden en sedert dikwerf in de anthropologische literatuur genoemd, omdat het voorwerp aan een diluviaal mensch werd toegeschreven. Spreker bracht de kaak ter tafel, benevens een profiel, opgenomen door den opzichter van den waterstaat G. A. VAN DER DUSSEN, werkzaam bij het ontgraven der Zuid-Willemsvaart, bij welke gelegenheid het bedoelde overblijfsel is gevonden. Het profiel gaat vergezeld van een beschrijvenden catalogus, en al hetgeen over de vindplaats der kaak bekend is, doet veronderstellen, dat die in jonge alluviale afzettingen, voorkomende binnen het gebied der Loessformatie, heeft gelegen en niet van diluvialen ouderdom kan zijn. De zeer frissche toestand, waarin het voorwerp nog verkeert, doet buitendien geenszins aan een fossiel

denken; terwijl de kaak, volgens den hoogleeraar ZAAIJER en andere anatomen, ook geenerlei bijzonderheden vertoont, die voor een hoogen ouderdom zouden pleiten.

— De Voorzitter biedt, uit naam van den Heer VAN BEMMELEN, voor de werken der Akademie aan eene verhandeling van den Heer G. REINDERS te Wageningen: »Over de samenstelling en het ontstaan der zoogenoemde Oerbanken in de Nederlandsche heidegronden". Rapport daarover zal worden uitgebracht door de Heeren VAN BEMMELEN en MARTIN.

— De Heer HOEK biedt voor de boekerij der Akademie aan een exemplaar der door hem bewerkte »Bibliographie der Fauna van Nederland."

— Daar er verder niets te verhandelen is, sluit de Voorzitter de Vergadering.

BIJDRAGE TOT DE KENNIS VAN DE CUPREÏNE.

DOOR

A. C. OUDEMANS Jr.

I.

Door de vrijgevigheid van de bekende kinine-fabrikanten Howards and Sons, die mij eenige hektogrammen basisch cupreïnesulfaat afstonden, werd mij de gelegenheid gegeven, een uitvoerig onderzoek in het werk te stellen omtrent de cupreïne en hare verbindingen en daardoor mijne kennis omtrent de eigenschappen der kina-alkaloïden te vermeerderen.

Het zout, dat mij ten dienste stond, was goed kristallijn, maar eenigszins vaal van tint. Het loste in overmaat van zuren tot eene lichtbruingeel gekleurde vloeistof op.

Om daaruit cupreïne te bereiden, zou men geneigd zijn, de in verdund zoutzuur opgeloste massa door alkaliën — en wel door ammonia in zwakken overmaat — te ontleden, daar cupreïne, zooals reeds uit het onderzoek van Hesse en van Paul en Cownley is gebleken, in overmaat van kali en natron — en zelfs van ammonia — gemakkelijk oplost. Deze wijze van doen voert intusschen niet tot het doel; want wanneer men het in verdunde zuren opgeloste sulfaat in zwakken overmaat van verdunde ammonia giet en snel omroert, ontstaat altijd weder, nevens cupreïne, eene zekere hoeveelheid van het moeilijk oplosbare basische sulfaat.

Ik heb er mij het best bij bevonden, de cupreïne af te scheiden uit eene oplossing van het neutrale (door anderen zuur genoemde) hydrochloraat, die men zich gemakkelijk op de volgende wijze bereidt. Men verwarmt het

basische sulfaat met zijn tienvoudig gewicht aan water, voegt onder gestadig roeren zooveel zoutzuur toe, dat de massa opgelost is en daarna de ter precipitatie van het zwavelzuur noodige hoeveelheid chloorbaryum. Nadat zich het baryumsulfaat heeft afgezet, filtreert men de vloeistof door dierlijke kool en giet haar, na bekoeling, onder voortdurend roeren in eene verdunde oplossing van ammonia in water. Hierbij kan men, bij gedeelten werkende, zich door den reuk laten leiden en zoolang met de toevoeging van het zure vocht voortgaan, als bij het omroeren de reuk van de ammonia nog even duidelijk voor den dag komt. Het is niet raadzaam, omgekeerd te handelen en de ammonia bij het zure vocht te gieten, tenzij de oplossing van het zout zeer verdund zij, omdat dan lichtelijk uit de oplossing van het gemakkelijk oplosbare neutrale hydrochloraat eene zekere hoeveelheid van het basische hydrochloraat kan ontstaan, dat zich met de afgescheidene cupreïne vermengt, later door het ter uitspoeling dienende water wordt opgelost en op die wijze verloren gaat.

De verkregene neerslag wordt nu zoo snel mogelijk met behulp van den Bunsen'schen toestel afgefiltreerd en met koud water uitgewasschen. De doorloopende zwak ammoniakale vloeistoffen behoeven niet te worden weggeworpen. Door verdamping daarvan en latere toevoeging van eene kleine overmaat van ammonia, verkrijgt men daaruit weder een neerslag van cupreïne, die, ofschoon gekleurd, zeer goed tot de bereiding van sommige cupreïne-zouten kan dienen.

Bij de beschrevene bewerkingen bemerkt men al spoedig, dat cupreïne, in vergelijking van de meer bekende kina-alkaloïden, veel grootere neiging vertoont om zich onder den invloed van verschillende invloeden te kleuren en te ontaarden. Herhaalde bewerkingen van hetzelfde preparaat (verdamping en oplossing) voeren doorgaans tot het resultaat, dat de massa geelachtig, bruin- of roodachtig, ten laatste bijna zwart wordt gekleurd. Dit schijnt vooral plaats te grijpen onder den invloed van oxydeerende zuren, zooals salpeterzuur en chloorzuur, en van alkaliën, althans onder den invloed van ammonia. Somtijds verkrijgt men door het

verdampen van dergelijke gekleurde oplossingen tot droogwordens en latere behandeling met water een zwart poeder als residu, dat met eene donkerviolette kleur in alkohol en ijsazijn oplost en daaruit bij verdamping duidelijk kristallijn achterblijft. De hoeveelheid daarvan is echter altijd zeer gering. Zooals later zal worden vermeld, ontstaat daarvan eene ruime hoeveelheid, wanneer het neutrale nitraat in drogen toestand boven zekere grenzen van temperatuur wordt verhit.

Heeft men dergelijke donkergekleurde vloeistoffen op cupreïne te verwerken, dan voert het gebruik van dierlijke kool ter ontkleuring gewoonlijk niet tot het doel en is het verkieselijk, aan het vocht allengskens zooveel verdunde ammonia toe te voegen, dat er een geringe nederslag is ontstaan. Na bezinking is het vocht min of meer ontkleurd en de kleurstof in den neerslag overgegaan; men herhaalt deze bewerking, totdat men het beoogde doel heeft bereikt.

Het alkaloïde, dat uit de oplossing van een cupreïnezout door ammonia is afgescheiden, heeft menigmaal eene gele tint, vooral wanneer deze laatste niet genoegzaam was verdund. Het zuiveren van een dergelijk gekleurd praeparaat geschiedt het best, wanneer men de massa bij zachte warmte met alkohol van 70 pCt. uittrekt; daardoor gaat de kleurstof met een deel van het alkaloïde in oplossing; het afgefiltreerde residu kan nu in sterken alkohol worden omgekristalliseerd of door omzichtige toevoeging van water tot het vocht, bij bekoeling, in kristalletjes worden afgescheiden.

Volgens deze laatste wijze van doen scheidt zich een zeer groot gedeelte van het alkaloïde zuiver wit uit de oplossing af, terwijl het kristalliseeren daarvan door verdamping van sterk alkoholische oplossingen allengs weder aanleiding geeft tot het verkrijgen van een min of meer gekleurd produkt.

Wat nu verder de eigenschappen van de cupreïne betreft, zoo kan ik in hoofdzaak bevestigen, hetgeen daaromtrent loor Hesse is medegedeeld *).

---

*) *Ann. der Chem. u. Pharm.* **230**, 55 en verv.

Cupreïne lost tamelijk wel in sterken alkohol op, weinig in aether, zwavelkoolstof, benzol, chloroform en petroleumaether.

Het kristalliseert uit sterken alkohol in den vorm van kleine doorschijnende kristalletjes, uit (waterhoudenden) aether in den vorm van wratjes, die, volgens de ondervinding van HESSE en ook volgens de mijne, 2 moleculen water bevatten. Het alkaloïde, dat door toevoeging van water aan eene warme alkoholische oplossing wordt afgescheiden, bevat altijd eene zeer geringe hoeveelheid water, ongeveer 1.3 procent, wat overeenkomt met $^1/_3$ molecule. Dat dit water niet kan geacht worden, door hygroscopiciteit te zijn opgenomen, maar werkelijk scheikundig is gebonden, schijnt mij toe daaruit te blijken, dat het uiterlijk van het praeparaat na het drogen op 100—130° zeer wordt veranderd; vroeger een vrij dicht zandachtig poeder, gaat het over in eene los samenhangende massa van veel duidelijker kristallijn voorkomen. Ik geloof dan ook te mogen aannemen, dat de samenstelling van uit slappen alkohol afgescheiden en aan de lucht gedroogde cupreïne beantwoordt aan de formule $3(C_{19}H_{22}N_2O_2) + H_2O$.

Voor het smeltpunt van bij 140° gedroogde cupreïne vond Prof. HOOGEWERFF ± 197°, hetgeen met de opgave van HESSE (198°) goed overeenstemt.

De analyse, uitgevoerd door den Heer E. H. EKKER, leverde de volgende uitkomst op:

1) 0.7502 gram luchtdroge cupreïne, uit aether gekristalliseerd, verloren bij 130—140° 0.1008 gram $H_2O = 13.4$ pCt.

De formule $C_{19}H_{22}N_2O_2 + 2\,H_2O$ vordert 10.4 pCt. H_2O.

2) 0.2808 gram uit aether gekristalliseerd alkaloïde, bij 130° gedroogd, gaven 0.7602 gr. CO_2 en 0.1865 gr. H_2O.

	Gevonden.	Berekend.
C_{19}	73.8	73.5
H_{22}	7.3	7.1
N_2	—	—
O_2	—	—

Hiermede stemt vrij goed overeen de uitkomst der analyse

van het neutrale chloroplatinaat, ten deele door den Heer E. H. EKKER, ten deele door mij verricht.

1) 0.9461 gr. van het zout gaven mij bij drogen op 145° een verlies aan water van 0.0265 gr. of 2.8 pCt., hetgeen beantwoordt aan 1 molecule kristalwater (2.44 pCt.). Van hetzelfde zout gaven 0.4136 gr. 0.1094 gr. platina = 26.45 pCt.

De formule $C_{19}H_{22}N_2O_2$, $H_2 Pt Cl_6 + H_2O$ vordert 26.34 pCt. Pt.

2) De Heer EKKER verkreeg van 0.5611 gram bij 110—130° tot standvastig gewicht gedroogd chloroplatinaat 0.6393 CO_2 en 0.1809 gr. H_2O.

	Gevonden.	Berekend.
C_{19}	31.1	31.7
H_{24}	3.7	3.3
N_2	—	—
O_2	—	—
Pt	26.5	26.3
Cl_6	·	—

Cupreïne gedraagt zich als eene tweezurige basis en geeft met de meeste zuren twee reeksen van zouten, die ik basische en neutrale zal noemen. Met sommige zuren, zooals zwavelzuur, vereenigt het zich ook nog ter vorming van een zuur zout, waarvan het zuur op 1 mol. alkaloïde tweemaal grooter is dan in het neutrale. De basische zouten zijn over het geheel niet zeer oplosbaar in water, de neutrale en zure daarentegen wel.

Zooals HESSE reeds heeft opgemerkt, zijn oplossingen van basische zouten geel gekleurd; de eigenaardige citroengele tint dezer vloeistoffen, die bij de zuiverste praeparaten voorkomt, moet niet worden verward met de bruingele kleur, die bij langzame ontaarding ten gevolge van verdamping enz. wordt waargenomen. Dit blijkt onder anderen daaruit, dat de witte basische zouten, die met eene gele kleur in water oplossen, met watervrijen alkohol *geheel* kleurlooze oplossingen geven. De oplossingen van neutrale verbindingen van cupreïne met kleurlooze zuren zijn ongekleurd, tenzij bij verdunning en verwarming door dissociatie eene zekere hoeveelheid basisch zout ontstaan zij. In drogen toestand

zijn de *volkomen zuivere* neutrale verbindingen met kleurlooze zuren waarschijnlijk ongekleurd (het hydroiodaat uitgezonderd, dat oranjekleurig en het hydrobromaat, dat geel is), maar het is mij niet mogen gelukken, neutrale zouten in groote kristallen geheel ongekleurd te verkrijgen.

Bij de bepaling van het soortelijk draaiingsvermogen van cupreïne en hare verbindingen heb ik dezelfde methode gevolgd als vroeger bij mijn onderzoek omtrent kinamine en konkinamine.

De uitkomsten werden berekend met behulp van de formule $(\alpha)_D = \frac{V\alpha}{l\,p}$.

Voor de oplossingen van het vrije alkaloïde in absoluten alkohol verkreeg ik daarbij de volgende resultaten:

N⁰.	p	V	l	t	α_D		$(\alpha)_D$
1	0.1310 gr.	19 CC.	302.8 mm.	17°C.	3°40′		
"	" "	" "	" "	" "	3°39′		
"	" "	" "	" "	" "	3°39′5	3°39′5	— 175°.4
"	" "	" "	" "	" "	3°39′5		
2	0.2354 "	19 "	302.8 "	17° "	6°32′		
"	" "	" "	" "	" "	6°31′	6°33′	— 175°.5
"	" "	" "	" "	" "	6°35′		
3	0.3381 "	19 "	302.8 "	17° "	9°21′		
"	" "	" "	" "	" "	9°20′	9°20′	— 173°.3
"	" "	" "	" "	" "	9°19′		

Eene bepaling van het S. D. V. in alkohol van 97 pCt. gaf de volgende uitkomst:

p	V	l	t	α_D		$(\alpha)_D$
0.2854 gr.	19 CC.	302.8 mm.	16° C.	7°56′		
" "	" "	" "	" "	7°53′	7°58′	— 175°.3
" "	" "	" "	" "	8° 0′		

ZOUTEN VAN CUPREÏNE.

Basisch hydrochloraat $C_{19} H_{22} N_2 O_2, H Cl + H_2 O$. Voor dit in kleurlooze naalden kristalliseerende zout vond ik dezelfde samenstelling als HESSE.

0.4087 gram zout verloren namelijk bij drogen op 140° C. 0.0200 gram $H_2 O$ = 4.9 pCt. Berekend 4.9 pCt.

De oplosbaarheid in water werd bepaald volgens de methode van VICTOR MEYER en wel voor eene temperatuur van 16.3° C. 7.8512 gram van eene bij die temperatuur verzadigde oplossing lieten bij verdamping en drogen op 130° C. een overschot achter van 0.1370 gram. Hieruit berekent men voor de oplosbaarheid van het waterhoudende zout 1 : 53.5.

De bepaling van het soortelijk draaiingsvermogen in waterige en alkoholische oplossingen leverde de volgende uitkomst op.

N°.	Oplos-middel	p	V	l	t	(α)		$(\alpha)_D$ van het zout	(ber op lo
1	water	0.1418 gr.	25 CC.	302.8 mm.	17° C.	2°43′			
"	"	" "	" "	" "	" "	2°42′	2°42′5	—157°.1	—1
"	"	" "	" "	" "	" "	2°42′5			
2	"	0.2177 "	25 "	" "	" "	4° 4′			
"	"	" "	" "	" "	" "	4° 5′	4° 5′	—154°.8	—1
"	"	" "	" "	" "	" "	4° 7′			
3	watervrije alkohol	0.1801 "	19.42 "	" "	" "	4°44′5	4°46′	—169°.7	—1
"	" "	" "	" "	" "	" "	4°47′5			
4	" "	0.3127 "	22 "	" "	" "	7°11′			
"	" "	" "	" "	" "	" "	7°11′	7°12′	—167°.3	—1
"	" "	" "	" "	" "	" "	7°14′			

Neutraal hydrochloraat $C_{19}H_{22}N_2O_2$, 2 H Cl, watervrij en gebonden aan twee moleculen kristalwater.

Volgens HESSE bevat dit zout geen kristalwater en is het gemakkelijk oplosbaar in koud water, moeilijk oplosbaar in sterk zoutzuur.

Naar mijne ervaring bestaan er twee zouten, waarvan het eene watervrij is en bij temperaturen, die naar mijne schatting boven 15° liggen, in harde kleurlooze kristallen aanschiet, terwijl het andere bij winterkoude in verbinding met twee moleculen water verkregen wordt en betrekkelijk groote tot het rhombische stelsel behoorende kristallen vormt, die veel meer neiging bezitten om uit het omgevende water kleurstof op te nemen dan het watervrije.

Het is mij eenmaal voorgekomen, dat eene kristallisatie van watervrij zout, over dag in de maand November 1887 aan den binnenwand van een bekerglas gevormd, gedurende den nacht was verdwenen en had plaats gemaakt voor groote kristallen van waterhoudend zout, die den bodem van het vat bedekten en een geheel ander uiterlijk voorkomen hadden.

De waterbepaling van het laatstgenoemde zout leverde de volgende uitkomst op:

0.9648 gram verloren bij drogen op 140° 0.0748 gram = 8.3 pCt. aan gewicht. De formule met twee moleculen water eischt een gehalte van 8.6 pCt. Na eenige dagen staan in de lucht had dit zout weder 0.0498 gram water opgenomen, d. i. ongeveer 5.1 pCt. Het zout met 1 molecule water zou 4.5 pCt. water moeten bevatten. Later evenwel was de toename in gewicht in het geheel gelijk aan 6.9 pCt. zoodat het schijnt dat het zout onder gunstige omstandigheden weder het geheele gehalte van $2H_2O$ kan opnemen.

De oplosbaarheidsbepaling volgens de methode van V. MEIJER leverde de volgende uitkomst:

$t = 15°$. 4.2893 gram verzadigde waterige oplossing gaven als droog residu (verhitting op 140° C.) 0.6500 gr. Oplosbaarheid van het droge zout daaruit berekend 1 : 5.60.

$t = 16°.3$. 9.2511 gram verzadigde oplossing gaven als droog residu 1.3014 gr. Oplosbaarheid van het droge zout 1 : 6.11.

Wat nu verder de bepaling van het S. D. V. voor oplossingen in water betreft, ik heb deze uitgevoerd zoowel bij het watervrije als bij het waterhoudende zout en buitendien ook onder toevoeging van een overmaat van zoutzuur. De uitkomsten zijn de volgende:

N⁰.	p	V	l	t	α_D		$(\alpha)_D$ berekend op waterhoudend zout	$(\alpha)_D$ berek op alkalo
1	0.2619 gr. dr. zout	24 CC.	302.8 mm.	17° C.	7°47′	7°47′.5	—211°.0	—283
〃	= 0.2866 gr. w. 〃	〃 〃	〃 〃	〃	7°48′			
2	0.5518 gr. w. 〃	22 〃	〃 〃	〃	16° 0′.5	15°59′.5	—210°.6	—282
〃	〃 〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃	15°59′			
〃	〃 〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃	15°59′			
3	0.8906 〃 〃	19 〃	〃 〃	〃	29°14′.5	29°14′	—206°.0	—276
〃	〃 〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃	29°14′			
4	1.7178 〃 〃	20 〃	〃 〃	〃	52° 6′	52° 6′	—200°.4	—268
〃	〃 〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃	52° 6′			
5	3.2829 〃 〃	19 〃	〃 〃	〃	99°58′.5	99°58′.5	—191°.1	—256
〃	〃 〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃	99°59′			
6	0.3968 gr. 〃 〃	19 〃	〃 〃	〃	13°20′	13°20′	—210°.8	—282°
〃	1 CC. norm. H Cl	〃 〃	〃 〃	〃	13°20′			
7	0.3933 gr. 〃	19 〃	〃 〃	〃	13°10′	13°10′.5	—210°.2	—281°
〃	2 CC. norm. H Cl	〃 〃	〃 〃	〃	13°10′.5			
〃	〃 〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃	13°10′.5			
8	0.4372 gr. 〃	22 〃	〃 〃	〃	12°21′	12°21′	—205°.5	—276°
〃	5 CC. norm. H Cl	〃 〃	〃 〃	〃	12°21′			
9	0.3962 gr. 〃	19 〃	〃 〃	〃	12°34′.5	12°34′.5	—199°.5	—267°
〃	10 CC. norm. H Cl	〃 〃	〃 〃	〃	12°33′.5			
〃	〃 〃 〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃	12°33′.5			
10	0.4523 gr. 〃	22 〃	〃 〃	〃	12° 4′	12° 4′.5	—194°.0	—260°.
〃	20 CC. norm. H Cl	〃 〃	〃 〃	〃	12° 5′			

Basisch hydrobromaat. $C_{19}H_{22}N_2O_2$, $HBr + H_2O$. Dit zout kristalliseert even als het basische hydrochloraat in den vorm van witte naalden.

Kristalwaterbepaling. 1) 0.8664 gr. zout verloren bij drogen op 160° C 0.0384 gr. water = 4.4 pCt. 2) 0.6956 gr. zout verloren bij drogen op 160° C. 0.0298 gr. water = 4.3 pCt. De formule eischt 4.4 pCt. water.

Het zout is, volgens de uitkomst van de volgende proef, moeilijker oplosbaar in water dan het overeenkomstige hydrochloraat. 6.7774 gram. van eene bij 16° verzadigde oplossing lieten bij verdampen en drogen op 145° C. een overschot achter, wegende 0.0526 gram. Hieruit berekent men voor de oplosbaarheid van het waterhoudende zout 1 : 122.2.

Omtrent het S. D. V. verkreeg ik de volgende uitkomst:

N°.	Oplosmiddel	p	V	l	t	α_D		$(\alpha)_D$ van het zout	$(\alpha)_D$ berekend op alkaloïde
1	water	0.1080 gr.	22 CC.	302.8 mm.	17° C.	2°12′	2°10′	—145°.8	—192°.7
〃	〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	2° 9′			
〃	〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	2° 9′			
〃	〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	2° 9′5			
2	〃	0.2241 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	4°28′	4°28′	—144°.8	—191°.1
〃	〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	4°28			
3	watervrije alkohol	0.2725 〃	19 〃	〃 〃	〃 〃	6° 1′	6° 3′	—139°.2	—183°.7
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	6° 3′			
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	6° 4′			
4	〃 〃	0.4218 〃	25 〃	〃 〃	〃 〃	6°58′	7° 1′	—137°.3	—181°.1
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	7° 2′			
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	7° 4′			

Neutraal hydrobromaat. $C_{19}H_{22}N_2O_2$, $2HBr$. Watervrij en met $2H_2O$ gekristalliseerd naar gelang van temperatuur.

Waterbepaling van het gehydrateerde zout: 1.3496 gram

verloren bij drogen op 140° C. 0.0983 gr. = 7.3 pCt. water. De formule eischt 7.0 pCt.

Bepaling van de oplosbaarheid: 6.8066 gram bij 16° C. verzadigde waterige oplossing lieten na verdamping en verhitting op 145° een overschot van 0.5072 gram. Oplosbaarheid hieruit berekend 1 : 12.52.

De uitkomsten omtrent het soortelijk draaiingsvermogen voor oplossingen in water waren de volgende (hierbij werd het watervrije zout gebruikt):

N°.	p	V	l	t	α_D		$(\alpha)_D$ van het zout	$(\alpha)_D$ berekend op alkaloïde
1	0.3440 gr.	22 CC.	302.8 mm.	17° C.	9° 0′			
"	" "	" "	" "	" "	8°56′	8°57′	—189°.0	—287°.7
"	" "	" "	" "	" "	8°56′			
"	" "	" "	" "	" "	8°55′			
2	0.7178 "	24 "	" "	" "	16°44′			
"	" "	" "	" "	" "	16°42′	16°43′	—184° 6	—281°.0
"	" "	" "	" "	" "	16°42′			
3	1.5427 "	22 "	" "	" "	37°59′5	37°59′	—176°.8	—268°.6
"	" "	" "	" "	" "	37°58′			

Basisch hydroiodaat. $C_{19}H_{22}N_2O_2$, H I. Het zout, dat ik onderzocht, was watervrij. Het verloor bij verhitting op 140° niets aan gewicht. 0.4545 gr. gaven 0.2394 gr. Ag I, hetgeen overeenkomt met 28.4 pCt. Iodium. De formule van het watervrije zout vordert 29.2 pCt. I.

Bepaling van oplosbaarheid: 6.0228 gram van eene bij 16° verzadigde waterige oplossing lieten na verdamping en drogen op 140° achter 0.0559 gr. overschot. Oplosbaarheid hieruit berekend 1 : 106.6.

Voor het S. D. V. vond ik het volgende:

Nº.	Aard van het oplosmiddel	p	V	l	t	α_D		$(\alpha)_D$ van het zout	$(\alpha)_D$ berekend op alkaloïde
1	water	0.2005 gr.	25 CC.	302.8 mm.	17° C.	3° 2′			
〃	〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	3° 5′			
〃	〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	3° 4′	3° 4′	—126°.3	—178°.4
〃	〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	3° 3′5			
〃	〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	3° 5′			
2	absol. alkohol	0.2160 〃	22 〃	〃 〃	〃 〃	3°46′			
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	3°52′	3°49′	—128°.3	—180°.9
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	3°48′			
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	3°49′			

Neutraal hydroiodaat $C_{19} H_{22} N_2 O_2$, 2 H I met 1 en met 2 $H_2 O$.

Ik verkreeg dit zout in den vorm van oranjegele wratten en in den vorm van tamelijk groote fraaie donker oranjekleurige kristallen.

Van het eerste verloren 0.6357 gr. bij drogen op 145° 0.0211 gr. water d. i.: 3.3 pCt. De formule met 1 $H_2 O$ eischt 3.0 pCt.

Van het tweede verloren 1.2854 gr. bij drogen op 150° 0.092 gr. of 7.2 pCt. water. De formule met 2 $H_2 O$ eischt 6 pCt. Het verschil tusschen de gevondene en berekende hoeveelheid laat zich daardoor verklaren, dat het zout nog een weinig vochtig was.

Bepaling van oplosbaarheid bij 16° C. 10.700 gram verzadigde waterige oplossing gaven als residu, op 140° gedroogd, 0.6494 gr. zout. Hieruit berekent men voor de oplosbaarheid van het waterhoudende zout 1 : 15.

Het onderzoek omtrent het S. D. V. leverde de volgende uitkomst op voor opl. in water.

N°.	p	V	l	t	α_D		$(\alpha)_D$ van het zout.	$(\alpha)_D$ berekend op alkaloïde.
1	0.3759 gr.	25 CC.	302.8 mm.	17° C.	6°53′			
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	6°53′	6°53′	—151°.2	—283°.2
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	$6°53^5$			
2	0.9879 gr.	22 〃	〃 〃	〃 〃	20′ 5′	20′ 5′	– 147°.6	—276°.4
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	20°5′			

Basisch nitraat $C_{19} H_{22} N_2 O_2$, $H NO_3 + 2 H_2 O$. Dit zout doet zich voor in den vorm van fijne witte naalden. Bij verhitting onder water smelt het tot eene kleverige dikke massa en bij snelle bekoeling van eene heete geconcentreerde oplossing scheidt het zich als eene amorphe massa af, die allengs kristallijn wordt.

Waterbepaling. 0.5000 gr. verloren door drogen op 120° 0.8442 gr. water = 8.84 pCt. De formule van het zout met 2 moleculen kristalwater eischt 8.8 pCt.

Oplosbaarheidsbepaling. 12,525 gram van eene bij 15° C. verzadigde waterige oplossing lieten bij uitdampen en drogen op 110° C. achter een overschot van 0.1312 gram. Hieruit berekent men voor de oplosbaarheid van het waterhoudende zout 1 : 86.

Zooals uit deze uitkomst blijkt, mist de bewering, dat dit zout in water *zeer* oplosbaar is, allen grond *).

De bepaling van het S. D. V. in waterige oplossing leverde de volgende uitkomst op:

*) *Pharm. Journal. Transactions* [3] XV 402, (PAUL en COWNLEY).

N°.	p	V	l	t	α_D		$(\alpha)_D$ van het zout	$(\alpha)_D$ berekend op alkaloïde.
1	0.2485 gr.	22 CC.	302.8 mm.	17° C.	4°45′	4°44′	—138°.4	—182°.5
"	" "	" "	" "	" "	4°41′5			
"	" "	" "	" "	" "	4°45′			
"	" "	" "	" "	" "	4°43′5			

Neutraal Nitraat. $C_{19} H_{22} N_2 O_2$, 2 $H NO_3 + H_2 O$. Deze verbinding kristalliseert in prachtige lichtgele kristallen, welke evenals het hydrochloraat eene aanzienlijke grootte kunnen bereiken. Men bereidt het gemakkelijk door bij het alkaloïde de berekende hoeveelheid (getitreerd) normaal salpeterzuur te voegen. Het alkaloïde lost daarin eerst op; maar weldra scheidt zich het zout af, dat door kristalliseeren uit warm water gemakkelijk te reinigen is. Zooals reeds in den aanvang (zie bl. 3) werd vermeld, is het tegen den invloed van hooge temperaturen niet bestand. Bij 100° verhit, begint het na langen tijd reeds verschijnselen van kleuring te vertoonen; bij 110° in fijn verdeelden toestand op een open horlogieglas verhit, wordt het spoedig bruinachtig en naarmate de temperatuur stijgt, wordt de massa donkerder, totdat zij ten laatste zwart schijnt. Bij behandeling met water verkrijgt men eene donkerviolet gekleurde oplossing en blijft er een zwartviolet poeder terug, dat niet in water oplost en bij koking met ijsazijn en alkohol eene vloeistof geeft, die bij langzame verdamping aan de lucht een kristallijn violet residu achterlaat. De bedoelde verandering heeft veel gemakkelijker plaats in open schalen of glazen dan in buizen. Bij 150°—160° is zij vooral gemakkelijk waar te nemen. Ik behoud mij voor, later omtrent het ontledingsprodukt nadere onderzoekingen te doen.

Waterbepaling. 0.5314 gr. verloren bij drogen op 105°—110° 0.0217 gr. water = 4.1 pCt. De formule met 1 mol $H_2 O$ eischt 4.0 pCt.

Dat er niet *meer* dan 1 mol. kristalwater in het zout is, schijnt mij daaruit te blijken, dat bij eene proef, waarbij het zout op 150° werd verhit, onder gedeeltelijke ontleding en ontwijking van salpeterzuur een gewichtsverlies werd verkregen van slechts 6 pCt.

Ten aanzien van de oplosbaarheid in water werd het volgende resultaat verkregen.

10.3340 gr. van eene bij 17° C. verzadigde oplossing lieten een bij 100° op het waterbad gedroogd overschot terug van 0.7570 gr. Hieruit berekent men eene oplosbaarheid van het waterhoudende zout van 1 : 12,2. Deze uitkomst is evenwel slechts eene benadering tot de waarheid, omdat het uitdampen van de waterige oplossing steeds het ontaarden en bruin worden van de massa ten gevolge heeft, die vooral op het laatst zeer merkbaar is.

Wat verder het S. D. V. in waterige oplossing betreft, zoo kan de uitkomst daarvan uit het volgende overzicht worden opgemaakt:

N°.	*p*	*V*	*l*	*t*	α_D		$(\alpha)_D$ van het zout.	$(\alpha)_D$ berekend op alkaloïde.
1	0.2437 gr.	19 CC.	302.8 mm.	17° C.	7°40'	7°39'5	—197°.4	—289°.1
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	7°39'			
2	0.5164 〃	22 〃	〃 〃	〃 〃	13°47'			
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	13°45'5	13°46'	—193°.4	—283°.2
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	13°44'5			
3	0.7248 〃	19 〃	〃 〃	〃 〃	21°55'	21°55'	—188°.9	—276°.7
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	21°55'5			
4	0.9566 〃	19 〃	〃 〃	〃 〃	28°57'	28°57'	—189°.8	—278°.0
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	28°57'			
5	1.2447 〃	19 〃	〃 〃	〃 〃	37°24'			
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	37°27'	37°36'	—188°.9	—276°.7
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	37°26'			

Hieruit schijnt te blijken, dat beneden en boven zekere concentratie een gelijk soortelijk draaiend vermogen kan worden waargenomen, terwijl verder bij sterkere verdunning dit S. V. D. gestadig toeneemt. Sterkere oplossingen dan die onder n⁰. 5 is vermeld heb ik niet gebruikt, omdat, zooals uit het bovenstaande blijkt, al spoedig oververzadigde soluties zouden verkregen zijn, die onder de waarneming konden kristalliseeren.

Basisch chloraat. $C_{19} H_{20} N_2 O_2 + H Cl O_3$. Het basische chloraat is watervrij, zooals mij bij droging van verschillende praeparaten tot op 150⁰ bleek. Het kristalliseert in fijne, witte, tot knolvormige aggregaten vereenigde naaldjes. De oplossing daarvan in heet water kleurt zich allengskens bruinrood en wordt daarbij steeds donkerder. Eene verdunde oplossing van het zuivere zout vertoont, in tegenoverstelling van al hetgeen ik bij andere zouten heb gezien, geene de minste gele kleuring.

Bepaling van oplosbaarheid. 9.482 gram van eene bij 14⁰ verzadigde waterige oplossing lieten bij uitdampen en drogen op 115⁰ een overschot achter van 0.1936 gr. Hieruit berekent men voor de oplosbaarheid 1 : 48.

De resultaten omtrent het S. D. V. van het zout waren de volgende;

N⁰.	*p*	*V*	*l*	*t*	α_D		$(\alpha)_D$ van het zout	$(\alpha)_D$ berekend op alkaloide
1	0.2272 gr.	22 CC.	302.8 mm.	17° C.	4°34′			
"	" "	" "	" "	" "	4°32′6	4°32′	−144°.9	−184°.4
"	" "	" "	" "	" "	4°30′			

Neutraal chloraat. $C_{19} H_{22} N_2 O_2, 2 H Cl O_3 + x H_2O$. Dit zout bereidde ik door dubbele ontleding van de berekende hoeveelheden neutraal sulfaat en zuiver gekristalliseerd baryumchloraat. Na filtratie van het afgescheidene baryumsulfaat verkreeg ik eene bijna kleurlooze oplossing, die, in

uiterst dunne lagen aan de lucht verdampt, eerst een amorph vernis achterliet, dat echter bij lang staan in eene straalvormige kristallijne massa veranderde. Het verdampen van eene groote hoeveelheid oplossing, eerst op het waterbad en later onder den exsiccator, waarbij de massa steeds donkerder van kleur werd, leidde tot het verkrijgen van eene bijna zwarte, zeer dikke gomachtige massa, die in verloop van een paar maanden kristallijne structuur aannam. Uit deze proef blijkt de groote oplosbaarheid van het zout en tevens de moeilijkheid om het S. D. V. daarvan te bepalen.

Basisch perchloraat $C_{19} H_{22} N_2 O_2, H Cl O_4 + 1\frac{1}{2} H_2 O$. Wanneer men dit zout bereidt uit alkaloïde en eene niet al te verdunde warme oplosssing van overchloorzuur, zet zich bij bekoeling eene gele olieachtige massa af; deze verandert echter onder het vocht langzamerhand in nagenoeg kleurlooze kleine kristalletjes, die uit kokend water kunnen worden omgekristalliseerd en zich dan veel gemakkelijker vormen, bij vrijwillige verdamping zelfs zich in net gevormde kristalindividuen aanzetten.

Bepaling van kristalwater. 1°. 0.4110 gram zout verloren bij drogen op 135° C. 0.0243 gram water = 5.7 pCt.

2) 0.9455 gr. verloren bij drogen op 135° 0.0600 water = 6.3 pCt.

3) 0.6338 gr. verloren bij drogen op 135° 0.0404 water = 6.3 pCt.

De formule met $1\frac{1}{2}$ mol. kristalwater vordert 6.2 pCt.

De bepaling van de oplosbaarheid in water gaf het volgende resultaat: 7.493 gram bij 11° C. verzadigde oplossing lieten als op 110° gedroogd residu 0.0420 gram achter. Hieruit berekent men voor de oplosbaarheid van het waterhoudende zout 1 : 167.

Neutraal perchloraat. $C_{19} H_{22} N_2 O_2, 2 H Cl O_4$. Ik bereidde dit zout door de berekende hoeveelheden neutraal cupreïnesulfaat en baryumperchloraat in heete oplossingen bij elkander te voegen. De van het baryumsulfaat afgefiltreerde vloeistof was lichtgeel gekleurd en werd na vrij aanzienlijke concentratie op het waterbad onder eenen ex-

siccator weggezet. Allengs vormden zich aan den rand van de vloeistof witte vezelachtige kristalaggregaten en tevens op den bodem van het vat eene olieachtige vloeistof (waarschijnlijk een bepaald hydraat). Werden de kristallen weder in de vloeistof ondergedompeld, dan losten zij toch in de bovenste laag spoedig weder op; dit mag in zooverre verwondering baren, dat men met het oog op de afgescheidene olieachtige massa, het bovenstaande vocht al licht voor verzadigd zou houden.

Bepaling van kristalwater. 0.6776 gram zout verloren bij verhitten op 135^0 C. 0.464 gr. water = 6.8 pCt. De formule eischt een gehalte van 6.6 pCt.

Basisch sulfaat. $2 (C_{19}H_{22}N_2O_2), H_2SO_4 + 6 H_2O$. HESSE bepaalde de samenstelling van dit zout en vond, dat het weinig in water oplosbaar was. Ik verkreeg het nooit anders dan in den vorm van zeer lichte vlokken, die op een filtrum tot eene papierachtige massa samenkleven. In alkohol is het ook slecht oplosbaar. 0.4131 gr. verloren bij drogen op 140^0 C. 0.0549 water = 13.3 pCt. De formule eischt 13.1 pCt. H_2O.

Oplosbaarheidsbepaling. 1) 19.7622 gram van eene bij 17^0 C. verzadigde waterige oplossing lieten bij verdampen en drogen op 120^0 C. 0.0208 gr. residu van watervrij zout. Hieruit berekent men voor de oplosbaarheid van het waterhoudende zout 1 : 813. 2) 29.1600 gr. van eene bij 100^0 C. verzadigde oplossing lieten bij verdampen en drogen op 120^0 C. eene residu achter van 0.1202 gr. watervrij zout. Hieruit berekent men voor de oplossing van het waterhoudend zout 1 : 209.

Neutraal sulfaat. $C_{19} H_{22} N_2 O_2, H_2 SO_4 + 2 H_2 O$. HESSE vond van dit zout, dat het in heet water tamelijk, in koud water slecht oplosbaar is en geeft op, dat het 1 molecule kristalwater bevat. Mijne ervaring strookt daarmede niet, zooals blijken kan uit de volgende resultaten der analyse:

Kristalwater. 1) 0.4387 gr. verloren op 120^0 C 0.0098 gr. H_2O maar op 140^0 0.0356 gr. H_2O. Dit laatste cijfer komt overeen met 8.3 pCt.

2) 1.2787 gr. verloren door drogen op 145° 0.0998 gr. H_2O = 7.8 pCt.

Dit gehalte aan water werd door het aan de lucht staande zout weder binnen een paar dagen geheel opgenomen.

Zwavelzuurbepaling. 3) Het residu bij het drogen van 0.4387 gr. zout (zie proef 1) leverde 0.2332 gr. $BaSO_4$ = 0.09826 gr. H_2SO_4 = 22.4 pCt.

4) Het residu van 1.2787 gr. zout uit proef 2) leverde 0.6763 gr. $BaSO_4$ = 22.3 pCt. H_2SO_4.

Alzoo

	Gevonden.		Berekend naar de formule
	1.	2.	$C_{19}H_{22}N_2O_2, H_2SO_4 + 2H_2O$.
H_2O	8.3	7.8	8.1
SO_4H_2	22.4	22.3	22.1

Ten aanzien van de oplosbaarheid werd de volgende uitkomst verkregen:

1) 10.068 gram van eene na lang staan bij 17° C. verzadigde waterige oplossing gaven na uitdampen en drogen op lage temperatunr een residu van gekristalliseerd zout, wegende 0.1473 gram. Hieruit berekent men eene oplosbaarheid van 1 : 70.1.

2) Eene volgens de methode van VICTOR MEIJER bereide bij 16° verzadigde oplossing gaf op 10.898 gram vocht een residu van 0.1473 gr. op 140° gedroogd zout; dit komt overeen met eene oplosbaarheid van het waterhoudende zout van 1 : 73.04.

In alkohol is het zout, zelfs in de warmte, slecht oplosbaar.

De uitkomsten ten aanzien van het soortelijk draaiingsvermogen in waterige oplossingen, zijn de volgende:

Nº	p	V	l	t	α_D		$(\alpha)_D$ van het zout	$(\alpha)_D$ berekend op alkaloïde
1	0.1765 gr.	19.5 CC.	302.8 mm.	17° C.		5°32'5	—202°.4	— 289°.9
2	0.2065 〃	19.0 〃	〃 〃	18° 〃	6°35'5	6°34'	—197°.4	—282°.3
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	6°32'			
3	0.2110 〃	19.0 〃	〃 〃	19°5 〃	6°37'	6°37'	—196°.7	—281°.7
	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	6°37'			
4	0.2731 〃	19.0 〃	〃 〃	18° 〃	8°37'	8°37'	—197°.4	—282°.8
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	8°37'5			
5	0.3047 〃	19.5 〃	〃 〃	16° 〃	9°28'			
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	9°27'			
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	9°26'	9°28'	—200°.	286°.6
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	9°29'			
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	9°28'			
6	0.3050 〃	19.0 〃	〃 〃	17° 〃	9°40'	9°40'	—199°.2	—285°.3
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	9°40'			
7	0.4047 〃	19.0 〃	〃 〃	18° 〃	12°44'	12°45'	—197°.0	—282°.2
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	12°46'			
8	0.5394 〃	19.5 〃	〃 〃	17° 〃	16°26'			
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	16°26'	16°26'	—196°.1	—280°.9
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	16°26'			

Hieruit blijkt dat, even als gewoonlijk wordt waargenomen, met eene grootere concentratie een grooter soortelijk draaiingsvermogen overeenkomt.

Zuur sulfaat. $C_{19} H_{22} N_2 O_2$, $2 H_2 S O_4 + 3 H_2 O$. Wanneer men het voorgaande zout met iets meer dan de berekende hoeveelheid zwavelzuur bij verwarming in oplossing brengt en de vloeistof wordt geconcentreerd, zet zich ten slotte een zout in vezelige naalden af, dat aan de opge-

gevene samenstelling beantwoordt. Het is in water zeer oplosbaar, minder in sterk zwavelzuur; ook door alkohol wordt het tamelijk goed opgenomen. De eenigzins verdunde oplossing van het zuivere zout wordt bij verwarming vrij gemakkelijk ontleed en daaruit zetten zich dan bij bekoeling kristallen van het voorgaande zout af.

De analyse van de verbinding leverde de volgende uitkomsten:

Waterbepaling. 0.5046 gr. verloren bij drogen op 120^0 0.0494 gr. H_2O.

Bepaling van zwavelzuur. 0.4162 gr. gaven 0.3522 $BaSO_4$ = 0.1484 gr. H_2SO_4.

	Gevonden.	Berekend naar de formule $C_{19}H_{22}N_2O_2$, $2H_2SO_4 + 3H_2O$.
H_2O	9.8	9.7
H_2SO_4	35.7	35.0

Basisch formiaat. $C_{19}H_{22}N_2O_2$, CH_2O_2. Het basische formiaat kristalliseert in den vorm van fijne witte naaldjes, die in water slecht oplosbaar zijn. Het is watervrij; althans werd bij drogen op 140^0 C. geen gewichtsverlies bespeurd.

Oplosbaarheidsbepaling. 12.986 gram van eene bij 16^0 C. verzadigde waterige oplossing gaven bij uitdamping een residu van 0.1174 gr. droog zout. Hieruit berekent men voor de oplosbaarheid in water eene verhouding van 1 : 110.

Eene bepaling van het S. D. V. leverde het volgende resultaat:

N^0.	p	V	l	t	α_D		$(\alpha)_D$ van het zout.	$(\alpha)_D$ berekend op alkaloïde.
1	0.1057 gr.	22 CC.	302.8 mm.	17° C.	2°22'5			
"	" "	" "	" "	" "	2°24'	2°23'	—163°.8	—188°.0
"	" "	" "	" "	" "	2°23'			

Neutraal formiaat $C_{19}H_{22}N_2O_2$, $2CH_2O_2 + xH_2O$. Lost

men het voorgaande zout in eene zwakke overmaat van mierenzuur op, dan verkrijgt men eene vloeistof, die onder eenen exsiccator strooperig wordt en eindelijk in dunnere lagen sporen van kristallisatie vertoont.

Basisch acetaat $C_{19}H_{22}N_2O_2$, $C_2H_4O_2 + 2H_2O$. Door zachte verwarming van cupreïne met eene zwakke overmaat van azijnzuur wordt eene verbinding verkregen, beantwoordende aan de opgegeven samenstelling. Het vormt uiterst fijne wollige naaldjes en lost moeilijk in water op. De oplossingen zijn in hooge mate vatbaar voor oververzadiging.

Bepaling van kristalwater. 1) 0.5974 gram verloren bij drogen op 140° 0.0496 gr. $H_2O = 8.3$ pCt. 2) 0.9276 gr. verloren bij drogen op 140° 0.0706 gr. $H_2O = 7.6$ pCt.

De formule eischt 8.8 pCt. H_2O. Dat het zout geen azijnzuur had verloren, blijkt daaruit, dat het bij koken met water weder geheel oploste.

Bepaling van oplosbaarheid in water. 1) 7.912 gram van eene bij 17° C. verzadigde oplossing lieten bij verdamping en drogen op 130° een overschot achter van 0 0760 gr. Hieruit berekent men voor de oplosbaarheid van het waterhoudende zout 1 : 85. 2) 10.294 gram van eene bij 100° C. verzadigde oplossing lieten op dezelfde wijze een droog overschot achter van 0.5214 gr., hetgeen overeenkomt met eene oplosbaarheid van het waterhoudende zout van 1 : 17.

Neutraal acetaat. $C_{19}H_{22}N_2O_2$, $2C_2H_4O_2 + x H_2O$. Door het voorgaande zout in overmaat van azijnzuur op te lossen en aan vrijwillige verdamping bloot te stellen, verkrijgt men eene amorphe strooperige massa, die tot een vernis opdroogt en waarschijnlijk het neutrale zout voorstelt.

Basisch oxalaat. $2(C_{19}H_{22}N_2O_2)$, $C_2H_2O_4 + 2H_2O$. Paul en Cownley beschrijven dit zout en vermelden er van, dat de oplossing tot een vernis opdroogt, waarin hier en daar kristallen voorkomen. Inderdaad verkrijgt men, wanneer het zout door dubbele ontleding van het hydrochloraat of nitraat en ammoniumoxalaat in tamelijk geconcentreerde oplossing wordt bereid, eerst eene afscheiding van olieach-

tige druppeltjes, die zich allengs op den bodem van het vat als eene gele amorphe taaie harsachtige massa afzetten, maar deze gaat allengs geheel in eene kristallijne massa over. Lost men die in kokend water op of zorgt men bij de straks beschreven proef, dat de oplossingen een verdunningsgraad hebben, waarbij zich slechts weinig zout kan afzetten, dan verkrijgt men ongekleurde duidelijke kristalletjes. De waterige oplossing van het zout is zeer onderhevig aan oververzadiging.

Bepaling van kristalwater. 0.4788 gram zout verloren bij drogen op 130° C. 0.0268 gram water = 5.6 pCt. De formule eischt insgelijks 5,6 pCt.

Bepaling van de oplosbaarheid in water. 22.527 gram van eene bij 18° C. verzadigde oplossing lieten bij verdamping en verder drogen op 140° een overschot achter van 0.0511 gram. Hieruit berekent men voor de oplosbaarheid van het waterhoudende zout 1 : 407.

Neutraal oxalaat. $C_{19} H_{22} N_2 O_2, C_2 H_2 O_4 + x H_2 O$. Lost men onder zachte verwarming 1 mol. cupreïne in eene geconcentreerde oplossing van 1 mol. zuringzuur op, zoo verkrijgt men eene strooperige vloeistof, die bij verdere verwarming plotseling eene groote hoeveelheid van een wit zout afscheidt. Dit zout is het voorgaande basische. Brengt men door toevoeging van meer water en verwarming alles weder in oplossing zoo kristalliseert bij bekoeling allengs het basische oxalaat in fraaie netgevormde kristallen. De afgegoten vloeistof gaat hiermede voort, tot dat er ten laatste een vocht overblijft, dat tot eene gomachtige massa uitdroogt.

Basisch tartraat. $2 (C_{19} H_{22} N_2 O_2), C_4 H_6 O_6 + 2 H_2 O$. Deze verbinding kristalliseert door toevoeging van alkalitartraat bij eene warme niet te verdunde oplossing van basisch hydrochloraat of nitraat in den vorm van dunne witte naaldjes.

Hesse, die het zout beschrijft, vond dezelfde samenstelling als hier boven aangegeven is. Mijne uitkomsten waren de volgende:

1) 0.6233 gram tartraat verloren bij drogen op 140° C.

0.0289 gr. H_2O = 4.6 pCt. 2) 0 8984 gram tartraat verloren bij drogen op 140° 0.0418 gr. H_2O = 4.6 pCt. De formule eischt 4.4 pCt. Het geheele gehalte aan kristalwater wordt door staan aan de lucht allengs weder opgenomen.

Zooals reeds Paul en Cownley opmerkten, is het zout iets meer oplosbaar dan het overeenkomstige tartraat van kinine en cinchonidine; dit blijkt uit het resultaat van de volgende proef.

10.1390 gram van eene bij 16° verzadigde oplossing leverden bij verdamping en droging op 150° een overschot, wegende 0.0017 gram. Hieruit berekent men voor de oplosbaarheid van het waterhoudende zout 1 : 571.

Neutraal tartraat. Het is mij tot nog toe niet gelukt, deze verbinding in kristallen te verkrijgen. Voegt men één molecule wijnsteenzuur en één molecule cupreïne bij elkaar onder toevoeging van eenig water ter oplossing, dan verkrijgt men geene homogene vloeistof; er wordt eene zekere hoeveelheid basisch tartraat gevormd, die niet oplost en er blijft eene zure vloeistof over, die bij voorzichtig uitdampen een amorph overschot achterlaat, waarin zich hier en daar kristalletjes, waarschijnlijk van het zure tartraat, vertoonen.

Zuur tartraat. $C_{19}H_{22}N_2O_2$, $2C_4H_6O_6 + H_2O$. Bij eene proef voegde ik 1 molecule cupreïne en eene geconcentreerde oplossing van 4 mol. wijnsteenzuur bij elkaar. Bij lang verwarmen loste alles tot eene heldere vloeistof op, die in een smal en hoog bekerglas onder een exsiccator verdampt, eindelijk vrij groote kleurlooze kristallen afzette. Deze, met warm water behandeld, ondergingen eene ontleding, waarbij basisch tartraat werd gevormd.

0.4847 gram van dit zout verloren bij drogen op 135° C. 0.0120 gr. H_2O = 2.5 pCt. Het residu, met water gekookt en met 0.885 × normale kalioplossing getitreerd, vorderde 2.5 C. C. daarvan, om eene neutrale reactie te voorschijn te brengen. Hieruit berekent men voor het wijnsteenzuurgehalte, dat vrij gekomen is ($^3/_4$ van het geheel) 0.16593 gr. = 34.3 pCt.

De aangegevene formule van het zure zout vordert 2.9 pCt.

water en 35.8 pCt. vrij wijnsteenzuur. De afwijking tusschen de berekende en de gevondene hoeveelheid wijnsteenzuur laat zich verklaren uit de geringe hoeveelheid stof, die ik voor de analyse kon gebruiken.

Neutraal chloroplatinaat. $C_{19} H_{22} N_2 O_2, H_2 Pt Cl_6 + H_2 O$. HESSE geeft voor het kristalwater van dit zout op een gehalte van 2.28 pCt. beantwoordende aan 1 $H_2 O$. Het door mij bij dubbele ontleding van neutraal hydrochloraat met platinachloorwaterstofzuur bereide praeparaat bevatte eveneens 1 $H_2 O$, zooals blijkt uit het volgende:

0.9461 gram verloren na drogen op 150° 0.0217 gram water = 2.3 pCt.

De formule eischt een gehalte van 2.44 pCt.

Het schijnt echter, dat het lichaam ook watervrij kan voorkomen, want een ander maal verloor eene hoeveelheid van 0.5727 gr. bij drogen op 150° slechts 0.0028 gr. d. i. $^1/_2$ pCt. water.

Wanneer men de uitkomsten vergelijkt, die ten aanzien van het S. D. V. der cupreïnezouten in waterige oplossing onder nagenoeg gelijke voorwaarden van concentratie zijn verkregen, dan ziet men weder hetzelfde verschijnsel, waarop ik reeds vroeger herhaaldelijk opmerkzaam heb gemaakt, namelijk dat aan het alkaloïde in basische en neutrale zouten een verschillend eigen S. D. V. toekomt en wel zóó, dat dit voor elke reeks van zouten nagenoeg gelijk is. Het S. D. V. is in de basische verbindingen steeds veel lager dan in de neutrale.

Wat dus vroeger vooral bij de twee door mij onderzochte alkaloïden apocinchonine en hydrochloorapocinchonine duidelijk werd aangetoond *), vinden wij hier terug. Dit blijkt voldoende uit het volgende tabelletje, waarin de S. D. V. zijn opgenomen, welke ik voor verdunde oplossingen van nagenoeg gelijke concentratie heb waargenomen.

*) *Verslagen en Mededeelingen der K. A. v. W.*, Deel XVIII, blz. 1 en vervolg.

Namen der zuren, waaraan het alkaloïde is gebonden.	S. D. V. van het alkaloïde in oplossingen van basische zouten.	S. D. V. van het alkaloïde in oplossingen van neutrale zouten.
Chloorwaterstofzuur............	— 182°0	— 282°6
Broomwaterstofzuur............	— 191°1	— 287°7
Joodwaterstofzuur...............	— 178°1	— 283°2
Salpeterzuur....................	— 182°5	— 289°1
Chloorzuur......................	— 184°4	——
Zwavelzuur	——	— 289°9
Mierenzuur	— 188°0	——

Waarschijnlijk zullen de maxima van S. D. V., verkregen door aan één molecule van het alkaloïde in hetzelfde volumen vloeistof betrekkelijk meer en meer zuur toe te voegen, eene nog betere overeenkomst toonen, dan de in de laatste kolom opgenomen cijfers.

In elk geval bevestigt het thans verkregen resultaat mij op nieuw in de vroeger uitgesproken meening, dat de bepaling van het S. D. V. een middel kan opleveren, om het scheikundig karakter van optisch actieve alkaloïden te leeren kennen en te beslissen of zij één-, twee- of meerzurig zijn.

NOTIZ ÜBER DEN ANGEBLICH FOSSILEN,

MENSCHLICHEN UNTERKIEFER

VOM CABERGE BEI MAASTRICHT.

VON

K. MARTIN.

Beim Ausgraben der Zuid-Willemsvaart wurde im Jahre 1823 zwischen Maastricht und dem gegenüber Itteren an der Maas gelegenen Hocht eine Reihe von vorweltlichen Thierresten, menschlichen Gebeinen und anderen Gegenständen gefunden. Hierunter war auch ein menschlicher Unterkiefer, den Crahay für fossil erklärte, und welcher seither in der anthropologischen Literatur wiederholt genannt worden ist, indem er verschiedenen Forschern als Ausgangspunkt weittragender Spekulationen diente *).

Aus solchem Anlasse ersuchte mich G. de Mortillet im Jahre 1880 um einen Gypsabguss der »célèbre mâchoire humaine des alluvions quaternaires de Maestricht", in der Meinung, dass der Unterkiefer im Leidener Museum vor-

*) Vgl. Hierüber: Casimir Ubaghs. L'âge et l'homme préhistorique et ses utensiles de la station lacustre près Maastricht. Ruremonde (Jahreszahl fehlt). — Hier finden sich auch ausführliche Auszüge aus der Mittheilung Crahay's, die ursprünglich erschienen ist im: *Messager des sciences et des arts,* première livr. 1823, Gand. Ich stütze mich auf diese Auszüge, da es mir nicht gelang, die Originalarbeit zu erhalten.

handen sei. Freilich war dies nicht der Fall; aber es gelang mir, im zoologischen Reichs-Museum ein sehr sorgfältig gezeichnetes Profil aufzufinden, in das die Fundorte des Kiefers und der diluvialen Thierreste eingetragen waren und welches G. A. v. d. Dussen, Opzichter van den Waterstaat, 1824 gezeichnet hatte. Derselbe hatte auch die betreffenden Objekte gesammelt, und bereits in 1823 war von letzteren ein ausführlicher, beschreibender Catalog angelegt worden, der sich im Archive des geologischen Museums vorfand. Auch war in der Sammlung eine grosse Zahl der ausgegrabenen Knochen und Zähne vorhanden, während das Uebrige in verschiedene andere Museen zerstreut worden ist.

Das gesammte Material von diluvialen Resten und von Aufzeichnungen gestattete mir schon damals, den Schluss zu ziehen, dass der in Rede stehende Unterkiefer vielleicht gar nicht fossil sei, und ich theilte das Resultat meiner Untersuchung G. de Mortillet mit, ohne indessen je zu erfahren, ob Derselbe hiervon Gebrauch gemacht habe. Das Gleiche berichtete ich später mündlich Herrn Ubaghs, welcher l. c. meine Zweifel theilt — freilich zum Theil aus irrigen Gründen, da er sich im Wesentlichen auf die in mehrfacher Hinsicht unrichtigen Angaben von Crahay stützte *). Die Frage, ob der menschliche Ueberrest fossil sei, blieb auch bei Ubaghs noch offen.

Inzwischen stellte sich heraus, dass der Unterkiefer im anatomischen Cabinete der Leidener Universität sich befinde †), woselbst er Herrn T. Zaaijer lange bekannt war. Durch die Güte des Letzteren ist jetzt der menschliche Ueberrest wieder dem geologischen Museum einverleibt worden, um mit den

---

*) l. c. pag. 49.

†) Dass derselbe wirklich der gesuchte Kiefer sei, war nicht im mindesten zweifelhaft, da er die Nummer 45 trug, welche auch Catalog und Profil für den Gegenstand angaben. Handschrift und Art der Befestigung der Nummer auf dem Kiefer stimmen auch durchaus mit dem überein, was die Nummern der im geologischen Museum befindlichen thierischen Reste zeigen. Endlich war ihm noch eine lose Etiquette zugefügt, welche lautet: „ad prof. 15 ped. e Kaberg".

übrigen, bei Anlage der Willemsvaart gefundenen Objekten zusammen aufbewahrt zu werden. Es schien mir deswegen nicht überflüssig, an der Hand der alten authentischen Schriftstücke und der Sammlung selbst mitzutheilen, was vom geologischen Gesichtspunkte aus über den Fund des Unterkiefers zu sagen ist.

Der Unterkiefer ist im Caberge gefunden. Darunter versteht man ein niedriges, im N.W. von Maastricht gelegenes Plateau, welches sich bis Smeermaas ausdehnt und weiter nördlich über den Ort hinaus fortsetzt, hier aber nicht mehr als Caberg bezeichnet wird. Es erhebt sich etwa 20 m. über das Niveau der Zuid-Willemsvaart, und da die Schleuse der letzteren bei Maastricht ungefähr 47 m. über A.P. liegt *), so besitzt es demnach ± 70 m. Meereshöhe. In der Gegend von Smeermaas tritt das Plateau nahe an die Maas hinan und wurde es beim Graben des Canals angeschnitten. Das erwähnte Profil v. d. Dussen's bezieht sich auf diesen Anschnitt; es stellt den Aufschluss im Caberge südlich von Smeermaas dar und weiter nördlich von genanntem Orte den Aufschluss längs der Maas bis zu dem niedrigen Landstriche im Süden van Hocht. Soweit das Profil den Caberg betrifft, ist es in verkleinerter Copie diesen Zeilen beigefügt.

Staring giebt auf seiner Karte an, dass der Caberg und die Höhe von Smeermaas längs des Canals von Löss bedeckt werden; weiter nordwestlich von Smeermaas folgt zunächst Sand- und bald darauf Maasdiluvium. Den Untergrund des Cabergs kennt Staring nicht; derselbe vermuthet nur, dass er der Kreideformation angehöre †). Dewalque, welcher auf seiner Karte die älteren Formationen abgedeckt angelegt hat §), verzeichnet in der betreffenden Gegend Tertiär (Oligocän), und Ubaghs befindet sich somit in Einklang hiermit, wenn er in dem seiner Arbeit beigegebenen Profile von unten nach

---

*) L. Cohen Stuart, H. G. van de Sande Bakhuyzen en G. van Diessen, *Uitkomsten der Rijkswaterpassing.* 1888, pag. 21.

†) *Bodem van Nederland.* II, pag. 321.

§) *Carte géologique de la Belgique* 1 : 500.000.

oben folgen lässt: Tertiär (Tongrien), Maasdiluvium und Löss. Von der Richtigkeit dieses Profils, und besonders auch von dem Vorkommen eines typischen Lösses im Caberge, konnte ich mich überdies durch eine für das Leidener Museum von UBAGHS erworbene Sammlung überzeugen.

Das erwähnte Profil v. d. DUSSEN's giebt nun auch bereits drei verschiedene Schichten an: zu unterst einen blauen, muschelführenden Lehm, welcher unterhalb des Niveaus der Maas ansteht und dessen Alter sich auf Grund der vorliegenden Daten nicht mehr bestimmen lässt; darauf die »Kieselbank'' genannte Schicht, welche den Beschreibungen zufolge ohne Zweifel als Maasdiluvium aufzufassen ist; endlich die »gelbe Erde'', welche der Lössformation gleichzustellen ist. Dass Maasdiluvium und Löss in den Hauptzügen richtig durch v. d. DUSSEN geschieden sind, kann nach dem Studium des Catalogs nicht zweifelhaft sein, zumal auch die für die jüngere Schicht angegebene Mächtigkeit sehr gut mit der Darstellung von UBAGHS übereinstimmt.

In beiden Schichten, sowohl im Maasdiluvium als auch im Löss, ist eine grosse Anzahl vorweltlicher Thierreste, vor allem von *Elephas primigenius*, gefunden, und zwar befand sich der reichste Fundort unmittelbar nördlich von dem durch Smeermaas führenden Wege. Hier zeigte sich eine Depression im Profile des Maasdiluviums, welche später vom Löss angefüllt und ausgeebnet wurde, und in ihr sind die meisten Knochen und Zähne gefunden, namentlich am Grunde, unmittelbar im Hangenden des Maasdiluviums. Unter anderen stammt hieher ein prächtig erhaltener Mammuth-Unterkiefer mit Zähnen, den das Leidener Museum besitzt (N⁰. 1; L. M.) *), und verschiedene Molaren (N⁰. 7, 8 u. 12; L. M.) sind aus demselben Löss abkünftig.

Der menschliche Unterkiefer des Cabergs ist ebenfalls in der oberen Schicht, unmittelbar im Hangenden des Maasdiluviums gefunden (N⁰. 45; L. M.), und überträgt man das

---

*) Der Zusatz L. M., hier und im Folgenden, bedeutet, dass der Gegenstand sich im Leidener Geologischen Museum befindet.

Obige, von Smeermaas Mitgetheilte auch auf das Profil des Cabergs, so würde hienach dem in Rede stehenden Kiefer in der That ein hohes, vermuthlich jungdiluviales Alter, zukommen; wir würden in ihm den Rest eines Löss-Menschen zu sehen haben, und sein Vorkommen zusammen mit E. primigenius wäre durchaus erklärlich.

Nun lehrt aber das beigegebene Profil, dass im Caberge die jüngere beider Ablagerungen keine für Diluvium beweisende Versteinerungen geliefert hat: ihr entstummt nur der Unterkiefer und eine Anzahl von Knochen des Equus caballus, Wirbel, Beckentheile etc. (N^0. 44; L. M.). Der älteren Schicht (Maasdiluvium) gehören die Nummern 34—38, 40—43 und 81.1^0 an, und von diesen waren laut Catalog 34—38 Elephantenzähne; N^0. 35 ist auch unter dem Profile v. d. Dussen's abgebildet und hienach sicher als Molar von Elephas zu bestimmen, während 3 Bruchstücke von Molaren und viele von Stosszähnen aus der Staring'schen Sammlung (L. M.) den Nummern 34, 36, 37 u. 38 zu entsprechen scheinen *). Ausserdem ist ein Unterkieferfragment von E. primigenius, abkünftig vom Caberge, in der Sammlung Staring's vorhanden. Ueber N^0. 40—43 giebt der Catalog keinen näheren Aufschluss, als dass darunter grosse Knochen (vermuthlich Elephas) und Fragmente von Hörnern zu verstehen seien; N^0. 81, 1^0 endlich ist ein Gegenstand menschlichen Kunstfleisses, über den ich nichts weiter auszusagen vermag †).

Selbstredend ist nun das Fehlen von diluvialen Thierresten in der jüngeren Schicht des Cabergs an und für sich kein Beweis dagegen, dass dieselbe auch hier dem Löss angehöre und der betreffenden jungdiluvialen Ablagerung von Smeermaas gleichzustellen sei; aber der Zusatz des Catalogs zu

---

*) Sie tragen nur die Angabe „Caberg", nicht eine auf das Profil bezügliche Nummer.

†) Der Catalog sagt hierüber wörtlich: „een klein antiek beeldwerk ter diepte van 14 ellen in zwarte kiezelgrond nabij het midden der doorsnede van den berg (omtrent de echtheid van dit stukje is het meest mogelijk onderzoek gedaan").

N⁰. 45 erregt grosse Bedenken. Denn hienach wurde der Kiefer in einem Sande gefunden, der deutlich geschichtet und in wellig gebogenen Lagen abgesetzt war (»in geele zand of zavelgrond, welke in onderscheidene serpenteerende stroomlagen was afgedeeld; van beneden deze natuurlijke lagen was eene bank van kiezel"). Bekanntlich hat aber der Löss ein ungeschichtetes Aeussere, und ist demnach der menschliche Unterkiefer sicherlich nicht in dieser Formation gefunden, wenngleich letztere an anderen Stellen des Plateaus des Cabergs eine grosse Verbreitung haben mag. Er könnte freilich aus Sedimenten stammen, die mit Löss wechsellagern; aber die einfachste Erklärung scheint mir die zu sein, dass das Lössplateau von Wasserrissen durchfurcht und sein Material stellenweise umgelagert worden ist, so dass sich der menschliche Unterkiefer in einer Bildung des jüngeren alluvialen Zeitalters befand. Dass v. d. Dussen diese umgelagerten Sedimente nicht von dem Löss auf primärer Lagerstätte unterschieden hat, würde sehr erklärlich scheinen.

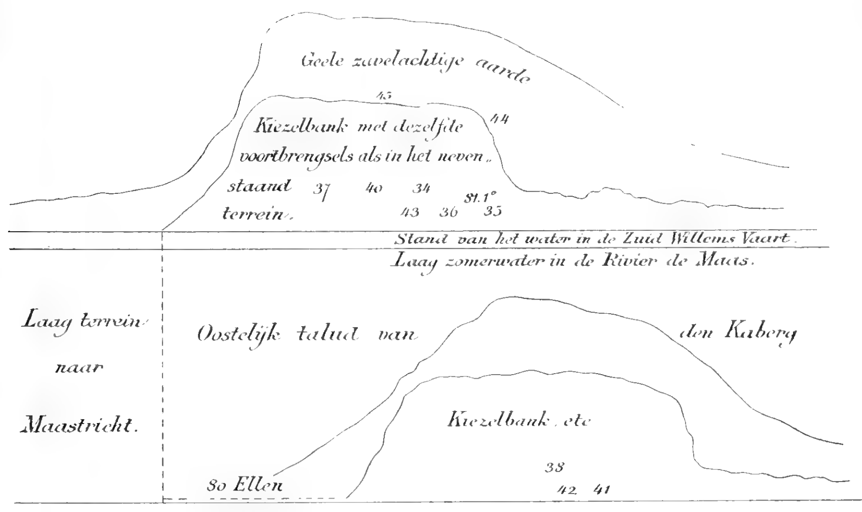
Obige Schlussfolgerung konnte ich, wie erwähnt, schon ziehen, bevor ich noch den Kiefer selbst gesehen; seit ich aber das Original untersucht habe, bin ich noch mehr in der Auffassung bestärkt worden, dass demselben unmöglich ein sehr hohes Alter zugeschrieben werden darf. Denn der Kiefer macht gar nicht den Eindruck eines Fossils, sieht vielmehr aus, als ob man ihn vom Kirchhofe aufgelesen hätte, ganz im Gegensatze zu den übrigen Resten, so auch den Knochen von Equus caballus, welche in der oberen Schicht des Cabergs, etwas tiefer und weiter nördlich, gefunden sind. Das ist auch den Sammlern der Objekte schon aufgefallen; denn es wird angegeben, dass man die Knochen der Wirbelthiere in Folge ihrer grossen Weichheit mit den Fingern kneten konnte, was bei dem menschlichen Ueberreste dagegen nicht der Fall war.

Rechnet man hinzu, dass der Kiefer laut der Erklärung meines Collegen Zaaijer und anderer Anatomen in seiner Form durchaus nichts Bemerkenswerthes zeigt, dass er ferner von Arbeitern aufgelesen ist, dass endlich Lösswände leicht

vertikal abblättern und so zu Missverständnissen beim Graben, in Folge von Einstürzen, unschwer Veranlassung geben können — so wird man vielleicht auch der oben gemachten Annahme nicht einmal beipflichten wollen, nach welcher der Unterkiefer aus dem Alluvium stamme, sondern ihn mit einiger Wahrscheinlichkeit einem Zeitgenossen zuschreiben dürfen.

Jedenfalls fehlt jeder hinreichende Grund, um von einem diluvialen Menschen aus dem Caberge von Maastricht zu sprechen.

Novbr 1888.



hoogte : lengte = 5 : 1.

G. A. v. d. Dussen.
1 Mei 1824.

VERSLAG

OVER EEN

VERHANDELING VAN **J. CARDINAAL.**

MEETKUNDIGE THEORIE DER SCHEEVE OPPERVLAKKEN VAN DE VIERDE ORDE.

(Voorgedragen in de Vergadering van 23 November 1888).



De verhandeling van den Heer J. CARDINAAL, over welke wij de eer hebben verslag uit te brengen, bevat in hoofdzaak een langs meetkundigen weg afgeleide verdeeling dier oppervlakken.

De schrijver doet onmiddellijk uitkomen, dat de door hem verkregen resultaten vóór hem reeds door anderen, als CAYLEY, CHASLES, CREMONA, REYE, ROHN, SALMON, SCHWARZ, enz. gevonden zijn. Toch wenschen wij deze vergadering voor te stellen, zijn verhandeling in de Verslagen en Mededeelingen te doen opnemen, omdat de weg, die hier tot bekende uitkomsten leidt, geheel nieuw is en verdient te worden openbaar gemaakt. Om dit in het licht te stellen zij het ons vergund, eerst in het kort de door de genoemde wiskundigen tot de bedoelde classificatie gebruikte hulpmiddelen na te gaan, om daarna het door den Heer CARDINAAL gevolgde beginsel daarnaast te stellen.

Een der belangrijkste scheeve oppervlakken van den vierden graad is in 1861 door CHASLES als in het voorbijgaan in de fransche Akademie ter sprake gebracht. CHASLES stelde zich toen voor, dat men een hyperboloïde met één blad door twee vlakken snijdt, dat men op deze doorsneden

de projectivische puntreeksen aanteekent, die er door de beschrijvende lijnen van een der beide stelsels op worden bepaald, en dat men de overeenkomstige punten dier projectivische puntreeksen vereenigt, nadat men een der beide doorsneden in haar geheel met betrekking tot de andere heeft verplaatst. Hij beschouwde dus dit oppervlak, dat we verder het »*oppervlak van* CHASLES" zullen noemen, als de meetkundige plaats der verbindingslijn van twee overeenkomstige punten van twee projectivische puntreeksen, die twee kegelsneden tot dragers hebben. En nog in hetzelfde jaar deelde hij mede, dat weldra van zijn hand een stelselmatige indeeling der regelvlakken van de vierde orde in *veertien* soorten verschijnen zou; deze indeeling heeft echter voor altijd op zich laten wachten.

Daarna was het CAYLEY, die zich met de indeeling der scheeve oppervlakken bezig hield. In zijn bekende drie verhandelingen »*On skew surfaces, otherwise scrolls*" beschouwt hij in het algemeen de oppervlakken S (m, n, p) voortgebracht door de beweging van een rechte lijn, die over drie kromme richtlijnen achtereenvolgens van de graden m, n, p heenglijdt. En na deze inleiding geeft hij een overzicht van de verschillende scheeve oppervlakken van den derden en vierden graad. Daarbij maakt hij hoofdzakelijk gebruik van de reeds vele jaren vroeger door hem gevonden stelling omtrent den graad der *dubbelkromme* van een scheef oppervlak, en onderscheidt hij *acht* verschillende soorten van scheeve oppervlakken van den vierden graad. Aan deze acht soorten heeft hij later nog tweemaal, op aanwijzing eerst van CREMONA en daarna van SCHWARZ, een paar nieuwe moeten toevoegen; van elk dezer *twaalf* soorten geeft hij bovendien de vergelijking aan met betrekking tot een homogeen coördinatenstelsel, dat een bepaalde ligging heeft ten opzichte van de dubbelkromme of haar samenstellende deelen. Zeer merkwaardig is o. i. zijn beschouwing van het oppervlak van CHASLES als de meetkundige plaats van de tot een lineair complex behoorende stralen, die koorden zijn van een bepaalde ruimtekromme van den derden graad.

Het is de verdienste van ons buitenlandsch lid CREMONA

bij de verdeeling, die ons thans bezig houdt, een tweede kenmerk op den voorgrond te hebben gebracht, door naast de dubbelkromme het ontwikkelbare oppervlak omhuld door de dubbelrakende vlakken van het scheeve oppervlak in de beschouwing op te nemen. Omtrent dit »*bitangent torse*" waren reeds in 1852 door CAYLEY verschillende belangrijke stellingen ontwikkeld, o. a. dat zijn klasse steeds aan den graad van de dubbelkromme gelijk is, enz. Door zich de bij twee punten der dubbelkromme behoorende dubbelraakvlakken en de in deze gelegene kegelsneden voor te stellen, kwam CREMONA tot de voortbrenging van het oppervlak van CHASLES terug. En door nu de verschillende mogelijke gevallen zoowel van dubbelkromme als van dubbelrakend ontwikkelbaar oppervlak na te gaan, kwam hij in zijn verhandeling »*Sulle superficie gobbe di quarto grado*" dadelijk tot *twaalf* soorten, die meetkundig van elkaar worden onderscheiden. Zijn verdeeling is vrij algemeen in gebruik.

De in zijn bekende handboeken door SALMON ontwikkelde behandeling der scheeve oppervlakken van de vierde orde, die bijna geheel berust op een onderzoek der verschillende vormen van de vergelijking dier oppervlakken, heeft weinig punten van aanraking met de meetkundige beschouwingen van den Heer CARDINAAL. We bepalen ons dus tot de opmerking, dat de uitkomsten van SALMON volkomen met die van CAYLEY en CREMONA overeenstemmen.

Wat in zijn »*Geometrie der Lage*" door REYE omtrent regeloppervlakken van den vierden graad geleverd is, mag hier allerminst worden gemist. Want van alles wat omtrent deze oppervlakken geschreven is, heeft de door REYE gevondene voortbrengingswijze nog wel de meeste aanrakingspunten met het door den Heer CARDINAAL aan zijn classificatie ten grondslag gelegde nieuwe beginsel. REYE laat nl. de raakvlakken van twee niet concentrische kegelvlakken van den tweeden graad één aan één met elkaar overeenkomen en vindt dan langs dezen weg, dualistisch tegengesteld aan den door CHASLES gevolgden, het oppervlak van CHASLES terug. Maar het kon niet in de bedoeling van REYE liggen aldus tot een verdeeling onzer oppervlakken te geraken.

Eindelijk is nog door Rohn een nieuw middel ter classificatie van de bedoelde oppervlakken gegeven. Rohn beschouwde de reeds door Cremona aangegevene twee hoofdgroepen der scheeve oppervlakken van den vierden graad, nl. de oppervlakken van het nulde geslacht, die dus een *ruimtekromme van den derden graad* tot dubbelkromme hebben, en de oppervlakken van het eerste geslacht, wier dubbelkromme uit *twee elkaar kruisende lijnen* is samengesteld, als de meetkundige plaats der verbindingslijn van de overeenkomstige punten van twee puntreeksen, tusschen welke een verwantschap (2,2) bestaat; bij de oppervlakken van de tweede groep zijn deze puntreeksen over de beide rechte lijnen uitgespreid; bij die van de eerste hebben zij de kubische dubbelkromme tot gemeenschappelijken drager. Dit denkbeeld wordt door Rohn stelkundig uitgewerkt en tevens ten grondslag gelegd aan de constructie van tien modellen, door de firma L. Brill in Darmstadt in den handel gebracht.

Bedenkt men nu, dat Schwarz zich in 1869 reeds met de classificatie der scheeve oppervlakken van den vijfden graad ging bezig houden, omdat deze de oppervlakken van den vierden graad grondig genoeg onderzocht achtte, dan behoort er eenige moed toe de litteratuur over dit onderwerp thans nog te vermeerderen. En toch heeft o. i. de verhandeling van den Heer Cardinaal ook thans nog alle recht van bestaan. Want het door hem ontwikkelde beginsel om de indeeling der scheeve oppervlakken van den vierden graad te gronden op de algemeene voortbrengingswijze van een niet regelrecht oppervlak met behulp van twee projectivische bundels van oppervlakken van den tweeden graad is geheel nieuw. Immers, tusschen de door Reye en door den Heer Cardinaal aangegeven voortbrengingswijzen bestaat slechts deze overeenkomst, dat het oppervlak bij beiden de meetkundige plaats is der snijlijn van de overeenkomstige elementen van twee projectivische bundels; maar deze familietrek is o. i. zoo ondergeschikt, dat men in het werk van Reye de kiem niet zien mag van de verhandeling van den Heer Cardinaal. Want verder is alles verschil. Bij Reye zijn de

bundels vlakkenbundels, bij CARDINAAL zijn het bundels van oppervlakken; bij REYE is het bewegend element reeds dadelijk een rechte lijn, bij CARDINAAL moeten juist die bijzondere gevallen worden opgezocht, waarin de bewegende deelen der ruimtedoorsnee van den vierden graad rechte lijnen worden, enz.

In deze laatste opmerking is naar onze meening tevens het verdienstelijke van de in onze handen gestelde verhandeling aangewezen. Want heeft men eenmaal het denkbeeld opgevat, te onderzoeken in welke verschillende gevallen het bewegende deel der doorsnee van de overeenkomstige oppervlakken van twee projectivische bundels van den tweeden graad uit een of meer rechte lijnen bestaat, dan volgt het overige bijna van zelf. Dan komt men met den Heer CARDINAAL onmiddellijk tot acht groepen van oppervlakken, die zich tot vier reduceeren, en levert ook de onderverdeeling van elk dezer groepen bijna geen moeielijkheden meer op. Alleen de meetkundige onderscheiding der verschillende vormen, die samenhangen met het al of niet bestaanbaar zijn der »vertakkingspunten" der beide puntreeksen van ROHN, tusschen welke een verwantschap (2,2) bestaat, der zoogenaamde *pinch-points* van CAYLEY, kan dan verder nog bezwaren opleveren; deze bezwaren zijn echter door den Heer CARDINAAL met behulp van de bekende vormen der vlakke kromme van den derden graad op verdienstelijke wijze uit den weg geruimd.

Wij wenschen nog één opmerking te maken. De Heer CARDINAAL heeft van elk zijner groepen eenige soorten afgeleid, en deze eenvoudig naast elkaar geschikt zonder ook maar eenigzins aan te wijzen in welke rangverhouding deze soorten tot elkaar staan, zonder van een paar soorten aan te geven of ze gelijkwaardig en dus aan elkaar gecoördineerd zijn dan wel of de een minder algemeen dan de ander en dus aan deze gesubordineerd is. Zoo bevat de eerste groep drie soorten, die eenvoudig naast elkaar gesteld worden, hoewel de eerste en tweede aan elkaar gelijkwaardig zijn en alleen verschil opleveren met betrekking tot bestaanbaarheid, terwijl de derde de grens vormt tus-

schen beide en van deze dus een gemeenschappelijk bijzonder geval uitmaakt. We achten het vooral van belang hierop te wijzen, omdat de aangestipte onvolledigheid bij al de tot heden geleverde indeelingen der scheeve oppervlakken van den vierden graad in bijna dezelfde mate wordt aangetroffen en er in het algemeen bij deze classificatie te weinig gelet is op het onderscheid tusschen verschillen van coördinatie als verschil in ligging met betrekking tot het vlak in het oneindige, verschil in bestaanbaarheid, enz. en verschillen van subordinatie, die in de eerste plaats in aanmerking behooren te komen. Zoo vinden we bijv. niet aangegeven — wat overigens zeer duidelijk is — dat het zevende oppervlak van CREMONA, d. i. de meetkundige plaats van de koorden eener kubische ruimtekromme, die een gegeven rechte lijn snijden, een bijzonder geval is van het eerste oppervlak van CREMONA, d. i. van het oppervlak van CHASLES, evenals de vereeniging van alle lijnen die een gegeven lijn snijden een bijzonder geval vormt van een lineair complex. Natuurlijk is de vermelding van het *constantenaantal* der oppervlakkensoort, d. i. van het aantal punten, waardoor het oppervlak — zij het dan ook niet ondubbelzinnig — bepaald wordt, het middel om de bedoelde onvolledigheid geheel weg te nemen.

Terwijl wij den Heer CARDINAAL dit punt ter overweging aanbevelen, eindigen wij met de verzekering, dat we ook zelfs zonder de bijvoeging dier getallen de verhandeling gaarne in de Verslagen en Mededeelingen zullen zien verschijnen.

Amsterdam, 23 Nov. 1888.

P. H. SCHOUTE,
D. BIERENS DE HAAN

MEETKUNDIGE THEORIE

DER

SCHEEVE OPPERVLAKKEN VAN DE VIERDE ORDE.

DOOR

J. CARDINAAL.

Leeraar aan de H. B. S. te Tilburg.



I. Inleiding.

1. Onder de oppervlakken van hoogere orde behooren de scheeve oppervlakken tot die, welker gedaante en eigenschappen het beste kunnen worden nagegaan. Voor zoover het betreft oppervlakken van de vierde orde, is dit dan ook geschied in vele wiskundige verhandelingen, van welke de volgende genoemd worden:

Chasles, *Mémoire sur les surfaces du* 3e et 4e *degré.* Comptes rendus. T. 52 blz. 1099 en T. 53 blz. 888.

Cayley, *Philosophical transactions.* Vol. 153, 154, 159, *Memoirs on Skew surfaces, otherwise Scrolls.*

Reye, *Geometrie der Lage II.* Vortrag 15 (2e druk).

H. A. Schwarz, Crelle's *Journal.* Bd. 67.

Cremona, *Sulle superficie gobbe die quarto grado.*

K. Rohn, *Math. Annalen.* Bd. XVIII en Bd. XXIV.

K. Rohn, *Die verschiedenen Arten der Regelflächen vierter Ordnung;* geschrift behoorende bij de verzameling mathematische modellen van Brill te Darmstadt.

Salmon, *Analytische Geometrie des Raumes*, II, p. 430—442 (3e druk).

2. Het zij mij vergund, met enkele woorden eenige uit-

komsten dezer verhandelingen, voor zooverre het voor dit opstel noodig is, te zamen te vatten. CAYLEY geraakte het eerste tot eene ordening der scheeve oppervlakken van de vierde orde door eene vlakke doorsnede te bepalen. Opmerkende, dat het oppervlak noodzakelijk eene dubbelkromme en dus eene doorsnede minstens twee dubbelpunten bevatten moet, en de verschillende gevallen van dubbelpunten beschouwende in verband met de dubbelkrommen, uit welke deze ontstaan, kwam CAYLEY tot acht soorten.

SCHWARZ deelde schriftelijk aan CAYLEY mede, dat hij nog twee andere wijzen van ontstaan ontdekt had, en weldra vulde CREMONA het getal soorten tot twaalf aan, met de opmerking, dat deze aanvulling haar ontstaan te danken had aan het invoeren van het dubbelrakende ontwikkelbaar oppervlak (bitangent torse), 'tgeen eerst door CAYLEY niet geschied was *).

3. Eene groote uitbreiding onderging de kennis van de gedaante der scheeve oppervlakken van de vierde orde, toen, naar aanwijzing van K. ROHN, de firma BRILL te Darmstadt 10 typen van deze werkelijk uit zijden draden vervaardigde; de door ROHN aan deze oppervlakken toegevoegde verhandeling geeft een ongemeen helder inzicht in de verschillende vormen †). In deze verhandeling gaat de schrijver uit van vergelijkingen; de verschillende vormen dezer vergelijkingen dienen als uitgangspunten ter beredeneering van de eigenschappen en de verschillende gedaanten van het oppervlak.

Langs een geheel anderen weg komt REYE tot eenige typen van scheeve oppervlakken van de vierde orde. Bij de bespreking van het stralenstelsel van de eerste orde merkt hij op, dat stralen van dit stelsel, aan enkele beperkende voorwaarden onderworpen, een scheef oppervlak doen ont-

---

*) Deze mededeeling geschiedt door CAYLEY zelven in de derde der aangehaalde verhandelingen.

†) Een dezer modellen bevindt zich aan de Universiteit te Amsterdam. Met de meeste welwillendheid werd ik in de gelegenheid gesteld, dit eenigen tijd te kunnen bestudeeren.

staan, en leidt hij als gevolg af, dat, wanneer de raakvlakken van twee kegelvlakken van den tweeden graad in projectief verband gesteld worden, de snijlijnen van de homologe raakvlakken een scheef oppervlak van de vierde orde beschrijven; slechts een deel der mogelijke vormen wordt evenwel op deze wijze verkregen. De laatste behandeling onderscheidt zich door haar zuiver meetkundigen grondslag van de voorgaande.

4. Het doel van de hier volgende behandeling is, langs zuiver meetkundigen weg tot eene volledige verdeeling en volkomen kennis van de vormen der scheeve oppervlakken van de vierde orde te geraken; daarbij zullen vooral de volgende twee punten in het licht gesteld worden.

Een scheef oppervlak van de vierde orde kan steeds door projectieve grondvormen geconstrueerd worden.

Alle soorten kunnen op deze wijze worden verkregen, en men kan tot een volledig inzicht van alle vormen geraken.

De uitkomsten zullen blijken overeen te stemmen met die, door Rohn langs analytischen weg verkregen.

5. Eenige bekende en voldoend bewezen meetkundige stellingen worden vooropgesteld, nl.

Een scheef oppervlak van de n^{de} orde is ook van de n^{de} klasse.

Twee projectieve bundels oppervlakken van de tweede orde beschrijven door de doorsnijding hunner homologe oppervlakken een oppervlak van de vierde orde O^4. Op dit oppervlak liggen twee stelsels scheeve krommen van de vierde orde en de eerste soort.

Elk tweetal krommen van een zelfde stelsel kan als basiskrommen dienen van twee bundels oppervlakken van de tweede orde, die O^4 doen ontstaan.

Door twee krommen, tot verschillende stelsels behoorende, kan een oppervlak van de tweede orde worden gebracht.

Aan deze stellingen kunnen de wederkeerige worden toegevoegd; men kan dus een oppervlak der vierde klasse construeeren door twee projectieve scharen oppervlakken van de tweede klasse.

II. Verdeeling in groepen.

6. Op grond der laatstgenoemde stellingen kan men uit projectieve bundels oppervlakken van de tweede orde een oppervlak van de vierde orde doen ontstaan; evenals een scheef oppervlak van de tweede orde door de beweging eener rechte lijn ontstaat, wordt dit oppervlak door de beweging eener scheeve kromme van de vierde orde beschreven.

Een scheef oppervlak R^4 zal evenwel alleen dan ontstaan, wanneer het bewegende element eene rechte lijn is. Hieruit volgt, dat twee homologe oppervlakken der beide bundels elkander zoodanig moeten snijden, dat de doorsnede òf wel uit eene rechte lijn, òf wel uit twee elkander kruisende lijnen bestaat. Opdat dit plaats grijpe, moet een deel der basiskrommen van beide bundels tezamenvallen; het overblijvende deel der doorsnijding zal dan, als de oppervlakken den geheelen bundel doorloopen, R^4 beschrijven. Daar nu de beide basiskrommen geheel op het oppervlak gelegen zijn, zullen hare twee samenvallende gedeelten eene dubbelkromme op het oppervlak vormen; men kan dus de oppervlakken verdeelen naar den aard der dubbelkromme. Hieruit volgt de navolgende verdeeling:

Eerste geval. De basiskrommen zijn twee scheeve vierzijden; twee overstaande zijden van de eene vierzijde vallen te zamen met twee overstaande zijden van de tweede.

Tweede geval. De basiskrommen bestaan beiden uit eene scheeve kromme van de derde orde met eene koorde. De kromme behoort tot de beide basiskrommen.

Derde geval. De wederkeerige wijze van ontstaan geeft aanleiding tot hetzelfde geval als het eerste, omdat eene scheeve vierzijde zoowel een bijzonder geval is van de basiskromme als van de basis-ontwikkelbare.

Vierde geval. Is wederkeerig met het tweede, waaruit volgt: De beide scharen oppervlakken van de tweede klasse zijn beschreven in eene gemeenschappelijke ontwikkelbare van de derde klasse, terwijl tot elk nog eene van wee verschillende assen der ontwikkelbare behoort.

Vijfde geval. Een der bundels is overgegaan in eene vlakken-involutie, welker as tevens de koorde is van eene scheeve kromme van de derde orde. De koorde met de kromme vormen de basiskromme van den tweeden bundel.

Zesde geval. De beide bundels zijn overgegaan in vlakken-involutiën.

De beschouwing der wederkeerige gevallen geeft wederom:

Zevende geval. Eene der scharen is overgegaan in eene punteninvolutie, welker draaglijn tevens eene as is van een ontwikkelbaar oppervlak der derde klasse. Deze ontwikkelbare vormt met de daarbij behoorende as de basis-ontwikkelbare der tweede schaar.

Achtste geval. De beide scharen zijn overgegaan in punteninvolutiën.

7. Deze opsomming bevat alle hoofdgevallen. De ontwikkeling zal evenwel doen zien, dat het eerste en derde geval volkomen overeenstemmen, terwijl het zesde en het achtste als een bijzonder geval van deze kunnen worden aangemerkt. Dezelfde overeenstemming zal blijken te bestaan tusschen het tweede en het vierde, waaruit nu de volgende verdeeling in groepen voortvloeit:

Eerste groep, bevattende de gevallen I, III, VI, VIII.

Tweede groep, bevattende de gevallen II, IV.

Derde groep, geval V.

Vierde groep, geval VII.

Bij de behandeling zal elk dezer groepen weder in onderdeelen gesplitst worden.

III. Eerste groep.

8. Bij de oppervlakken dezer groep zijn de volgende gevallen in het oog te houden:

Geval A. De te zamen vallende twee paren overstaande zijden der vierzijden, zijn bestaanbaar en liggen op eindigen afstand.

Geval B. Deze zijden zijn toegevoegd imaginair.

Geval C. Deze overstaande zijden liggen op oneindig kleinen afstand van elkander.

Elk dezer gevallen dient afzonderlijk behandeld te worden.

Geval A.

9. Laten gegeven zijn de elkaar kruisende lijnen d en d', benevens hare transversalen a_1, a_2; b_1, b_2. Neemt men nu als basiskromme van den eersten bundel $d\,d'\,a_1\,a_2$, van den tweeden $d\,d'\,b_1\,b_2$, dan komt met een oppervlak $A^2{}_n$ een oppervlak $B^2{}_n$ overeen. Er moet eerst worden nagegaan op welke wijze men de bundels in projectief verband met elkander kan stellen.

10. Men neme daartoe op d een punt P en beschouwe dit punt als middelpunt van twee concentrische stralenbundels in het vlak $P\,d'$; elke straal van één dezer bundels is eene beschrijvende lijn van het oppervlak $A^2{}_n$ en de daarmede homologe straal van den anderen eene beschrijvende lijn van een oppervlak $B^2{}_n$. De oppervlakken snijden elkander volgens nog twee transversalen van d en d'. Door de beweging van den straal wordt de geheele bundel oppervlakken beschreven en daardoor het scheeve oppervlak R^4. De twee dubbelstralen der beide projectieve stralenbundels zijn de beide beschrijvende lijnen, uit P gaande.

Het is licht in te zien, dat de voorgaande constructie ook omgekeerd opgevat kan worden; door d' een vlak π leggende, vindt men het punt P als snijpunt van π met d, en kan men weder de twee projectieve stralenbundels verkrijgen; door deze opmerking wordt de wederkeerigheid van het oppervlak met zichzelf nog nader toegelicht.

11. De doorsnijding van het oppervlak met een vlak π wordt verkregen door de doorsnijding van π met de verschillende oppervlakken van de bundels te construeeren. Daardoor ontstaan twee kegelsnedenbundels met de basispun-

De omhullingskegel uit een punt P aan het oppervlak R^4 wordt verkregen door de omhullingskegels uit P aan de verschillende oppervlakken van de bundels te construeeren. Deze zullen twee concentrische kegelscharen vormen met de basis-

ten: $D D' A_1 A_2$; $D D' B_1 B_2$; de snijpunten der homologe kegelsneden vormen eene vlakke kromme van de vierde orde c^4 met de beide dubbelpunten D en D'. Deze kromme zal dus van de achtste klasse zijn en acht dubbelraaklijnen bezitten. De doorsnijding verkrijgt eene eenvoudiger gedaante, wanneer men een vlak door eene beschrijvende lijn l van R^4 legt; deze lijn behoort tot de doorsnede, het overschietende deel is dan eene kromme van de derde orde c^3 zonder dubbelpunt, d. i. van de zesde klasse. De snijpunten van c^3 met l zijn de snijpunten van de dubbellijnen met het vlak π en het raakpunt van π met R^4.

vlakken: $\delta\delta' \alpha_1 \alpha_2$; $\delta\delta' \beta_1 \beta_2$; de gemeenschappelijke raakvlakken der homologe kegelvlakken omhullen een kegeloppervlak γ^4 van de vierde klasse met de beide dubbelraakvlakken δ en δ'. Dit kegeloppervlak is dus van de achtste orde en bezit acht dubbelstralen. De omhullingskegel verkrijgt eene eenvoudiger gedaante, wanneer men een punt aanneemt op eene beschrijvende lijn l van R^4; deze lijn is een straal tot den omhullingskegel behoorende; het overschietende deel γ^3 is dan een kegelvlak van de derde klasse en de zesde orde. De raakvlakken, door l aan γ^3 gebracht, zijn de vlakken, door P en de dubbellijnen gebracht en het raakvlak door P aan R^4.

12. Hieruit volgt, dat het oppervlak bepaald is door de beide dubbellijnen en acht punten. Men trekke namelijk eene beschrijvende lijn l door een der punten en legge door l een vlak π; de beschrijvende lijnen door de andere punten snijden π in zeven punten; deze en de snijpunten D en D' van l met d en d' zijn negen punten eener kromme van de derde orde, door welke deze doorsnede bepaald is. Om haar te construeeren, kieze men als basispunten van den kegelsnedenbundel D, D' en nog twee punten, en bepale het daarbij behoorende middelpunt C van den stralenbundel; de lijn l en de stralenbundel door C moeten worden beschouwd als tweede bundel van de in eene lijn met eene kromme van de derde orde overgegane kromme van de vierde orde. Op die wijze kan men een willekeurig aantal doorsneden bepalen.

De wederkeerige constructie geldt voor den omhullingskegel. Daar, volgens de constructie van krommen van de derde orde, elk willekeurig tweetal punten met D en D' als basispunten van den kegelsneden-bundel kan beschouwd worden, volgt hieruit, dat men elk tweetal transversalen van d en d' met dezen als basiskromme kan beschouwen van een' der bundels, die R^4 doen ontstaan *).

13. Men kan nu meetkundig de snijding bepalen van het scheeve oppervlak R^4 met eene rechte lijn en met verschillende andere scheeve oppervlakken, die men door de dubbellijnen legt. Zij bijv. R^2 een zoodanig scheef oppervlak van de tweede orde en π wederom een snijvlak door eene beschrijvende lijn van R^4; nu ontstaan in π eene kromme van de derde orde c^3 en eene van de tweede c^2, welke D, D' en dus nog vier andere punten met elkaar gemeen hebben; daar R^2 en R^4 beschreven worden door de transversalen van d en d', die c^2 en c^3 snijden, zoo volgt hieruit:

Een scheef oppervlak van de vierde orde, tot de eerste groep behoorende, snijdt een scheef oppervlak van de tweede orde, door zijne twee dubbellijnen gebracht, volgens vier beschrijvende lijnen van beide.

Op dezelfde wijze verkrijgt men:

Een scheef oppervlak van de vierde orde, tot de eerste groep behoorende, snijdt een scheef oppervlak van de derde orde R^3, welks dubbellijn met d samenvalt, en van hetwelk d' de enkelvoudige richtlijn is, volgens zes gemeenschappelijke beschrijvende lijnen.

Een scheef oppervlak van de vierde orde, tot de eerste groep behoorende, snijdt een ander scheef oppervlak van dezelfde orde en groep, dat de dubbellijnen met het eerste gemeen heeft, volgens acht beschrijvende lijnen.

---

*) Bij deze en de volgende constructiën worden bekend ondersteld de meetkundige constructie van krommen van de derde en vierde orde uit kegelsneden- of stralenbundels, benevens de methoden om snijpunten dezer krommen te bepalen door deze constructiën terug te brengen tot die der snijpunten van kegelsneden onderling. Deze opmerking geldt voor elk der te behandelen gevallen en constructiën dezer verhandeling.

In het eerste geval wordt het vlak π gesneden volgens twee krommen van de derde orde, van welke de eene in D een dubbelpunt heeft; in het tweede geval ontstaan er in π eene kromme van de vierde orde en eene van de derde, die door de beide dubbelpunten van de voorgaande gaat.

14. De verdeeling van dit oppervlak in soorten geschiedt het beste door, gelijk ook door Rohn langs analytischen weg gedaan wordt, op de dubbellijnen die bijzondere punten op te sporen, die door Cayley pinchpoints, d. i. klempunten, genoemd zijn; het zijn die punten, in welke de beide raakvlakken zich vereenigen, zoodat elk vlak door een dezer punten gebracht, het oppervlak snijdt volgens eene kromme met een keerpunt. Als wederkeerige vorm dezer klempunten komen dan in aanmerking de vlakken, door de dubbellijnen gebracht, in welke de beide raakpunten zich vereenigen; de omhullingskegel, welks top in een punt van zulk een vlak ligt, bezit dan een buigraakvlak. Ten einde deze klempunten op te sporen, brenge men weder een vlak π door eene beschrijvende lijn l, en denke in dit vlak de kromme c^3 geconstrueerd. Brengt men door d vervolgens een vlak α, dan snijdt dit d' in S' en π volgens eene rechte lijn p, die c^3, behalve in D, in twee punten P_1 en P_2 snijdt. Nu zijn $P_1\ S'$ en $P_2\ S'$ twee beschrijvende lijnen van R^4; de vlakken $d'\,S'\,P_1$ en $d'\,S'\,P_2$ zijn de raakvlakken van R^4 in S', en de snijpunten $d—S'\,P_1$ en $d—S'\,P_2$ de raakpunten van α met R^4. Vallen P_1 en P_2 te zamen, d. i. wordt $D\,P$ eene raaklijn, dan verkrijgt men eene beschrijvende lijn s, die uit twee samenvallende beschrijvende lijnen bestaat, en die men grenslijn kan noemen; de twee raakvlakken door d', zoowel als de beide raakpunten op d vallen nu te zamen, en het punt S' is een klempunt op d', terwijl het vlak $S'\,d$ een klemvlak door d is. Een vlak door s snijdt R^4 in eene kromme van de derde orde, van welke s eene raaklijn in S' is; terwijl een punt op s een omhullingskegel doet ontstaan, van welken s een straal is.

15. De vorm van het oppervlak R^4 hangt af van de bestaanbaarheid of onbestaanbaarheid dezer klempunten. Ten einde deze bestaanbaarheid te onderzoeken, legt men weder

even als vroeger (12) een vlak π door de beschrijvende lijn l, welke de daarin ontstaande kromme c^3 in D en D' snijdt, en construeert de poolkegelsnede van D ten opzichte van c^3; deze is bepaald door D zelf, hare raaklijn door D, zijnde dit tevens de raaklijn aan de kegelsnede, homoloog met straal CD; en drie punten, toegevoegd harmonisch aan D ten opzichte van de beide andere snijpunten eener lijn door D met c^3. De snijpunten van c^3 met de poolkegelsnede zijn, de gezochte raakpunten. Men komt nu tot de volgende drie gevallen:

de snijpunten zijn alle vier bestaanbaar;

twee der snijpunten zijn bestaanbaar, de beide andere toegevoegd imaginair;

de snijpunten zijn allen imaginair.

In het eerste en derde geval is de vorm der kromme c^3 tweedeelig *); zij bestaat uit een ovaal en eenen tak; het eerste wordt steeds in een even, de tweede in een oneven aantal punten gesneden. In het eerste geval ligt D op den tak, in het derde op het ovaal. Het punt D' kan nu in beide gevallen òf op den tak òf op het ovaal liggen. Hieruit volgt de volgende verdeeling:

Ten eerste, de kromme is tweedeelig:

a. D en D' liggen beiden op den tak.

b. D en D' liggen beiden op het ovaal.

c. D ligt op den tak, D' op het ovaal.

Ten tweede, de kromme is ééndeelig:

d. D en D' liggen beiden op den tak.

Hieruit volgt nu ten opzichte van de klempunten:

a. De vier klempunten op d zoowel als op d' zijn bestaanbaar.

b. De klempunten op den d en d' zijn imaginair.

c. De vier klempunten op $d' d$ zijn bestaanbaar, die op $d d'$ imaginair.

d. Twee klempunten op elk der dubbellijnen zijn bestaanbaar, twee toegevoegd imaginair.

---

*) Vergelijk voor den vorm der kromme c^3: R. STURM, Ueber die ebenen Curven dritter Ordnung, CRELLE's, *Journal*, Bd. 90 blz. 83.

Deze meetkundige beschouwing leidt dus tot alle vormen van oppervlakken, door ROHN verkregen.

16. Ik wensch nog in 't kort de aandacht te vestigen op de gedaanten der doorsnijdingskrommen en omhullingskegels bij deze verschillende vormen.

a. Daar de vier klempunten, zoowel op d als op d', bestaanbaar zijn, wordt elk der dubbellijnen in vier deelen verdeeld; twee dubbelsegmenten, op welke de uitgangspunten der bestaanbare beschrijvende lijnen liggen en twee geïsoleerde segmenten, op welke de uitgangspunten der imaginaire beschrijvende lijnen liggen. De dubbelsegmenten zijn dus door bestaanbare, de geïsoleerde door imaginaire beschrijvende lijnen verbonden. Een vlak zal alzoo R^4 snijden volgens twee volkomen van elkander gescheiden deelen, m. a. w. de doorsnede zal bestaan uit twee ovalen, (takken van evene orde) O_1 en O_2, die elkander niet snijden. Daar de kromme in het geheel twee bijzondere punten moet hebben, zoo heeft men, d_1, d_2, k_1, k_2 de dubbel- en keerpunten van O_1 en O_2, i de geïsoleerde punten noemende, de navolgende vormen:

d_1	2	1	1	1	1	0	0	0	0
k_1	0	0	1	0	0	2	1	1	0
d_2	0	1	0	0	0	0	0	0	0
k_2	0	0	0	1	0	0	1	0	0
i	0	0	0	0	1	0	0	1	2

b. Daar er geene geïsoleerde segmenten zijn, zal elk vlak R^4 snijden volgens twee ovalen; de beide dubbelpunten ontstaan nu door de snijding der beide ovalen.

c. Dit oppervlak komt overeen met *a*, doordat een der deelen van de snijkromme een dubbelpunt bezit; en met *b*, doordat een ander dubbelpunt ontstaat door de snijding van twee deelen der kromme; hieruit volgt, dat de kromme bestaat uit twee oneven takken. De eene tak heeft een dubbelpunt, de andere niet; beide takken snijden elkander in een punt, dat dus geen geïsoleerd of keerpunt kan worden. De vormen der doorsnede kunnen dus drie in getal zijn,

naar gelang het eerste bijzondere punt een dubbelpunt, keerpunt of geïsoleerd punt is.

d. In dit geval bestaat de kromme slechts uit één deel; dit ovaal heeft twee bijzondere punten, welke dubbel-, keer- of geïsoleerde punten kunnen zijn, zoodat zes verschillende vormen mogelijk zijn.

Er kan geen bezwaar bestaan, de vormen van de omhullingskegels voor de verschillende gevallen van het oppervlak na te gaan; de beschouwing, hiertoe noodig, is wederkeerig met de vorige.

17. Een tweetal gedaanten, die dit oppervlak kan aannemen, dienen nog in aanmerking te worden genomen.

Het oppervlak kan ontstaan door twee projectieve vlakkeninvolutiën; dan is de vlakke doorsnede eene kromme van de vierde orde c^4, welke ontstaat door de snijding van de homologe elementen van twee projectieve straleninvolutiën. Het onderzoek der gedaante van het oppervlak kan op geheel dezelfde wijze geschieden; slechts worde hier de volgende bijzonderheid opgemerkt. Daar twee der raakpunten van de raaklijnen, aan c^4 uit D getrokken, in eene rechte lijn liggen met D', zoo liggen de beide grenslijnen door deze punten gaande in een vlak door d', en snijden zij elkander in een punt van d.

De tweede gedaante ontstaat, wanneer R^4 geheel en al imaginair wordt; terwijl d en d' bestaanbaar blijven.

De doorsnijding met een vlak is alsdan eene imaginaire kromme van de vierde orde met twee bestaanbare geïsoleerde punten. Deze kromme is de centrale of orthogonale projectie van de imaginaire snijkromme van twee oppervlakken van de tweede orde, die geen enkel punt gemeen hebben.

Het oppervlak, ontstaan uit twee projectieve punten-involutiën stemt overeen met dat, uit twee projectieve vlakkeninvolutiën ontstaan.

Geval B.

18. In plaats van de elkaar kruisende lijnen d en d' zijn nu gegeven de lijnen l_1, l_2, l_3, l_4, welker gemeenschappelijke transversalen ondersteld worden toegevoegd imaginair

te zijn. De hier volgende constructie kan natuurlijk ook toegepast worden op scheeve oppervlakken met bestaanbare dubbellijnen.

Daar de lijnen a_1, a_2 en b_1, b_2, behoorende tot de beide basiskrommen, de imaginaire transversalen van l_1, l_2, l_3, l_4 snijden moeten, zoo behooren zij tot het stralenstelsel van den eersten graad, door deze vier bepaald. Het projectief verband wordt nu op de volgende wijze geregeld.

19. Men trekke eene lijn p, die a_1 in A_1, b_1 in B_1 snijdt, en neme op p twee projectieve puntenrijen aan; de twee stralen a_n en b_n van het stralenstelsel, die men door twee homologe punten trekken kan, behooren tot twee homologe oppervlakken, die dus door a_1, a_2, a_n en b_1, b_2, b_n bepaald zijn, en welker doorsnede construeerbaar is.

Hierdoor worden twee beschrijvende lijnen van het oppervlak bepaald; men kan, aldus voortgaande, er meerdere vinden. De stralen door de dubbelpunten op p zijn twee beschrijvende lijnen van het oppervlak R^4.

20. Na de beschouwingen, bij het voorgaande geval gehouden over het oppervlak, wat betreft zijnen vorm en de gedaante zijner vlakke doorsnede, zal het voldoende zijn, eenige uitkomsten te geven, tot welke men langs denzelfden weg geraakt.

Ook dit oppervlak is met zichzelf wederkeerig, zooals blijkt, wanneer men het beschrijft door twee projectieve vlakkenbundels door p te leggen, en in twee homologe vlakken de stralen te construeeren, tot het stelsel behoorende.

De snijkromme c^4 van R^4 met een willekeurig vlak π heeft twee toegevoegd imaginaire dubbelpunten, en de omhullingskegel twee toegevoegd imaginaire dubbelraakvlakken.

Brengt men een vlak π door eene beschrijvende lijn l, dan zal de snijkromme c^3 door l in een bestaanbaar en in twee imaginaire punten gesneden worden; zij kan twee- of ééntakkig zijn.

In het eerste geval bestaat c^4 uit twee ovalen, in het tweede uit een ovaal. In het eerste geval snijden de beide ovalen elkander in de imaginaire dubbelpunten, het eene ovaal kan het andere omringen of uitsluiten.

Even als bij het geval A kan ook hier het oppervlak geheelimaginair worden.

Geval C.

20. Dit geval ontstaat wanneer d en d' oneindig dicht bij elkander liggen; nu treden, in de plaats der gegevens van A, de lijn d, de lijnen a_1, a_2, b_1, b_2, benevens eene lijn r, die d snijdt en eene raaklijn is aan elk oppervlak van bundel $d\ a_1\ a_2$ zoowel als van bundel $d\ b_1\ b_2$. Het projectief verband der bundels wordt verkregen door op d uit het snijpunt van d met r, even als in het geval A, twee projectieve stralenbundels te trekken, gelegen in het vlak $d\,r$. De verdere constructie verloopt als bij A.

21. De doorsnede van R^4 met een vlak π wordt nu eene kromme c^4 met dubbelknoop D in het snijpunt met d; zoo ook zal de omhullingskegel een kegel van de vierde klasse met dubbelen knoopstraal zijn. R^4 voldoet verder aan de voorwaarde, dat alle beschrijvende lijnen stralen zijn van het bijzondere stralenstelsel van den eersten graad, bepaald door de stralen a_1, a_2, b_1, b_2.

Legt men het vlak π door eene beschrijvende lijn l, dan ontstaat er als doorsnede eene kromme van de derde orde, van welke l de raaklijn in D is, en welke wederom verschillende vormen hebben kan. Om den vorm van het oppervlak te bepalen, is het nu weder in de eerste plaats noodig, dat men het aantal klempunten kenne. Op het voetspoor van geval A kan men de volgende verdeeling maken:

a. c^3 bestaat uit twee deelen, D ligt op den tak. Er zijn vier bestaanbare klempunten.

b. c^3 bestaat uit twee deelen, D ligt op het ovaal. Er zijn slechts imaginaire klempunten.

c. c^3 bestaat uit één deel. Er zijn twee bestaanbare en twee onbestaanbare klempunten.

De gedaante der vlakke doorsnede in elk dezer gevallen is als volgt:

a. Een willekeurig vlak π snijdt R^4 in eene kromme van

de vierde orde, bestaande uit twee ovalen, die elkander niet snijden; gaat π door een punt van d, uit 't welk bestaanbare beschrijvende lijnen gaan, dan bevindt zich een dubbelknoop op een dezer ovalen, gaat π door een punt op een geïsoleerd gedeelte van d, dan bezit de kromme een dubbel-geïsoleerd punt; eindelijk kan π door een klempunt gaan; dan vertoont een der ovalen de combinatie van dubbel- en keerpunt d. i. een keerpunt van de tweede soort.

Wordt π door de grenslijn door dit klempunt gebracht, dan snijdt het R^4 volgens eene kromme van de derde orde, die in het klempunt een buigpunt met buigraaklijn heeft.

b. Het vlak π snijdt R^4 volgens eene kromme, bestaande uit twee ovalen, die elkander raken.

c. In dit geval bestaat de doorsnijding uit één ovaal met dubbelknoop, dubbel-geïsoleerd punt of keerpunt van de tweede soort.

Ook dit oppervlak kan imaginair zijn. De vlakke doorsnede is dan eene imaginaire kromme van de vierde orde met dubbel-geïsoleerd punt. Deze kromme ontstaat door de imaginaire snijkromme van twee oppervlakken van de tweede orde te projecteeren uit een punt, genomen op een der kegeloppervlakken, die door deze kromme gebracht kunnen worden.

IV. Tweede Groep.

22. De oppervlakken, tot deze groep behoorende, kunnen naar den vorm der dubbelkromme verdeeld worden in de volgende gevallen:

Geval A. De dubbelkromme is eene scheeve kromme van de derde orde c^3.

Geval B. De kromme c^3 gaat over in een kegelsnede met eene lijn d, die een punt met haar gemeen heeft.

Geval C. De kromme c^3 gaat over in twee bestaanbare elkander kruisende lijnen d en d', gesneden door eene lijn l.

Geval D. De kromme c^3 gaat over in twee elkander kruisende lijnen, die toegevoegd imaginair zijn, benevens hare transversaal l.

Geval E. De lijnen d en d' liggen oneindig dicht bij elkander.

De oppervlakken dezer groep zijn diegenen, die door REYE langs meetkundigen weg verkregen worden. (*Geometrie der Lage* II, Vortrag 15, verg. Inleiding 3). Hij verkrijgt daar de eerste drie gevallen en bewijst tevens, dat het oppervlak met zichzelf wederkeerig is. Daar evenwel de meetkundige weg, langs welken zij verkregen worden, van den in dit opstel gevolgden verschilt, zoo zal hier worden aangetoond, dat ook volgens de hier als grondslag aangenomene methode al deze vormen kunnen worden verkregen.

Geval A.

23. Laten gegeven zijn de scheeve kromme van de derde orde c^3, benevens hare koorden a en b; c^3 is het gemeenschappelijk deel der basiskromme van beide bundels. Deze kunnen op de volgende wijze met elkander in projectief verband worden gebracht.

Men neme een punt P op c^3, trekke door P in de vlakken Pa en Pb twee projectieve stralenbundels; elk paar homologe stralen a_n, b_n bepaalt een paar homologe oppervlakken A_n^2 en B_n^2 der beide bundels, die elkander volgens eene beschrijvende lijn van het scheeve oppervlak R^4 zullen snijden; deze beschrijvende lijn is de verbindingslijn der beide snijpunten van het vlak $Pa_n\,b_n$ met c^3. Doorloopt men de stralenbundels geheel, dan wordt het geheele oppervlak R^4 beschreven.

24. De doorsnede van R^4 met een vlak π is eene kromme van de vierde orde c^4 met drie dubbelpunten, welke de snijpunten zijn van π met c^3. De kromme is dus van de zesde klasse en heeft vier dubbelraaklijnen. Hieruit volgt, dat de omhullingskegel van de zesde orde is; daar hij van de vierde klasse moet zijn, volgt hieruit, dat hij wederkeerig is met de snijkromme. De kegel heeft vier dubbelstralen en drie dubbelraakvlakken; de dubbelrakende ontwikkelbare is dus een oppervlak van de derde klasse (4de orde); op deze wijze wordt alzoo het wederkeerige ontstaan van het oppervlak opgehelderd.

De doorsnede wordt vereenvoudigd, wanneer het vlak π gelegd wordt door eene beschrijvende lijn l; zij gaat dan over in eene kromme van de derde orde met een dubbelpunt, gesneden door l in drie punten; twee dezer snijpunten zijn de snijpunten van l met de dubbelkromme; het derde is het raakpunt van π met R^4; het dubbelpunt is het derde snijpunt van π met de dubbelkromme.

Nog eenvoudiger wordt de doorsnede, wanneer π gelegd wordt door twee beschrijvende lijnen in een punt van c^3 te zamen komende. Het overschietende deel wordt dan eene kegelsnede, gaande door de niet samenvallende snijpunten der beschrijvende lijnen met c^3, en de beschrijvende lijnen ten tweeden male snijdende in de beide raakpunten van π met R^4.

Het kan geen bezwaar geven, om, even als bij de eerste groep (11), de constructie van den omhullingskegel ook na te gaan; met het oog op het reeds behandelde zal dit worden voorbijgegaan, terwijl ook naar de aangehaalde § van Reye verder verwezen wordt. Bij de volgende constructiën zal eveneens de loop in het kort worden aangegeven.

25. Het oppervlak is bepaald en construeerbaar door de dubbelkromme en vijf punten. Ten einde het te construeeren, trekke men koorden door deze punten, legge een vlak door een dezer koorden l; dit vlak snijdt de dubbelkromme in drie punten en de overige vier koorden in vier punten. De vlakke doorsnede is nu bekend door zes punten benevens een dubbelpunt en dus construeerbaar.

26. Even als vroeger zijn nu ook te construeeren de doorsnede van R^4 met verschillende andere scheeve oppervlakken, door c^3 gebracht. Zij b. v. R^2 een oppervlak van de tweede orde door c^3. Men legge een vlak, dat R^4 volgens eene kegelsnede en twee beschrijvende lijnen snijdt; deze kegelsnede zal R^2 snijden in twee punten buiten de punten der dubbelkromme; door deze twee punten gaan de gemeenschappelijke beschrijvende lijnen van R^2 en R^4. Op dezelfde wijze is het na te gaan, dat een tweede scheef oppervlak $R_1{}^4$ van de vierde orde, waarvan mede c^3 de dubbelkromme is, met R^4 vier beschrijvende lijnen gemeen heeft.

De voornoemde kegelsnede snijdt namelijk de tweede kromme c_1^4, behalve in twee dubbelpunten, in vier punten; door deze snijpunten worden de vier gemeenschappelijke lijnen getrokken.

27. Ten einde alle soorten van oppervlakken dezer groep te verkrijgen, moeten, even als te voren, de klempunten en grenslijnen meetkundig onderzocht worden. Hiertoe kan de volgende beschouwing leiden.

Volgens (23) verkrijgt men de beschrijvende lijnen van R^4 door de constructie der vlakken, die, door P gaande, opvolgend twee homologe stralen van de beide projectieve stralenbundels bevatten. Deze vlakken omhullen dus een kegelvlak van de tweede orde, den omhullingskegel K^2 van R^4 uit P; terwijl P nog buitendien de top is van een kegel van de tweede orde K_1^2, die c^3 tot richtlijn heeft. Uit een punt van c^3 buiten K^2 kunnen nu twee raakvlakken aan K^2 getrokken worden; uit elk punt daarbinnen worden deze raakvlakken imaginair, terwijl er in elk snijpunt één raakvlak zijn zal. Daar deze raakvlakken tevens raakvlakken van R^4 zijn, zoo zijn de gemelde snijpunten de op c^3 gelegen klempunten van R^4 en de twee samenvallende beschrijvende lijden vormen eene grenslijn. Een raakvlak van K^2 snijdt verder c^3 in twee punten; wanneer deze beide punten zich vereenigen, ontstaat er eene beschrijvende lijn die tevens raaklijn van c^3 is. De vlakken, die deze lijnen doen ontstaan, zullen mede ten getale van vier zijn, want de kegels K^2 en K_1^2 kunnen hoogstens vier gemeenschappelijke raakvlakken hebben. Nu volgt weder de classificatie van de scheeve oppervlakken dezer groep op de bestaanbaarheid van klempunten en klemvlakken gegrondvest *).

Algemeene gevallen.

a. K^2 en K_1^2 hebben vier gemeenschappelijke stralen en vier gemeenschappelijke raakvlakken.

b. K^2 en K_1^2 hebben vier gemeenschappelijke stralen en geene gemeenschappelijke raakvlakken.

---

*) REYE, *G. d. L.* II, p. 114 vg. komt, uitgaande van een ander meetkundig beginsel, tot dezelfde standen van kegelsneden als hier van kegelvlakken gevonden wordt; de beschouwing der kegelsneden is wederkeerig met deze

c. K^2 en $K_1{}^2$ hebben twee gemeenschappelijke stralen en dus ook twee gemeenschappelijke raakvlakken.

d. K^2 en $K_1{}^2$ hebben geene gemeenschappelijke stralen en vier gemeenschappelijke raakvlakken.

e. K en $K_1{}^2$ hebben geene gemeenschappelijke stralen en geene gemeenschappelijke raakvlakken; K^2 ligt binnen $K_1{}^2$.

f. K en $K_1{}^2$ verkeeren in het voorgaande geval, maar $K_1{}^2$ ligt binnen K^2.

Bijzondere gevallen.

g. $K_1{}^2$ raakt K^2; er zijn nog twee gemeenschappelijke stralen en raakvlakken, en de straal van raking ligt op dat deel van $K_1{}^2$, dat buiten K^2 ligt.

h. $K_1{}^2$ raakt K^2; er zijn nog twee gemeenschappelijke stralen en raakvlakken; de straal van raking ligt op dat deel van $K_1{}^2$, dat binnen K^2 ligt.

i. $K_1{}^2$ raakt K^2; er zijn twee gemeenschappelijke stralen, maar geene gemeenschappelijke raakvlakken.

k. $K_1{}^2$ raakt K^2; er zijn geene gemeenschappelijke stralen meer, maar wel twee gemeenschappelijke raakvlakken.

l. $K_1{}^2$ raakt K^2; er zijn geene gemeenschappelijke stralen meer en ook geene gemeenschappelijke raakvlakken; K^2 ligt binnen $K_1{}^2$.

m. $K_1{}^2$ raakt K^2; er zijn geene gemeenschappelijke stralen of raakvlakken meer; $K_1{}^2$ ligt binnen K^2.

n. $K_1{}^2$ en K^2 hebben een osculeerenden straal.

o. $K_1{}^2$ en K^2 hebben eene dubbele raking; K^2 ligt binnen $K_1{}^2$.

p. $K_1{}^2$ en K^2 hebben eene dubbele raking; $K_1{}^2$ ligt binnen K^2.

q. $K_1{}^2$ en K^2 hebben een dubbele imaginaire raking; K^2 ligt binnen $K_1{}^2$.

r. $K_1{}^2$ en K^2 hebben eene dubbele imaginaire raking; $K_1{}^2$ ligt binnen K^2.

s. $K_1{}^2$ en K^2 snijden elkander volgens vier opvolgende stralen; K^2 ligt binnen $K_1{}^2$.

t. $K_1{}^2$ en K^2 snijden elkander volgens vier opvolgende stralen; $K_1{}^2$ ligt binnen K^2 *).

---

*) Deze beschouwing brengt het aantal mogelijke vormen terug tot het

28. Na het onderzoek der doorsnede bij de voorgaande groep kan de snijkromme met een plat vlak kort afgehandeld worden. Zij is eene kromme van de vierde orde met drie bijzondere punten, welke ieder op zich zelf dubbelpunten, keerpunten of geïsoleerde punten kunnen zijn, terwijl eindelijk de bijzondere punten toegevoegd imaginair kunnen worden. Voor elk der gevondene soorten kan men als in (16) eene opsomming van de mogelijke vormen dezer kromme maken; ook zal men zonder moeite na kunnen gaan, in hoeverre de dubbelkromme geheel dubbel, gedeeltelijk geïsoleerd of geheel geïsoleerd op het oppervlak ligt. Verder zij opgemerkt, dat, door een snijvlak te leggen door eene raaklijn, of een osculatievlak aan de dubbelkromme te construeeren, men krommen van de vierde orde met een dubbelen of drievoudigen knoop verkrijgt. Dezelfde bijzondere gedaanten van omhullingskegels kunnen eveneens worden verkregen. Wordt het snijvlak gelegd door eene raaklijn aan een klempunt, dan ontstaan de combinatiën van een keerpunt met eenen knoop, of wel van een keerpunt met twee knoopen.

Dit oppervlak kan ook geheel imaginair worden; zijn omhullingskegel uit een punt der dubbelkromme is dan een imaginair kegelvlak van de tweede orde, en de doorsnijding met een vlak eene imaginaire kromme van de vierde orde. Deze kromme is de centrale of orthogonale projectie van de imaginaire snijkromme van twee oppervlakken van de tweede orde, die elkander raken, maar overigens geen bestaanbaar gemeenschappelijk punt bezitten.

Geval B.

29. Laat voor dit geval de dubbelkromme c^3 overgegaan zijn in de kegelsnede c^2 met de haar in A snijdende lijn d.

---

aantal mogelijke standen van twee kegelsneden ten opzichte van elkander; zij bevat al de gevallen door Rohn langs analytisch-meetkundigen weg verkregen.

Even als in het voorgaande geval wordt elk der bundels weder bepaald door de koorden a en b, die ieder, zoowel met c^2 als met d, een punt gemeen hebben.

Past men, ter verkrijging van het projectief verband, dezelfde constructie als in het voorgaande geval toe, daarbij het punt P op c^2 nemende, dan verkrijgt men wederom den omhullingskegel K^2; terwijl K_1^2 overgaat in twee vlakken, het vlak δ van c^2 en het vlak $P d$. Wederom bepaalt elk raakvlak aan K^2 eene beschrijvende lijn van R^4; uit de punten van c^2 of d, die buiten K^2 liggen, kunnen twee raakvlakken aan K^2 getrokken worden; uit die binnen K^2 twee toegevoegd imaginaire raakvlakken; terwijl de snijpunten van c^2 en d met K^2 de klempunten zijn.

30. Tot de kennis der dubbelrakende ontwikkelbare komt men op de volgende wijze. Men trekke uit een punt Q van d de beide raakvlakken aan K^2, construeere dan de beide beschrijvende lijnen door Q en legge er een vlak φ door, dan zal φ R^4 nog in eene kegelsnede snijden. Deze kegelsnede c_1^2 heeft twee punten gemeen met c^2; de beide andere snijpunten met de beschrijvende lijnen zijn de raakpunten met R^4; van deze dubbelrakende vlakken moet nu de omhulde geconstrueerd worden. Men projecteere daartoe uit alle punten van d c^2 op het vlak φ, dan ontstaat er in dit vlak een kegelsnedenbundel, welks basispunten gevormd worden door de snijpunten van c_1^2 met c^2, door het snijpunt Q van d met φ en door de snijlijn van het raakvlak, door d aan c^2 gebracht, met het vlak φ. De kegelsneden van dezen bundel snijden c_1^2, behalve in de twee vaste punten, nog in twee veranderlijke punten, welker verbindingslijn door een vast punt gaat. Hieruit volgt:

De dubbelrakende vlakken snijden een hunner in een stralenbundel; de dubbelrakende ontwikkelbare is dus een kegelvlak van de tweede klasse; de vlakkenbundel door d vult de klasse van dit oppervlak tot drie aan.

De constructie van den top van dezen kegel is dus in het bovenstaande aangewezen.

De snijding van deze dubbelrakende ontwikkelbare met δ zal eene kegelsnede zijn; zij kan op de volgende wijze geconstrueerd worden. Men projecteere uit de opvolgende punten van d de kegelsnede c_1^2 op het vlak δ. Elk dezer geprojecteerde kegelsneden heeft met c^2 twee vaste punten gemeen; de gevraagde kegelsnede wordt dus omhuld door de verbindingslijnen der overige beide snijpunten; zij gaat door A en raakt aan de raaklijn door A aan c^2 getrokken en aan de snijlijn van c_1^2 en c^2.

31. De vlakke doorsneden van dit oppervlak geven geene aanleiding tot bijzondere opmerkingen; de verschillende vormen worden weder verkregen, wanneer men de klempunten opspoort. Deze beschouwing geeft aanleiding tot dezelfde verdeeling als bij het geval A; slechts gaat K_1^2 in twee vlakken over, het eene is het vlak δ van c^2, het andere is het vlak $P\,d\,(\pi)$. Men heeft nu de volgende soorten:

a. δ en π snijden K^2; hunne snijlijn ligt buiten K^2.

b. δ en π snijden K^2; hunne snijlijn valt binnen K^2.

c. δ snijdt K^2, π niet.

d. δ snijdt K^2 niet, π snijdt K^2.

e. δ en π snijden K^2 niet.

En als eenig bijzonder geval:

f. De snijlijn van δ en π valt te zamen met eene beschrijvende lijn van K^2.

De bijzondere gevallen, die zouden ontstaan, wanneer òf δ òf π rakend werd aan K_1^2, vervallen, omdat alsdan deze vlakken een deel uitmaken van R^4, en R^4 dus ophoudt van de vierde orde te zijn.

Door deze verdeeling ziet men, dat elk der deelen van de dubbelkromme twee klempunten bezit, welke bestaanbaar of toegevoegd imaginair kunnen zijn; daar verder ook dit oppervlak wederkeerig met zich zelf is, zoo gelden hier dezelfde opmerkingen ten opzichte der klemvlakken.

Geval C.

32. Men neme, even als bij het geval A, de dubbellijnen d en d' aan, gesneden door l en nog buitendien tot

transversalen hebbende a en b. Uit een punt P van l kan men de constructie uitvoeren even als bij de voorgaande gevallen, en verkrijgt alsdan den omhullingskegel. De snijkromme met een vlak π zal eene kromme van de vierde orde met drie dubbelpunten zijn, die kan overgaan in eene kromme van de derde orde met dubbelpunt, of, zoo men het vlak π door l legt, in eene kegelsnede met de dubbel tellende lijn, of wel in eene der andere dubbellijnen met nog twee rechte lijnen.

Het is verder licht in te zien, dat dit geval niet alleen een bijzonder geval is van het geval A dezer afdeeling, maar ook als bijzonder geval van de vorige groep kan beschouwd worden. Hieruit volgt dus eene daarop gegronde constructie van het oppervlak.

33. De verdeeling van dit oppervlak in soorten steunt weder op het al of niet aanwezig zijn van klempunten. Deze worden het eenvoudigst gevonden door eene doorsnede te beschouwen van het oppervlak R^4 met een vlak π, gebracht door l; π snijdt R^4 volgens de dubbel tellende lijn l en eene kegelsnede c^2, en de lijnen d en d' in de punten D en D' Elk punt van d nu is de top van een' kegel, die c^2 tot richtlijn heeft; deze kegel snijdt d' in twee punten, door welke twee beschrijvende lijnen bepaald worden. Zoodra nu deze kegel rakende wordt aan d' ontstaat er een klempunt op d. De bestaanbaarheid van deze klempunten hangt dus af van den stand van d en d' ten opzichte van c^2, welke stand onderzocht kan worden, door de ligging der punten D en D' ten opzichte van c^2 na te gaan.

Er ontstaan alzoo de navolgende soorten.

a. D en D' liggen buiten c^2; $D\ D'$ snijdt c^2.

b. D en D' liggen buiten c^2; $D\ D'$ snijdt c^2 niet.

c. D ligt buiten, D' binnen c^2.

d. D en D' liggen binnen c^2.

en als bijzonder geval:

e. $D\ D'$ raakt aan c^2.

Het is nu duidelijk te zien, dat de gevallen a en b vier bestaanbare klempunten geven, het geval c twee, terwijl zij in het geval d imaginair zijn. Nog worde opgemerkt,

dat in het geval a de lijn l dubbel op het oppervlak ligt; in het geval b is zij eene geïsoleerde, in het geval e eene keerlijn. In dit laatste geval snijdt elk vlak het oppervlak R^4 volgens eene doorsnede met een keerpunt.

De vlakke doorsneden en de vorm der omhullingskegels kunnen, na het besprokene in de voorgaande gevallen, verder worden voorbijgegaan.

Geval D.

34. Wanneer d en d' toegevoegd imaginair zijn, kan men weder als gegevens aannemen, behalve l, a, b, vier lijnen, die met a, b, l, tot hetzelfde stralenstelsel van den eersten graad behooren. Na hetgeen hieromtrent in de eerste groep en in het voorgaande geval is opgemerkt, kan de constructie worden voorbijgegaan.

Slechts worde hier het volgende opgemerkt.

De doorsnijding met een willekeurig vlak is eene kromme van de vierde orde met twee toegevoegd imaginaire en een reëel dubbelpunt; de doorsnijding met een vlak door l geeft weder eene kegelsnede; er ontstaan hier dus de navolgende soorten:

a. l snijdt c^2.
b. l snijdt c^2 niet.
c. l raakt c^2.

Geval E.

35. Wanneer eindelijk d en d' oneindig dicht bij elkander liggen, kan, wat de constructie betreft, weder verwezen worden naar geval C van de eerste groep. De vlakke doorsnede is eene kromme van de vierde orde met dubbelknoop en dubbelpunt; zoo ook zal de omhullingskegel uit een willekeurig punt een dubbelraakvlak en twee samenvallende dubbelraakvlakken hebben. Als bijzondere gevallen komen in aanmerking:

De doorsnede door het snijpunt van dd' met l; dit is eene combinatie van drie knoopen; zoodanig dat er slechts ééne raaklijn aan dit punt is.

De doorsnede door l; zij bestaat, behalve uit l, uit eene kegelsnede; hierbij komen dus, evenals in het vorige geval de volgende soorten:

a. l snijdt c^2; D ligt binnen c^2.

b. l snijdt c^2; D ligt buiten c^2.

c. l snijdt c^2 niet.

d. l raakt c^2.

De doorsnede door het snijpunt van dd' met l wordt in het geval d eene verbinding van twee knoopen en een keerpunt met ééne raaklijn aan dit punt.

Even als in het geval A kan bij elk der gevallen B, C, D, E het oppervlak geheel imaginair worden.

V. Derde Groep.

36. In deze groep kan de basiskromme van een der beide bundels verschillende vormen aannemen. Deze basiskromme bestaat uit de scheeve kromme van de derde orde c^3 met eene koorde t, welke tevens de as is der vlakkeninvolutie. In deze involutie vervult elk vlakkenpaar de rol van een oppervlak van den tweeden bundel, en, daar de as t samenvalt met het rechtlijnige deel van de basiskromme van den eersten bundel, wordt t eene drievoudige lijn van het scheeve oppervlak R^4. De behandeling zal doen zien, dat de kromme c^3 vervangen kan worden door verschillende andere vormen van scheeve krommen van de derde orde. Daarop berust dan de verdeeling van dit oppervlak in gevallen. Deze gevallen zijn:

A. c^3 wordt vervangen door eene kegelsnede c^2 met eene lijn l, die een punt met haar gemeen heeft.

B. Deze lijn l valt te zamen met de as t der vlakkeninvolutie.

C. c^3 wordt vervangen door de rechte lijnen l_1 en l_3 gesneden door l_2; l_2 is op eindigen afstand van t gelegen.

D. c^3 gaat over in de rechte lijnen l_1 en l_3, gesneden door l_2; l_2 ligt oneindig dicht bij t.

Geval A.

37. Het projectief verband wordt op de volgende wijze

geregeld. Men neme een punt P op t en trekke door dit punt lijnen, die c^3 snijden; elke lijn doet een oppervlak van den bundel $t\ c^3$ ontstaan, en de puntenrij, door deze beschrijvende lijnen, uit P gaande, op c^3 bepaald, is projectief met de punteninvolutie, door de vlakkenparen van de vlakkeninvolutie op c^3 uitgesneden. Zulk eene lijn vormt namelijk met t een raakvlak door P aan een oppervlak van den bundel gebracht. Projecteert men nu uit het snijpunt Q van c^3 met t beide puntenrijen op een vlak, dan ontstaan op eene kegelsnede eene puntenrij met daarmede projectieve punteninvolutie; deze zullen drie gemeenschappelijke homologe punten bezitten; deze punten, met Q vereenigd, geven drie punten P_1, P_2, P_3 op c^3, welke de drie beschrijvende lijnen PP_1, PP_2, PP_3 van R^4 doen ontstaan. Door verplaatsing van P op t worden alle beschrijvende lijnen van R^4 verkregen.

38. De doorsnijding van R^4 met een plat vlak is eene kromme van de vierde orde met een drievoudig punt, ontstaande door eene straleninvolutie, projectief met een kegelsnedenbundel, van welken een der basispunten met het middelpunt van de straleninvolutie tezamen valt. Vereenvoudigde doorsneden worden verkregen door een vlak te leggen door eene beschrijvende lijn l; hierdoor ontstaat eene kromme van de derde orde met een dubbelpunt op l gelegen; legt men een vlak door twee beschrijvende lijnen, dan wordt de doorsnede eene kegelsnede, welke het snijpunt der beide lijnen bevat. De twee beschrijvende lijnen kunnen toegevoegd imaginair zijn; hun vlak is dan evenwel bestaanbaar. Beschouwt men nu de kegelsnede met eene der beschrijvende lijnen van het oppervlak als één geheel, dan kan de kromme c^3 door haar vervangen worden. De beschrijvende lijnen van het oppervlak R^4 glijden dan bij hare beweging langs t en twee dezer kegelsneden.

38. De dubbelrakende ontwikkelbare is op de volgende wijze te construeeren. Men legge een vlak α door twee beschrijvende lijnen, dat dus R^4 nog volgens eene kegelsnede c^2 snijdt, en projecteert eene tweede kegelsneden-doorsnede $c_1{}^2$ op α uit alle punten van t. De geprojecteerde kegel-

sneden zullen allen met elkander gemeen hebben de beide snijpunten P en Q van c_1^2 met α, het snijpunt T van t met α, en hebben allen tot raaklijn de snijlijn van α met het vlak, door t rakende aan c_1^2 gebracht. Er ontstaat dus een kegelsnedenbundel, van welken elke kegelsnede c^2, behalve in T, nog in drie punten snijdt; de driehoeken, door verbinding dezer snijpunten ontstaande, omhullen eene kegelsnede d^2, die ook de zijden van $\triangle\ P\ Q\ T$ zal raken en in het algemeen c^2 zal snijden. De drie vlakken, gebracht door een projecteeringscentrum en de daarbij behoorende drie zijden van een driehoek, zijn dubbelrakende vlakken, tot welke ook α behoort. Daar nu de snijlijnen der dubbelrakende vlakken met een hunner eene kegelsnede omhullen, is de dubbelrakende ontwikkelbare van de derde klasse; hare constructie is hier aangegeven.

39. Uit de constructie der kegelsnede d^2 is de constructie der klempunten af te leiden. Door klempunten moeten bij dit oppervlak punten verstaan worden, zoodanig, dat daarin twee van de drie raakvlakken te zamen vallen. Elk vlak door een klempunt snijdt dus R^4 in eene kromme van de vierde orde met een keerpunt, door 't welk een tak gaat. Eene raaklijn van d^2 snijdt in het algemeen c^2 in twee punten, uit welke twee beschrijvende lijnen naar het bijbehoorend punt op t kunnen getrokken worden. Vereenigen zich deze beide snijpunten, m. a. w. wordt de raaklijn aan d^2 gemeenschappelijke raaklijn, dan is het bijbehoorend punt op t een klempunt; van de drie beschrijvende lijnen, uit dit klempunt gaande, vereenigen zich twee tot eene grenslijn. Om nu de klempunten te bepalen, moet men weder de standen van d^2 ten opzichte van c^2 nagaan.

Trekt men eene raaklijn uit een snijpunt van d^2 met c^2 aan d^2, dan zal deze raaklijn c^2 nog in een tweede punt snijden; de raaklijn, door dit punt aan c^2 getrokken, zal weder raaklijn aan d^2 moeten zijn; want d^2 en c^2 moeten voldoen aan de voorwaarde, dat elke omgeschreven driehoek van d^2 een ingeschreven driehoek van c^2 is. Hieruit volgt, dat c^2 en d^2 evenveel snijpunten als gemeenschappelijke raaklijnen moeten hebben.

De standen van d^2 en c^2 ten opzichte van elkander zijn dus:

a. d^2 en c^2 hebben vier gemeenschappelijke punten en vier gemeenschappelijke raaklijnen.

b. d^2 en c^2 hebben twee gemeenschappelijke punten en twee gemeenschappelijke raaklijnen.

c. d^2 en c^2 hebben geene gemeenschappelijke punten of raaklijnen; d^2 ligt binnen c^2.

d. d^2 en c^2 hebben geene gemeenschappelijke punten of raaklijnen; c^2 ligt binnen d^2.

Bij welke zich de bijzondere gevallen voegen:

e. d^2 en c^2 raken elkander in één punt en hebben nog twee gemeenschappelijke punten en raaklijnen; het deel van d^2, op hetwelk het raakpunt ligt, ligt binnen c^2.

f. d^2 en c^2 raken elkander in één punt en hebben geene gemeenschappelijke punten of raaklijnen; het deel van d^2, op hetwelk het raakpunt ligt, ligt binnen c^2.

g. d^2 en c^2 raken elkander in één punt en hebben nog twee gemeenschappelijke raaklijnen en punten; het deel van d^2, op hetwelk het raakpunt ligt, ligt buiten c^2.

h. d^2 en c^2 raken elkander in één punt en hebben geene gemeenschappelijke punten of raaklijnen; het deel van d^2, op hetwelk het raakpunt ligt, ligt buiten c^2.

i. d^2 en c^2 raken elkander in twee punten; d^2 ligt binnen c^2.

k. d^2 en c^2 raken elkander in twee punten; d^2 ligt buiten c^2.

l. d^2 en c^2 raken elkander in twee toegevoegd imaginaire punten, d^2 ligt binnen c^2.

m. d^2 en c^2 raken elkander in twee toegevoegd imaginaire punten; c^2 ligt binnen d^2.

40. Ook in dit geval kan worden volstaan met enkele opmerkingen over de vlakke doorsneden. In de gevallen *a* en *b*, die der bestaanbare klempunten, kunnen de doorsneden kromme lijnen van de vierde orde met een drievoudig punt zijn, met een keerpunt, door 't welk een tak loopt, of met een drievoudig punt met een bestaanbare en twee toegevoegd imaginaire raaklijnen. In de gevallen *c* en *d* heeft de kromme steeds òf wel drie raaklijnen òf wel eene raaklijn.

Wat de bijzondere gevallen betreft, zijn er tweeërlei soort doorsneden in de gevallen *e* en *g*, en is er slechts één vorm van doorsnede in de overige. De doorsnede door de dubbele klempunten zal eene kromme van de vierde orde zijn met een bijzonder punt, samengesteld uit twee keerpunten en een dubbelpunt; dit punt onderscheidt zich op het oog niet van eenig ander punt der kromme.

Bij de bijzondere doorsneden moet verder opgemerkt worden, dat eene doorsnede door eene beschrijvende lijn, welke door een klempunt gaat, eene kromme van de derde orde met een keerpunt is, dat gelegen is op de beschrijvende lijn. Is de beschrijvende lijn tevens grenslijn, dan wordt de doorsnede eene kromme van de derde orde met een dubbelpunt, dat de beschrijvende lijn tot raaklijn heeft. In een dubbel klempunt vereenigen zich de drie beschrijvende lijnen; de doorsnede, door de drievoudige lijn gelegd, geeft eene kromme van de derde orde met keerpunt; de keerraaklijn is de drievoudige beschrijvende lijn.

Geval B.

41. Daar in dit geval *l* zoowel eene beschrijvende lijn van het oppervlak R^4 als een onderdeel der basiskromme van den oppervlakkenbundel is, bezit elk oppervlak van dien bundel eene dubbele beschrijvende lijn.

Hieruit volgt, dat de oppervlakkenbundel overgaat in een kegelbundel; de kegelvlakken, hiertoe behoorende, hebben hun' top op *t*, de kegelsnede c^2 is hunne gemeenschappelijke richtlijn, en de puntenrij, op *t* door de toppen bepaald, is projectief met de vlakkeninvolutie. De beschrijvende lijnen kunnen dus geconstrueerd worden.

42. De doorsnijding met een plat vlak biedt, vergeleken met de vorige, geen bijzonderheden aan, slechts zal, bij verplaatsing der doorsneden, men aan het drievoudig punt altijd ééne raaklijn krijgen, die in een onveranderlijk raakvlak ligt. Van twee kegelsneden-doorsneden zullen dus de raaklijnen in hare snijpunten met *t* in dit vlak liggen.

Eveneens kan onveranderd worden toegepast het beginsel

der constructie van de dubbelrakende ontwikkelbare; de kegelsnedenbundel, liggende in het vlak α van c^2, (38) ondergaat in zijnen stand evenwel eene wijziging. Wederom hebben de geprojecteerde kegelsneden met elkander gemeen de beide snijpunten P en Q van c_1^2 met α, het snijpunt T van α met t en tot raaklijn de snijlijn van α met het vlak, door t rakende aan c_1^2 gebracht. Deze laatste raaklijn is evenwel nu ook eene raaklijn van c^2, zoodat de kegelsneden van den bundel, behalve het raakpunt, slechts twee punten met c^2 gemeen hebben, welke door hunne vereeniging eenen stralenbundel doen ontstaan. Hieruit volgt:

Een der dubbelrakende vlakken wordt door de andere gesneden in een' stralenbundel; deze vlakken omhullen dus een' kegel van de tweede klasse, welke tot top het middelpunt A van den stralenbundel heeft. Het standvastige raakvlak door t vult de klasse der dubbelrakende ontwikkelbare tot drie aan.

43. In overeenstemming met het vorige geval ziet men, dat er klempunten worden gevonden, indien men uit A raaklijnen aan c^2 trekt; de kegeltop, die bij deze raaklijn behoort zal een klempunt op t zijn. Nog ontstaat er een bijzonder punt op t, wanneer men den kegeltop construeert, welke behoort bij de lijn, die uit A naar T getrokken wordt; dit punt heeft de bijzonderheid, dat van de raakvlakken, door hetzelve aan R^4 gebracht, er een te zamenvalt met het standvastige raakvlak. De standen, die het punt A ten opzichte van c^2 innemen kan, geven wederom aanleiding tot de volgende verdeeling;

a. A ligt buiten c^2.

b. A ligt binnen c^2.

c. A ligt buiten c^2 op de raaklijn door T aan c^2 getrokken.

In het laatste geval zal er door het bijzondere punt eene doorsnede gaan, die een punt heeft dat uit twee keerpunten en een dubbelpunt bestaat. Voor de verdere bijzondere doorsneden kan naar het geval A verwezen worden.

Geval C.

44. In dit geval heeft men eene scheeve vierzijde, die

tot overstaande zijden heeft l_1, l_3, benevens t, l_2. Men neme, even als bij geval *A*, *P* op *t* aan, trekke door *P* in het vlak *P* l_2 een' stralenbundel, projectief met de straleninvolutie door de vlakkeninvolutie in dit zelfde vlak bepaald, en bepale de gemeenschappelijke homologe stralen van beide; dit zijn de drie beschrijvende lijnen uit *P*; bij verplaatsing van *P* wordt het geheele oppervlak beschreven.

Het kenmerkende onderscheid tusschen dit oppervlak en dat, genoemd in geval *A* dezer groep, is dus hierin gelegen, dat bij het laatste drie beschrijvende lijnen, uit een punt van *t* getrokken, niet in één vlak liggen, terwijl dit bij het hier behandelde wel het geval is.

Verder is het niet moeilijk in te zien, dat men hetzelfde oppervlak verkrijgt wanneer men op l_2 eene punten involutie aanneemt en deze projectief maakt met de oppervlakkenschaar, door $t\ l_1\ l_2\ l_3$ bepaald, die dus het vlak l_2 in een' stralenbundel snijdt.

Dit oppervlak is dus met zich zelf wederkeerig; de lijn l_2 is tevens de dubbelrakende ontwikkelbare.

De vorm van de vlakke doorsnede van dit oppervlak zal zich niet van dien van de vorige gevallen onderscheiden; zij heeft een drievoudig punt en de omhullingskegels hebben een drievoudig raakvlak.

45. Voor het opsporen der klempunten moet een andere weg ingeslagen worden dan in het vorige geval, daar de doorsnijding, verkregen door een vlak gebracht door twee beschrijvende lijnen, bestaat uit drie beschrijvende lijnen en de lijn l_2. Ten einde ook voor dit geval de klempunten te vinden, legge men een vlak π door éene beschrijvende lijn l; dit vlak snijdt t in *T* en l_2 in L_2; *T* is dan tevens een dubbelpunt van de snijkromme c^3 en L_2 ligt op l. Elk vlak, door l_2 gebracht, snijdt π in eene lijn, die c^3 in drie punten snijdt, welke drie punten men vereenigt met het snijpunt van het bewegelijke vlak met t; men verkrijgt alzoo in elk vlak drie beschrijvende lijnen. Zoodra twee dezer zich vereenigen, d. i. voor elke raaklijn uit L_2 aan c^3 getrokken, vindt men dus in het daarbij behoorend punt op t een klempunt. Dit geeft aanleiding tot de navolgende gevallen:

a. L_2 ligt zoodanig, dat er vier bestaanbare raaklijnen aan c^3 kunnen worden getrokken.

b. Uit L_2 kunnen twee bestaanbare en twee toegevoegd imaginaire raaklijnen aan c^3 worden getrokken.

c. Uit L_2 kunnen slechts imaginaire raaklijnen aan c^3 worden getrokken; c^3 heeft een dubbelpunt.

d. Uit L_2 kunnen slechts imaginaire raaklijnen aan c^3 worden getrokken; c^3 heeft een geïsoleerd punt.

Hieruit ziet men, dat de algemeene gevallen overeenstemmen met die, in het geval *A* dezer groep verkregen. Men kan ook de bijzondere gevallen der klempunten verkrijgen; namelijk de vereeniging van klempunten op verschillende wijzen. Het kan namelijk zijn, dat L_2 op eene raaklijn aan een buigpunt van c^3 ligt, of ook wel, dat L_2 het snijpunt is van twee raaklijnen, ieder aan een buigpunt getrokken. Houdt men nu in het oog, dat in het eerste geval de beide andere raaklijnen uit L_2 bestaanbaar of toegevoegd imaginair kunnen zijn; dat in het tweede geval L_2 het snijpunt van twee bestaanbare of wel van twee toegevoegd imaginaire buigraaklijnen kan zijn, dan ziet men, dat de bijzondere gevallen van het geval *A* zich ook hier kunnen voordoen.

Eveneens kan naar het geval *A* verwezen worden, wat betreft de vormen der bijzondere doorsneden, door klempunten, grenslijnen enz. gelegd.

Geval D.

46. Even als bij het geval *C* der eerste groep (20) treden hier op als gegevens van den oppervlakkenbundel de rechte lijnen l_1 en l_3, hare transversaal t en een vlak door t, in hetwelk eene lijn r eene raaklijn is aan elk oppervlak van den bundel. Elke straal van den stralenbundel, welks middelpunt het snijpunt van t en r is, en die gelegen is in het vlak $t\,r$, bepaalt met l_1 en l_3 een oppervlak; is nu deze stralenbundel projectief met de vlakkeninvolutie, dan snijdt elk vlakkenpaar het homologe oppervlak in twee beschrijvende lijnen; men kan dus de opeenvolging van deze

construeeren. Even als in het vorige geval is het oppervlak met zich zelf wederkeerig; de dubbelrakende ontwikkelbare gaat steeds door t.

47. De doorsnijding met een plat vlak π is wederom eene kromme van de vierde orde met een drievoudig punt; zij ontstaat door de doorsnijding der homologe elementen van eene straleninvolutie met een' kegelsnedenbundel; deze laatste bundel wordt bepaald door de snijpunten van π met l_1, l_3, t en de raaklijn, door het laatst gemelde snijpunt aan alle kegelsneden van den bundel getrokken. De drie raaklijnen aan dit drievoudige punt worden gevonden door de raaklijn van den kegelsnedenbundel, en het stralenpaar der involutie, dat homoloog is met de bijzondere kegelsnede van den bundel, welke vertegenwoordigd wordt door de snijlijnen van π met de twee vlakken $t\,l_1$ en $t\,l_3$. De twee vlakken $t\,l_1$ en $t\,l_3$ vormen nu, bij elkander gedacht, een element van den oppervlakkenbundel, zoodat met dit vlakkenpaar één bepaald vlakkenpaar der vlakkeninvolutie overeenkomt; hieruit volgt, dat van de drie raakvlakken door elk punt der drievoudige lijn gebracht er twee standvastig zijn. Ook bij dit oppervlak liggen voor elk punt drie beschrijvende lijnen in één vlak.

48. Daar twee der raakvlakken standvastig zijn, kunnen klempunten alleen voorkomen, als het bewegelijke raakvlak aan een punt van t samenvalt met een der standvastige raakvlakken. Deze punten kan men op de navolgende wijze opsporen.

Men denke zich een oppervlak R^2 van den oppervlakkenbundel geconstrueerd; dit zal in elk punt van t een raakvlak bezitten en het raakvlak in een dier punten moet voor den geheelen bundel constant zijn. Dit raakvlak is tevens raakvlak van het scheeve oppervlak R^4. Zijn dus nu de standvastige raakvlakken ϱ_1 en ϱ_2 van R^4 bepaald, dan bepale men de lijn volgens welke een dezer vlakken R^2 snijdt, het snijpunt dezer lijn met t geeft een klempunt. Er zijn dus twee dezer punten; en het oppervlak laat zich naar de bestaanbaarheid dezer klempunten verdeelen.

Ook bestaat de mogelijkheid, dat het vlakkenpaar ϱ_1 en

ϱ_2 der vlakkeninvolutie een dubbelvlak der involutie is; alsdan heeft men slechts één standvastig raakvlak, terwijl elk der punten van t tevens een keerpunt van de vlakke doorsnede van R^4 is. Men komt alzoo tot de volgende soorten.

a. ϱ_1 en ϱ_2 zijn bestaanbaar, de vlakkeninvolutie is elliptisch of hyperbolisch; er zijn twee bestaanbare klempunten.

b. ϱ_1 en ϱ_2 zijn toegevoegd imaginair, de vlakkeninvolutie is hyperbolisch; er zijn geen bestaanbare klempunten.

c. ϱ_1 en ϱ_2 vereenigen zich in één raakvlak ϱ; de vlakkeninvolutie is hyperbolisch; er is één klempunt (eigenlijk twee samenvallende klempunten).

Bij de vlakke doorsneden door deze bijzondere punten zullen, even als bij geval *A*, weder de verschillende vormen van drievoudige punten zich voordoen.

VI. Vierde Groep.

47. Uit de wijze van ontstaan blijkt, dat deze groep uit oppervlakken zal bestaan, die wederkeerig zijn met die van de voorgaande. Het is onnoodig om de redeneeringen op te stellen, noodig om tot de verdeeling in soorten te geraken; voldoende zal het zijn, zoo hier aangegeven worden die gevallen, die verschillend zijn van die der vorige groep. Daar de gevallen *C* en *D* der voorgaande groep wederkeerig zijn met zichzelven, zoo behooren zij mede tot deze groep en blijven zij dus verder buiten beschouwing. Voor de gevallen *A* en *B* der voorgaande groep komen nu de volgende in plaats.

A. Het ontwikkelbare oppervlak van de derde klasse γ^3 wordt vervangen door een kegelvlak van de tweede klasse γ^2 en eene raaklijn l aan γ^2.

B. Deze raaklijn l valt te zamen met de draaglijn der punteninvolutie.

Geval A.

48. Met het oog op de voorgaande opmerking omtrent de wederkeerigheid van dit oppervlak met het geval A der voorgaande groep, kunnen zonder vernieuwing van bewijzen de volgende eigenschappen worden afgeleid.

Het oppervlak heeft eene dubbelrakende ontwikkelbare, welke is overgegaan in eene rechte lijn t; elk vlak π door deze rechte lijn t bezit drie raakpunten, zoodat men haar eene drievoudig rakende ontwikkelbare kan noemen. De constructie der beschrijvende lijnen, liggende in een vlak door deze lijn gebracht, is wederkeerig met de constructie van (37).

In het vlak π vormen de beschrijvende lijnen een' driehoek. Uit elk hoekpunt van dien driehoek kan een omhullingskegel aan het oppervlak beschreven worden; deze kegel is van de tweede klasse en raakt aan t. De beschrijvende lijnen van het oppervlak glijden bij hare beweging langs t en twee dezer kegels.

De dubbelkromme is eene scheeve kromme van de derde orde c^3.

49. Men kan bij dit oppervlak de klemvlakken bepalen, gelijk in de voorgaande groep de klempunten bepaald zijn; men komt dan tot een aantal soorten, gelijkstaande met dat van geval A der voorgaande groep. Het heeft evenwel ook geen bezwaar in dit geval de klempunten op te sporen; hierdoor moet men dan tot dezelfde verdeeling komen. Om deze klempunten te construeeren kan men den volgenden weg inslaan.

De vlakken door t snijden de dubbelkromme c^3 in drie punten; wordt zulk een vlak raakvlak aan c^3 dan vereenigen zich twee dezer punten; het vlak wordt een klemvlak, het derde punt wordt een klempunt op c^3 en de twee beschrijvende lijnen, die zich in dit klempunt vereenigen, worden tot eene grenslijn. Daar er door eene lijn, buiten eene kromme van de derde orde gelegen, aan die kromme vier raakvlakken kunnen worden gebracht, zoo ontstaan de volgende soorten:

a. Door t kunnen vier bestaanbare raakvlakken aan c^3 gebracht worden.

b. Door t kunnen twee bestaanbare en twee toegevoegd imaginaire raakvlakken aan c^3 gebracht worden.

c. Door t kunnen geen andere dan imaginaire raakvlakken aan c^3 worden gebracht; alle koorden die t snijden hebben bestaanbare eindpunten.

d. Door t kunnen slechts imaginaire raakvlakken aan c^3 worden gebracht; alle koorden die t snijden hebben toegevoegd imaginaire eindpunten.

De bijzondere gevallen worden verkregen wanneer t òf wel in een osculatievlak van c^3 ligt, òf wel de snijlijn is van twee osculatievlakken. Geeft men aan t nu deze bijzondere standen, dan ontstaan dezelfde bijzondere gevallen als bij dat geval der voorgaande groep, dat met dit wederkeerig is.

De vlakke doorsnede van het oppervlak is eene kromme van de vierde orde met drie dubbelpunten, die naar omstandigheden keerpunten kunnen worden.

De gegeven beschouwing kan dienen, om de vormen van den omhullingskegel bij het geval A van de vorige groep af te leiden.

Geval B.

50. De wederkeerigheid van dit oppervlak met het oppervlak B van de voorgaande groep geeft de navolgende eigenschappen.

Men brenge door t een vlakkenbundel, die een kegelvlak van de tweede klasse, van hetwelk t eene raaklijn is, volgens kegelsneden snijdt; beschouwt men elke kegelsnede als homoloog met een puntenpaar der involutie op t, dan zullen de raaklijnen uit de puntenparen dezer involutien aan de kegelsneden de beschrijvende lijnen van het oppervlak zijn.

Het oppervlak kan ook ontstaan door de beweging eener lijn langs de lijn t, welke laatste aan twee kegelvlakken van de tweede klasse raakt, en getrokken is door het snijpunt van twee beschrijvende lijnen dezer kegelvlakken; de beschrijvende lijn moet dan ook aan beide kegelvlakken rakende blijven.

Het oppervlak bezit eene dubbel-kegelsnede en een punt, dat de eigenschap heeft, dat elke lijn, door hetzelve getrokken, tot een omhullingskegel van het oppervlak behoort.

Even als bij geval *B* der voorgaande groep laat zich dit oppervlak in drie soorten verdeelen; deze verdeeling geeft na het aldaar behandelde geene aanleiding tot bezwaren.

Ook alle verdere eigenschappen van dit oppervlak geven met het oog op de wederkeerigheid van dit oppervlak met het vroeger behandelde geene stof tot nieuwe opmerkingen.

October 1888.

ALGEMEENE OPMERKINGEN OVER DE GEVONDENE OPPERVLAKKEN.

Ten einde het overzicht van de gevondene groepen van oppervlakken te vereenvoudigen wordt hier bijgevoegd eene tabel van de verschillende resultaten in de voorgaande beschouwingen verkregen. Zij worden vergeleken met de ordeningen van ROHN, SALMON, CREMONA en CAYLEY. Men kan deze tabel beschouwen als eene aanvulling en uitbreiding van de nummers in SALMON-FIEDLERS *Geometrie des Raumes* aangegeven. Bij hare samenstelling is alleen rekening gehouden met de verdeeling in groepen en de daarin voorkomende hoofdgevallen, terwijl voor de verdere indeeling naar gelang der klempunten naar den tekst verwezen wordt.

Het is verder niet zonder belang na te gaan, in welke groepen enkele meer bekende scheeve oppervlakken van de vierde orde hunne plaats vinden. Na de gegevene ontwikkelingen kan dit zonder bezwaar geschieden. Hier volgt dus eene aanwijzing daaromtrent dezer oppervlakken. *)

a. Het normalen-oppervlak. Dit oppervlak wordt beschreven door de normalen van een oppervlak van de tweede orde, getrokken aan de punten eener vlakke doorsnede evenwijdig aan een der hoofdvlakken. Als meetkundig bewezen mag worden aangenomen, dat dit oppervlak ook kan ontstaan door uit het middelpunt eener kegelsnede c^2 eene loodlijn op te richten op het vlak π dezer kegelsnede; neemt men nu twee punten op deze loodlijn aan en trekt men door het eene eene lijn d, evenwijdig aan eene der

---

*) Daar het voornamelijk het doel is, de oppervlakken in de gevondene groepeering op hunne plaats te stellen, zoo wordt, wat betreft de meetkundige eigenschappen, verwezen naar de handboeken van Beschrijvende Meetkunde.

assen van c^2, en door het andere eene lijn d', evenwijdig aan de tweede, dan zijn d, d' en c^2 de richtlijnen van het oppervlak. Het vlak π vormt bij dit oppervlak eene doorsnede van de vierde orde, overgegaan in de kegelsnede c^2 en de lijn, die de snijpunten van d en d^2 met π verbindt, d. i. de oneindig ver gelegene lijn van π. De dubbelkromme bestaat dus uit d, d' en de beiden snijdende oneindig ver gelegene lijn van π. Het normalenoppervlak behoort dus tot de tweede groep, geval C. Is c^2 eene ellips, dan behoort het tot de soort b; is c^2 eene hyperbool, dan tot de soort c; is c^2 eene parabool, dan tot de soort e.

b. De cirkelconoïde. Deze heeft tot richtlijnen een cirkel c^2, gelegen in een vlak π, eene lijn d, en tevens loopen de beschrijvende lijnen evenwijdig aan een vlak α of, met andere woorden, snijden de oneindig ver gelegen lijn van α. Zooals door te vergelijken met het vorige geval blijkt, behoort dit oppervlak eveneens tot de tweede groep, geval C; de dubbelkromme bestaat uit de lijn d, de oneindig ver verwijderde lijn van α, en eene lijn l door het snijpunt D van d met π evenwijdig aan de snijlijn van π en α getrokken. Valt D binnen den cirkel c^2, dan behoort het tot de soort c; valt D buiten c^2, dan behoort het tot de soort a, b of e, naar gelang l den cirkel snijdt, niet snijdt of raakt.

c. De wig van Wallis. Dit is een bijzonder geval van de cirkelconoïde; de lijn d loopt bij dit oppervlak evenwijdig aan π, hare projectie op π is eene middellijn van den cirkel c^2 en het richtvlak α staat loodrecht op d. De dubbelkromme bestaat uit de lijn d en de oneindig ver verwijderde lijnen van α en π; de lijn l en dus ook de punten D en D' liggen nu geheel op oneindigen afstand van c^2. Het oppervlak behoort dus tot de tweede groep, geval C, soort b. Er zijn twee klempunten op d, zoodanig gelegen, dat hunne projectiën op π in den omtrek van c^2 vallen en twee op de oneindig ver verwijderde lijn l, liggende in de vlakken door d rakende aan den cirkel gebracht. De klemvlakken zijn de vlakken, door de klempunten op d evenwijdig aan α gebracht, en de raakvlakken door d aan den cirkel c^2. Het oppervlak heeft vier grenslijnen; de lood-

lijn uit de klempunten van d op π, en de beschrijvende lijnen liggende in de klemvlakken door d.

d. Het oppervlak, ontstaande door de homologe punten van twee projectieve puntenrijen op twee in de ruimte gelegen kegelsneden te verbinden.

Volgens de wijze van ontstaan beschreven in de tweede groep, geval A, kan het oppervlak, dat tot dubbelkromme eene scheeve kromme van de derde orde c^3 heeft, ontstaan door eene koorde van deze kromme te laten glijden langs een kegelvlak van de tweede orde, welks top op c^3 ligt. Uit twee punten van c^3 deze lijnen projecteerende, verkrijgt men de raakvlakken van twee kegeloppervlakken van de tweede orde, welke met elkander in projectief verband staan; daar het oppervlak volgens het behandelde in de tweede groep A met zich zelf wederkeerig is, kan het dus ook ontstaan door de verbinding der homologe punten van twee projectieve puntenrijen op twee kegelsneden.

e. De cilindroïde. Men denke zich in een cilindervlak van de tweede orde twee willekeurige vlakke doorsneden c_1^2 en c_2^2 geconstrueerd, gelegen in de vlakken α en β. Verschuift men nu c_2^2 in β, zoodanig dat alle punten lijnen beschrijven evenwijdig aan de snijlijn l van α en β, en verbindt men dan de punten, die oorspronkelijk op dezelfde beschrijvende lijnen van den cilinder lagen, dan ontstaat eene cilindroïde.

Het is duidelijk, dat men te doen heeft met een bijzonder geval van het oppervlak, ontstaande door de verbinding van de homologe punten van twee projectieve puntenrijen op twee kegelsneden. Er ontstaat dus in elk geval een oppervlak tot de tweede groep behoorende; het zal geheel omschreven zijn, zoodra men de dubbelkromme kent.

De beide vlakken α en β door l gebracht snijden de cilindroïde volgens kegelsneden; de lijn l is dus eene dubbellijn; voor het geval dat c_1^2 en c_2^2 l snijden blijkt dit ook, door dat zij twee over elkaar liggende beschrijvende lijnen vertegenwoordigt. De beschrijvende lijnen der cilindroïde loopen verder alle evenwijdig aan een vlak γ, door l evenwijdig aan de oorspronkelijke beschrijvende lijnen van

den cilinder gebracht; zij snijden dus de oneindig ver verwijderde lijn l_∞ van γ. Deze lijn l_∞ vertegenwoordigt twee oneindig dicht bij elkander gelegen lijnen. Men beschouwe, om zich hiervan te overtuigen, de doorsnede $c_1{}^2$ in α. Men verkrijgt in het algemeene geval der tweede groep C de klempunten en de grenslijnen door uit D en D' de raaklijnen aan $c_1{}^2$ te trekken, welke dus in het algemeen vier in getal zijn. In dit geval kunnen er evenwel alleen grenslijnen ontstaan, wanneer men raaklijnen trekt aan $c_1{}^2$ evenwijdig aan l, de beide punten D en D', uit welke de raaklijnen getrokken worden zijn dus in het oneindige te zamengevallen.

De cilindroïde behoort alzoo tot de tweede groep, geval E en wel tot de soorten a, b of c of d naar gelang l den cilinder snijdt, niet snijdt of raakt.

f. Het scheeve tongewelf. Dit oppervlak heeft tot richtlijnen twee gelijke cirkels $c_1{}^2$ en $c_2{}^2$ in evenwijdige vlakken, benevens de normaal d der vlakken, die den afstand der middelpunten van de cirkels midden door deelt.

Uit een punt P van d de kegelvlakken construeerende, die tot richtlijnen hebben $c_1{}^2$ en $c_2{}^2$, ziet men, dat deze kegels twee gemeenschappelijke stralen hebben, welke gericht zijn naar de oneindig ver verwijderde cirkelpunten van de evenwijdige vlakken en twee andere gemeenschappelijke stralen, welke tot het oppervlak behooren. De lijn d is dus eene dubbellijn.

Door d vlakken leggende, ziet men, dat deze gedurig twee evenwijdige beschrijvende lijnen van het oppervlak bepalen; het oppervlak bezit dus in het oneindig ver verwijderde vlak eene dubbelkromme. Uit het punt A van d, dat den afstand der evenwijdige vlakken midden doordeelt, den richtkegel van het scheeve tongewelf construeerende, ziet men, dat deze richtkegel van de tweede orde is, en dat de lijn d er op ligt; het scheeve tongewelf heeft dus eene dubbelkromme bestaande uit de lijn d, benevens eene deze snijdende kromme van de tweede orde, gelegen in het oneindig ver gelegen vlak. Het oppervlak behoort alzoo tot de afdeeling B van de tweede groep.

Projecteert men uit de punten van d de oneindig ver verwijderde kromme op het vlak van c_1^2, dan ontstaat een cirkelbundel, gaande door het snijpunt D van d met dit vlak en rakende aan eene lijn, door D getrokken loodrecht op de door D gaande middellijn van c_1^2. Deze cirkels snijden c_1^2 volgens evenwijdige koorden; de dubbelrakende ontwikkelbare bestaat dus, behalve uit d, uit een cilinder van de tweede orde, welks beschrijvende lijnen d loodrecht kruisen. Grenslijnen zijn die beschrijvende lijnen, die met d en de middelpunten der cirkels in een vlak liggen en d in de klempunten snijden. Twee andere grenslijnen vindt men door uit d raakvlakken aan de cirkels te leggen; zij zijn onbestaanbaar als d door de cirkels heen loopt, anders bestaanbaar; zij geven aanleiding tot klempunten in de oneindig ver verwijderde dubbelkromme. Het oppervlak behoort dus tot de tweede groep, geval B, soort b of c.

OVERZICHT

VAN DE

BOEKEN, KAARTEN, PENNINGEN, ENZ.

OVERZICHT

VAN DE

BOEKEN, KAARTEN, PENNINGEN, ENZ.,

INGEKOMEN BIJ DE

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN

TE AMSTERDAM.

VAN APRIL 1887 TOT EN MET MAART 1888.



AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1888.

GEDRUKT BIJ DE ROEVER KRÖBER-BAKELS.

OVERZICHT

VAN DE

BOEKWERKEN

DOOR DE

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN

ONTVANGEN EN AANGEKOCHT.

1888—1889.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAAND APRIL 1888.

NEDERLAND.

Bouwkundig Tijdschrift, uitgegeven door de Maatschappij tot bevordering der Bouwkunst. Amsterdam 1886—1887. Deel VI—VII. fol.

Afbeeldingen van oude bestaande gebouwen, uitgegeven door de Maatschappij tot bevordering der Bouwkunst. Amsterdam 1887. Afl. 27—28. fol.

Tijdschrift uitgegeven door de Nederlandsche Maatschappij ter bevordering van Nijverheid. Haarlem 1888. 4e Reeks. Deel XII. Afl. 3. 8°.

Tijdschrift der Nederlandsche dierkundige Vereeniging. Leiden 1888. 2de Serie. Deel II. Afl. 1—2. 8°.

Jhr. Rochussen. Studies over Geld- en Muntwezen. 's Gravenhage 1888. 8°.

Bijdragen tot de taal- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië, uitgegeven door het koninklijk Instituut voor de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië. 's Gravenhage 1888. 5de Reeks. Deel III. Afl. 2. 8°.

De opkomst van het Nederlandsch gezag in Oost-Indië. 's Gravenhage 1888. Deel XIII. 8°.

Overzicht der scheepvaartkanalen in Nederland met overzichtskaart en schetskaarten. 's Gravenhage 1888. fol. (Uitgegeven door het Ministerie van Waterstaat, Handel en Nijverheid.)

Algemeen Nederlandsch Familieblad. Tijdschrift voor geschiedenis, geslacht-, wapen-, zegelkunde, enz. 's Gravenhage 1888. Jaarg. 5. N°. 3. 4°.

P. J. Blok. Correspondentie van en betreffende Lodewijk van Nassau en andere onuitgegeven documenten. Utrecht 1887. 8°.
(Werken van het historisch Genootschap. Nieuwe Serie. N°. 47).

———— De kroniek van Sicke Benninge 1e en 2e deel (Kroniek van van Lemego). Utrecht 1887. 8°.
(Werken van het historisch Genootschap. Nieuwe Serie. N°. 48).

E. van Dieren. Critiek op de beweringen van Prof. Pekelharing omtrent de Beri-Beri. Arnhem 1887. 8°.

———— Nogmaals: De Beri-Berikwestie. Arnhem 1888. 8°.

A. D. Loman. De oorsprong van het geloof aan de opstanding van Jezus. 8⁰.
(Overgedrukt uit »De Gids" 1888).

C. L. van der Burg. Kolonisatie van Nederlanders in Nederlandsch Oost-Indië. 8⁰.

—————— Over den invloed der verplaatsing naar Europa voor zieken uit Nederlandsch-Indië. 8⁰.

Verzamelingstabel der waterhoogten langs de kusten van de Noordzee, Zuiderzee en de Nederlandsche rivieren, waargenomen in de maand November 1887. fol.

Verzamelingstabel der waterhoogten volgens de bladen der zelfregistreerende peilschalen, waargenomen in de maand November 1887. fol.

NEDERLANDSCH OOST-INDIË.

Tijdschrift voor nijverheid en landbouw in Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Nederlandsch-Indische Maatschappij van Nijverheid en Landbouw. Batavia 1888. Deel XXXVI. Afl. 3. 8⁰.

H. P. J. van den Berg. Brieven van een suikerfabrikant over de muntkwestie in verband tot de landbouw-nijverheid. Batavia 1888. 8⁰.
(Uitgegeven door de Nederlandsch-Indische Maatschappij van Nijverheid en Landbouw).

Observations made at the magnetical and meteorological Observatory. Batavia 1887. Vol. IX. 4⁰.

Regenwaarnemingen in Nederlandsch-Indië. Batavia 1887. Jaarg. 8. 8⁰.

BELGIË.

Bulletin de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des beaux-Arts de Belgique. Bruxelles 1888. 3e Série. Tome XV. N⁰. 2—3. 8⁰.

Bulletin de l'Académie royale de Médecine de Belgique. Bruxelles 1888. 4e Série. Tome II. N⁰. 3. 8⁰.

M. Mourlon. Géologie de la Belgique. Bruxelles 1880—1881. 2 Dl. 8⁰.

———— Observations sur le classement des couches tertiaires moyennes dans le Limbourg Belge. Bruxelles. 8⁰.

(Extrait des Annales de la Société malacologique de Belgique. Tome VIII).

———— Note sur le gîte fossilifère d'Aeltre (Flandre orientale). Bruxelles 1872. 8⁰.

(Extrait des Annales de la Société malacologique de Belgique. Tome VI).

———— Sur la structure des couches du Crag, de Norfolk et de Suffolk, avec quelques observations sur leur restes organiques. Bruxelles 1874. 8⁰.

———— Sur l'étage dévonien des psammites du Condroz en Condroz. Bruxelles 1875. 8⁰.

(Extrait des Bulletins de l'Académie royale de Belgique. Tome XXXIX et XL).

———— Etudes stratigraphiques sur les dépôts miocènes supérieurs et pliocènes de Belgique. Bruxelles 1876—78 8⁰.

(Extrait des Bulletins de l'Académie royale de Belgique. Tome XLII)

M. Mourlon. Sur les dépots dévoniens rapportés par Dumont à l'étage quartroschisteux inférieur de son système Eifelien. 8°.
(Extrait des Bulletins de l'Académie royale de Belgique. Tome XLI).

——————— Sur les amas de sables et les blocs de grès disséminés à la surface des collines famenniennes dans l'Entre-Sambre-et-Meuse. Bruxelles 1884. 8°.
(Extrait des Bulletins de l'Académie royale de Belgique. 3e Serie. Tome VII).

——————— Sur l'existence des psammites du Condroz aux environs de Beaumont dans l'Entre-Sambre-et-Meuse. Bruxelles 1885. 8.
(Extrait des Bulletins de l'Académie royale de Belgique. 3e Série. Tome VII).

——————— Sur le famennien dans l'Entre-Sambre-et-Meuse. Bruxelles 1886. 8°.
(Extrait des Bulletins de l'Académie royale de Belgique. 3e Série. Tome XII).

——————— Sur le famennien de la plaine des Fagnes. Bruxelles 1886. 8°.
(Extrait des Bulletins de l'Académie royale de Belgique. 3e Série. Tome XII).

F. Plateau. Recherches expérimentales sur la vision chez les Arthropodes. Bruxelles 1888. 3e Partie. 8°.
(Extrait des Bulletins de l'Académie royale de Belgique. 3e Série. Tome XV).

Table générale des Annales de la Société entomologique de Belgique. I—XXX. Bruxelles 1887. 8°.

Bulletin du Musée royal d'Histoire naturelle de Belgique. Bruxelles 1888. Tome V. N⁰. 1. 8⁰.

Annales de la Société géologique de Belgique. Liége 1887. Tome XIII. Livr. 1. 8⁰.

Annuaire de l'Université catholique de Louvain. 1888. Année 52. 8⁰.

J. de Coster. Le problème de la finalité. Louvain 1887. Dissertation. 8⁰,

A. Hebbelynck. De auctoritate historica libri Danielis necnon de interpretatione vaticinii LXX hebdomadum. Lovanii 1887. 8⁰,

FRANKRIJK.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Paris 1888. Tome CVI. N⁰. 13—16. 4⁰.

Bulletin de l'Académie de Médecine. Paris 1888. 3e Série. Tome XIX. N⁰. 13—16. 8⁰.

Bulletin de la Société philomatique de Paris. 1887. 7e Série. Tome XII. N⁰. 1. 8⁰.

Journal d'Hygiène. Paris 1888. 14e Année. Vol. XIII. N⁰. 602—604. 4⁰.

Revue internationale de l'Electricité et de ses applications. Paris 1888. 4e Année. Tome VI. N⁰. 55.roy. 8⁰.

F. Plateau. Expériences sur le role des palpes chez les arthropodes maxillés. 3e Partie. 8⁰.
(Extrait du Bulletin de la Société zoologique de France. Tome XII).

Le cinq Mai, ode sur la mort de Napoléon par A. MANZONI. Traduction littérale en Roumain avec notes philologiques par M. G. OBÉDÉNARE. Montpellier 1885. 8°.

GROOT-BRITTANNIË EN IERLAND.

Monthly Notices of the royal astronomical Society. London 1888. Vol. XLVIII. N°. 5. 8°.

Proceedings of the royal geographical Society. London 1888. New Series. Vol. X. N°. 4. 8°.

OOSTENRIJK-HONGARIJË.

Abhandlungen der kais. kön. geologischen Reichsanstalt. Wien 1887. Band XI. Abth. 2. 4°.

Inhoud:

D. STUR. Die Calamarien der Carbon-Flora der Schatzlarer Schichten.

Jahrbuch der kais. kön. geologischen Reichsanstalt. Wien 1888. Jahrg. 1887. Heft 2. 4°.

Verhandlungen der kais. kön. geologischen Reichsanstalt. 1887. N°. 9—16. 4°.

Mittheilungen der kais. kön. geographischen Gesellschaft. Wien 1887. Band XXX. 8°.

DUITSCHLAND.

Verhandlungen der kais. Leopoldinisch-Carolinischen deutschen Akademie der Naturforscher. Halle a/S. 1887. Band XLIX—LI. 3 Dl. 4°.

Inhoud, Vol. XLIX;

Vol. L.

Vol. LI.

A. FEIST. Ueber die Schutzeinrichtigen der Laubknospen dicotyler Laubbäume während ihrer Entwickelung.

B. HOFER. Untersuchungen über den Bau der Speicheldrüsen und des dazu gehörenden Nervenapparats von Blatta.

Leopoldina. Amtliches Organ der kais. Leopoldinisch-Carolinischen deutschen Akademie der Naturforscher. Halle 1887. Heft 22—23. 4°.

Katalog der Bibliothek der kais. Leopoldinisch-Carolinischen deutschen Akademie der Naturforscher. Halle 1887. Lief. 1. 8°.

Jahrbücher des Vereins von Alterthumsfreunden im Rheinlande. Bonn 1887. Heft LXXXIV. roy. 8°.

Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der kön. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Leipzig 1887. Band XIV. N°. 5—6. 4°.

Inhoud:

5. O. DRASCH. Untersuchungen über die Papillae foliatae et circumvallatae des Kaninchen und Feldhasen.

6. W. G. HÄNKEL. Elektrische Untersuchungen Ath. 18. Fortsetzung der Versuche über das elektrische Verhalten der Quarz- und der Boracitkrijstalle.

Abhandlungen der philologisch-historischen Classe der kön. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Leipzig. 1887. Band X. N°. 7. 4°.

Inhoud.

M. VOIGT. Ueber die Bankiers, die Buchführung und die Litteralobligation der Römer.

Berichte über die Verhandlungen der kön. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Leipzig 1888. Philologisch-historische Classe. Jahr 1887. N°. 4—5. Mathematisch-physische Classe. Jahr 1887. N°. 1—2. 8°.

Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1888. Jahrg. XI. N°. 276—277. 8°.

Neues lausitzisches Magazin, herausgegeben im Auftrage der oberlausitzischen Gesellschaft der Wissenschaften. Görlitz 1888. Band LXIII. Heft 2. 8°.

Archiv des historischen Vereines von Unterfranken und Aschaffenburg. Würzburg 1887. Band XXX. 8°.

M. Cronthal. Die Stadt Würzburg im Bauernkriege. Nebst einem Anhang: Geschichte des Kitzinger Bauernkriegs von H. Hammer. Würzburg 1887. 8°. (Herausgegeben im Auftrag des historischen Vereins von Unterfranken and Aschaffenburg).

Jahresbericht des historischen Vereines von Unterfranken und Aschaffenburg für 1886. Würzbürg 1887. 8°.

26, 27 und 28er Bericht über die Thätigkeit des offenbacher Vereins für Naturkunde in den Jahren vom 1884 bis 1887. Offenbach a.M. 1888. 8°.

K. von Reinhardstöttner. Aegidius Albertinus, der Vater des deutschen Schelmenromans. München 1888. 8°. (Jahrbuch für Münchener Geschichte. Jahrg. 2).

Z W I T S E R L A N D.

Mémoires de la Société de Physique et d'Histoire naturelle. Genève 1886—1887. Tome XXIX Partie 2. 4°.

Inhoud:

S. Calloni. Anomalies de la fleur du Rumex scutatus Linné, avec notes sur l'évolution florale, l'anthotaxie et la nature axile de l'ovule dans les Rumex.

G. Cellérier. Etude numérique des concours de compensation de chronomètres, faits à l'Observatoire de Genève en 1884 et 1886.

C. de Candolle. Sur une monstruosité du Cyclamen neapolitanum.

J. Müller. Graphideae fecanae, incl. trib. affinibus nec non Graphideae exoticae Acharii, El. Friesii et Zenkeri, e novo studio speciminum originalium expositae et in novam dispositionem ordinatae.

Ch. Cellérier. Note sur la théorie des halos.

I. L. Soret. Sur la couleur de l'eau.

A. Rilliet. Recherches sur la transparence des eaux du lac Léman, faites en 1884, 1885 et 1886.

R. Gautier. La première comète périodique de Tempel, 1887 II, étude consacrée spécialement aux apparitions de 1873 et de 1879

H. Fol et E. Sarasin. Pénétration de la lumière du jour dans les eaux du lac de Genève et dans celles de la Méditerranée.

ITALIË.

Atti della reale Accademia dei Lincei. Roma 1887. Serie 4ª. Rendiconti. Vol. III. Fasc. 12—13. Vol. IV. Fasc. 1. 4⁰.

Bollettino delle opere moderne straniere. Roma 1888. Vol. II. N⁰. 4—6. 8⁰.

Bollettino delle pubblicazioni Italiane. Firenze 1888. N⁰. 54—55. 8⁰.

Archivio per l'Antropologia e la Etnologia. Firenze 1887. Vol. XVII. Fasc. 3. 8⁰.

Memorie della reale Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna. 1886. Serie 4ª. Tomo VII. 4⁰.

Inhoud:

E. Beltrami. Sull' interpretazione meccanica delle formole di Maxwell.

G. Capellini. Sopra resti di un Sirenio fossile (Metaxytherium Lovisati, Cap.) raccolti a monte Fiocca presso Sassari in Sardegna.

A. Saporetti. Metodo universale per iscoprire speditamente gl'istanti del nascere e del tramontare della luna in qualsiasi luogo d'Italia.

G. Cocconi e F. Morini. Ricerche e considerazioni sulla simbiosi nei funghi.

G. Brugnoli. Notizie ed osservazioni intorno alle malattie da malaria nella Provincia di Bologna.

C. Razzaboni. Risultato di esperienze idrometriche sopra tubi addizionali conici divergenti.

A. Cavazzi. Azione del solfuro di carbonio sopra alcuni metalli.

L. Bombicci. Sul giacimento e sulle forme cristalline della datolite della Serra dei Zanchetti (alto Appennino bolognese).

——— Sulle contorsione di tipo elicoide nei fasci prismatici di Antimonite del Giappone.

V. Colucci. Sulla vera natura glandolare della porzione materna della placenta nella donna e negli animali.

P. Loreta. Intorno a un caso di mancanza congenita della vagina.

G. Belloncі. Sui nuclei polimorfi delle cellule sessuali degli anfibi.

S. Trinchese. Ricerche anatomiche sul genere Govia.

C. Belluzzi. Ultime modificazioni indotte al suo decollatore ostetrico.

G. Cuccati. Contributo all'anatomia microscopica della retina del bue e del cavallo.

L. Donati. Di un nuovo accumulatore.

F. Delpino. Funzione mirmecofila nel regno vegetale: prodromo d'una monografia delle piante formicarie.

F. Morini. Contributo all' anatomia ed alla fisiologia dei nettarii estranuziali.

S. Pincherle. Studi sopra alcune operazioni funzionali.

A. Righi. Studi sulla polarizzazione rotatoria magnetica.

A. Gotti. Della tubercolosi bacillare negli uccelli e in particolare di una enzoozia di tubercolosi in un pollaio.

L. Calori. Degli arti superiori deformi in un feto a termine e delle alterazioni ed anomalie ossee, muscolari, nervosi e vascolari concomitanti.

V. Retali. Osservazioni analitico-geometriche sulla proiezione immaginaria delle curve del second' ordine.

G. D'Ajutolo. Si di un osso odontoideo in un uomo di trentatrè anni.

J. Benetti. Teoria generale delle pompe centrifughe.

F. Cavara. Sulla flora fossile di Mongardino, studi stratigrafici e paleontologici.

P. Ruffini. Delle coniche polari inclinate per l'angolo zero principalmente in rispetto alle coniche conjugate.

G. V. Ciaccio e G. Campari. Della soluzione d' ipoclorito di sodio con eccedenza di cloro e della virtu ed efficacia sua discolorante.

Memorie di Matematica e di Fisica della Societa Italiana delle Scienze. Napoli 1887. Serie 3ª. Tomo VI. 4⁰.

Inhoud:

G. Nicolucci. Note paleontologiche.
A. Genocchi. Intorno alla funzione I (x) e alle serie dello Stirling che ne esprime il logaritmo.
C. Segre. Sull' equilibrio di un corpo rigido soggetto a forze costanti in direzione ed intensita e su alcune questioni geometriche affini.
A. de Zigno. Due nuovi pesci fossili della famiglia dei Balistini.
L. Palmieri. Nuove esperienze che rifermano le antecedenti sull' origine dell' elettricità atmosferica.
G. Nicolucci. Sulla necropoli volsca scoperta presso Isola del Liri in provincia di Terra di Lavoro.
A. Scacchi. Lettera di Anton Mario Lorgna.
V. Volterra. Sui fondamenti della teoria delle equazione differenziali lineari.
A. Grieb. Ricerche intorno ai nervi del tubo digerente dell' Elix Aspersa.

Atti della Societa Toscana di Scienze naturali. Processi Verbali. Vol. VI. Adunanza del 15 Gennaio 1888. 8⁰.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. 1888. Tomo II. Fasc. 1—2. roy. 8⁰.

SPANJE EN PORTUGAL.

Memorias de la real Academia de Ciencias exactas, fisicas y naturales. Madrid 1887. Tomo XII, Tomo XIII. Parte 1. 4⁰.

Inhoud, Tomo XII:

F. de P. Rojas. Estudio elemental teorico-practico de las maquinas dinamo-electricas.

Tomo XIII. Parte 1:

D. M. P. Graells. Teorias, suposiciones, discordancias, misterios, comprobaciones, e ignorancia sobre cuestiones biologico-ontogenicas y fisiologicas de los afidios.

Revista de los progressos de las Ciencias exactas, fisicas y naturales. Madrid 1887. Tomo XXII. N^{0}. 4. 8^{0}.

Anuaria de la real Academia de Ciencias exactas, fisicas y naturales. Madrid 1888. kl. 8^{0}.

DENEMARKEN.

Mémoires de l'Académie royale des Sciences. Copenhague 1887. 6e Série. Classe des Sciences. Vol. IV. N^{0}. 4—5. 4^{0}.

Inhoud:

Chr. Fr. Lütken. Tillaeg til Bidrag til kundskab om arterne af slaegten Cyamus Latr. eller Hvallusene (Résumé en français).

——————— Fortsatte Bidrag til kundskab om de arktiske Dybhavs-Tudsefiske, saerligt slaegten Himantolophus. (Résumé en français).

Oversigt over det kongelige danske videnskabernes Selskabs forhandlinger. Kjobenhavn 1887. N^{0}. 2. 8^{0}.

Aarböger for nordisk Oldkyndighed og Historie, udgivne af det kongelige nordiske Oldskrift-Selskab. Kjobenhavn 1887. 2e Raekke. Bind II. Hefte 4. 8^{0}.

RUSLAND.

Verslagen van het keiz. aardrijkskundig Genootschap. St. Petersburg 1888. Deel XXIII. N^{0}. 6. 8^{0}. (In het Russisch).

Jahresbericht am 31 Mai 1887 dem Comité der Nicolai-Hauptsternwarte abgestattet. St. Petersburg 1887. 8°.

Observations de Poulkova. St. Pétersbourg 1887. Vol. XII. 4°.

Inhoud:

M. A. Wagner. Bearbeitung der Rectascentionsbestimmungen für die Epoche 1865. O.

W. Döllen. Stern-Ephemeriden auf das Jahr 1888 zur Bestimmung von Zeit und Azimut, mittelst des tragbaren Durchgangsinstruments im Verticale des Polarsterns. St. Petersburg 1887. roy. 8°.

Annalen des physikalischen Central-Observatoriums. St. Petersburg 1887. Jahrg. 1886. Theil II. 4°.

Bulletin de la Société impériale des Naturalistes. Moscou 1887. N°. 4. 8°.

Schriften herausgegeben von der Naturforscher-Gesellschaft bei der Universität Dorpat. Dorpat 1888. N°. IV. 4°.

Inhoud:

K. Weihrauch. Neue Untersuchungen über die Bessel'sche Formel und deren Verwendung in der Meteorologie.

RUMENIË.

Analele Academiei Romane. Bucuresci 1887. Seria 2 Tomulu IX. 4°.

D. A. Stourdza. Le 10 Mai. Mémoire présenté à l'Académie Roumaine. Bucarest 1887. 8°.

Etymologicum magnum Romaniae. Bucuresci 1888. Tomul II. Fasc. 2. 4°.

Anales de l' Institut météorologique de Roumanie. Bucuresci 1888. Tom. II. 4°.

A Z I Ë.

Journal of the Asiatic Society of Bengal. Calcutta 1888. Vol. LVI. Part 1. N°. 2—3. Part 2. N°. 2—3. 8°.

Proceedings of the Asiatic Society of Bengal. Calcutta 1887—1888. Year 1887. N°. 9—10. 1888. N°. 1. 8°.

A M E R I K A.

Observations made during the year 1883 at the United States naval Observatory. Washington 1887. 4°.

Mineral Resources of the United States, calendar year 1886. Washington 1887. 8°.

Memoirs of the American Academy of Arts and Sciences, Cambridge 1887. Vol. XI. Part 5. N°. 6. 4°.

Inhoud:

S. P. Langley, C. A. Young and E. C. Pickering. Pritchard's Wedge Photometer.

Proceedings of the American philosophical Society. Philadelphia 1887. Vol. XXIV. N°. 126. 8°.

Annual Report of the geological Survey of Pennsylvania for 1886. Harrisburg 1887. Part 1—2. 2 Vol. 8°.

Journal of comparative Medicine and Surgery. Philadelphia 1887. Vol. IX. N°. 1—2. 8°.

Journal of the American medical Association. Chicago 1888. Vol. X. N°. 12—14. 4°.

Johns Hopkins University Circulars. Baltimore 1888. Vol. VII. N°. 64. 4°.

American chemical Journal, edited by Ira Remsen. Baltimore 1888. Vol. X. N°. 2. 8°.

American Journal of Science. New-Haven 1887—1888. 3d Series. Vol. XXXIV. N°. 203—204. Vol. XXXV. N°. 205—206. 8°.

Transactions of the Kansas Academy of Science. Topeka 1887. Vol. X. 8°.

Transactions of the Meriden scientific Association. Meriden 1887. Vol. II. 8°.

F. E. Nipher. The volt, the ohm and the ampere. 8°. (Reprinted from the Journal of the Association of Engineering Societies, 1888).

Memorias de la Sociedad cientifica »Antonio Alzate." Mexico 1888. Tomo I. N°. 8. 8°.

Boletin de Estadistica del estado de Puebla. Puebla de Zaragoza 1888. Tomo I. N°. 30—32. fol.

Revista do Observatorio, publicaçao mensal do imperial Observatorio do Rio de Janeiro. 1888. Anno III. N°. 3. 4°.

Annuario publicado pelo imperial Observatorio de Rio de Janeiro. 1884—1887. Anno 1885—1887. 3 Dl. 4°.

AANGEKOCHT.

De Navorscher. Amsterdam 1888. Nieuwe Serie. Jaarg. 21. N^0. 3—4. 8^0.

J. F. van Someren. Beschrijvende Catalogus van gegraveerde portretten van Nederlanders. Amsterdam 1888. Deel I. 8^0.

La grande Encyclopédie. Inventaire raisonné des Sciences, des Lettres et des Arts. Paris 1888. Livr. 124—126. 4^0.

Journal des Savants. Paris, Mars 1888. 4^0.

Bulletin des Sciences mathématiques. Paris 1888. 2e Série. Tome XII. Avril. 8^0.

Annales de Chimie et de Physique. Paris 1888. 6e Série. Tome XIII. Avril. 8^0.

The London, Edinburgh, and Dublin philosophical Magazine and Journal of Science. London 1888. 5th Series. Vol. XXV. N^0. 125. 8^0.

Annals and Magazine of natural History. London 1888. 6th Series. Vol. I. N^0. 4. 8^0.

Journal of Anatomy and Physiology normal and pathological. London 1888. Vol. XXII. Part 3. 8^0.

Dictionary of national Biography, edited bij L. Stephen. London 1888. Vol. XIV. (Damon-D'Eyncourt). 8^0.

Year-Book of scientific and learned Societies of Great-Britain and Ireland. London 1888. 6th Issue. 8^0.

Annals of Botany. Oxford 1888. Vol. I. N°. 3—4. 8°.

Astronomische Nachrichten. 1888. N°. 2833—2835. 4°.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1888. N°. 6—7. 8°.

Veröffentlichungen des kais. Gesundheitsamtes. Berlin 1888. Jahrg. XII. N°. 12—16. 4°.

Berichte der deutschen botanischen Gesellschaft. Berlin 1888. Jahrg. 6. Heft 2. 8°.

Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1888. Neue Folge. Band XXXIV. Heft 1. 8°.

Zeitschrift für physikalische Chemie. Leipzig 1888. Band II. Heft 1—3. 8°.

Bibliotheca Zoologica II. Leipzig 1888. Lief. 5. 8°.

Der zoologische Garten. Frankfurt a.M. 1888. Jahrg. XXIX. N°. 2. 8°.

Dingler's polytechnisches Journal. Stuttgart 1888. Band CCLXVIII. Heft 1—3. 8°.

Flora, oder allgemeine botanische Zeitung. Regensburg 1888. Jahrg. 71. N°. 10. 8°.

Bibliothèque universelle et revue Suisse. Lausanne 1888. 3e Période. Tome XXXVII. N°. 110—111. 8°.

A. de Gubernatis. Dictionnaire international des écrivains du jour. Florence 1888. Livr. 1. (A- Bab. roy. 8°.

Journal of Morphology, edited by C. O. Whitman. Boston 1887. Vol. I. N°. 18°.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAAND MEI 1888.

NEDERLAND.

Bijdragen tot de Dierkunde, uitgegeven door het koninklijk zoölogisch Genootschap, »Natura Artis Magistra". — Feestnummer uitgegeven bij gelegenheid van het 50-jarig bestaan van het Genootschap. Amsterdam 1888. gr. 4°.

Katalogus der Bibliotheek van de Rijks-Akademie van beeldende Kunsten. Amsterdam 1888. 8°.

M. Fürbringer. Untersuchungen zur Morphologie und Systematik der Vögel, zugleich ein Beitrag zur Anatomie der Stütz- und Bewegungsorgane. Amsterdam 1888. 2 Dl. gr. 4°.

Revue internationale scientifique et populaire des falsifications des denrées alimentaires. Amsterdam 1888. Livr. 5. 4°.

Oeuvres complètes de Christiaan Huygens, publiées par la Société Hollandaise des Sciences. la Haye 1888. Tome I. 4°.

Tijdschrift uitgegeven door de Nederlandsche Maatschappij ter bevordering van Nijverheid. Haarlem 1888. 4e Reeks. Deel XII. N°. 4. 8°.

Handelingen van het eerste Nederlandsch natuur- en geneeskundig Congres, gehouden te Amsterdam op den 30sten September en den 1sten October 1887. Haarlem 1888. 8°.

K. KUIPER. Wijsbegeerte en Godsdienst in het drama van Euripides. Bijdrage tot de kennis van het godsdienstig leven der Atheners ten tijde van Pericles. Haarlem 1888. 8°.

Handelingen en Mededeelingen van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden, over het jaar 1887. Leiden 1887. 8°.

Aegyptische Monumenten van het Nederlandsch Museum van Oudheden te Leyden, uitgegeven door C. LEEMANS en W. PLEYTE. Leyden 1888. Afl. 29. fol.

Mededeelingen betreffende het Zeewezen. 's Gravenhage 1888. Deel XXVI. Afl. 5. 8°.

Tijdschrift van het koninklijk Instituut van Ingenieurs, 1887—1888. 's Gravenhage 1888. Afl. 3. 1ste Gedeelte. Afl. 4. 2de Gedeelte. 4°.

Werken van de Nederlandsche Rijks-Commissie voor Graadmeting en Waterpassing. II. Uitkomsten der Rijkswaterpassing ontworpen en aangevangen door L. COHEN STUART, voortgezet en voltooid door H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN en G. VAN DIESEN, 1875—1885. 's Gravenhage 1888. 4°.

Algemeen Nederlandsch Familieblad. Tijdschrift voor geschiedenis, geslacht-, wapen-, zegelkunde, enz. 's Gravenhage 1888. Jaarg. V. N°. 4. 4°.

De Vrije Fries. Mengelingen, uitgegeven door het Friesch Genootschap van geschied-, oudheid- en taalkunde. Leeuwarden 1887. 3de Reeks. Deel V. Afl. 1. 8°.

Oostergo. Register van geestelijke opkomsten van Oostergo, bewerkt door J. REITSMA en uitgegeven

door het Friesch Genootschap van geschied-, oudheid- en taalkunde. Leeuwarden 1888. 8°.

Naamlijst der predikanten, sedert de hervorming tot nu toe, in de hervormde gemeenten van Friesland. 2de Gedeelte. Leeuwarden 1888. 8°. Uitgegeven door het Friesch Genootschap voor geschied-, oudheid- en taalkunde.

C. Ubaghs. De geologische aardvorming van Limburg. 8°. (Voordracht gehouden in het 1e natuur- en geneeskundig Congres van Nederland, 1887).

Statistiek van het koninkrijk der Nederlanden. Nieuwe Serie. Staten van de in-, uit- en doorgevoerde voornaamste handelsartikelen gedurende de maand Maart 1388. 's Gravenhage 1888. fol.

Verzamelingstabel der waterhoogten langs de kusten van de Noordzee, de Zuiderzee en de Nederlandsche rivieren, waargenomen in de maand December 1887. fol.

Verzamelingstabel der waterhoogten volgens de bladen der zelfregistreerende peilschalen, waargenomen in de maand December 1887. fol.

NEDERLANDSCH OOST-INDIË.

Tijdschrift voor indische taal-, land- en volkenkunde, uitgegeven door het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Batavia 1888. Deel XXXII. Afl. 2. 8°.

Notulen van de algemeene- en bestuursvergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Batavia 1888. Deel XXV. Afl. 4. 8°.

Dagh-Register gehouden int Casteel Batavia vant passerende daer ter plaetse als over geheel Nederlandts-India. Anno 1653. Batavia 1888. 8⁰.
(Uitgegeven door het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen).

BELGIË.

Bulletin de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des beaux-Arts de Belgique. Bruxelles 1888. 3e Série. Tome XV. N⁰. 4. 8⁰.

Mémoires des concours et des Savants étrangers publiés par l' Académie royale de Médecine de Belgique. Bruxelles 1888. Tome VIII. Fasc. 2. 4⁰.

Inhoud:

L. Dandois. Des diverses méthodes de pansement et de traitement antiseptiques des plaies et des affections chirurgicales.

Bulletin de l'Académie royale de Médecine de Belgique. Bruxelles 1888. 4e Série. Tome II. N⁰. 4. 8⁰.

C. Ubaghs. Note sur les ateliers de Rijckholt et de Sainte-Gertrude. Bruxelles 1888. 8⁰.
(Extrait du Bulletin de la Société d'Anthropologie de Bruxelles. Tome VI).

Annales de l'Académie d'Archéologie de Belgique. Anvers 1886. 4e Série. Tome II. 8⁰.

Bulletin de l'Académie d'Archéologie de Belgique. Anvers 1887. N⁰. X—XV. 8⁰.

J. Mac Leod. De verspreiding der planten. Gent 1887. 8⁰.
(Overgedrukt uit het Nederlandsch Museum, 1887).

J. Mac Leod. Deken de Bo's kruidwoordenboek en de Nederlandsche wetenschappelijke taal. 8°. (Overgedrukt uit het Nederlandsch Museum, 1888).

FRANKRIJK.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Paris 1888. Tome CVI. N°. 17—20. 4°.

Bulletin de l' Académie de Médecine. Paris 1888. 3e Série. Tome XIX. N°. 17—20. 8°.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de la Société de Biologie. Paris 1888. 9e Série Tome V. N°. 4, 10—17. 8°.

Bulletin de la Société mathématique de France. Paris 1888. Tome XVI. N°. 2—3. 8°.

Revue internationale de l'Electricité et de ses applications. Paris 1888. Tome VI. N°. 56—57. roy. 8°.

Journal d'Hygiène. Paris 1888. 14e Année. Vol. XIII. N°. 605—609. 4°.

GROOT-BRITTANNIË EN IERLAND.

Proceedings of the royal Society. London 1888. Vol. XLIII. N°. 264. 8°.

Monthly Notices of the royal astronomical Society. London 1888. Vol. XLVIII. N°. 6. 8°.

Proceedings of the royal geographical Society. London 1888. New Series. Vol. X. N°. 5. 8°.

Journal of the royal Asiatic Society of Great Britain and Ireland. London 1888. New Series. Vol. XX. Part 2. 8°.

Transactions of the zoological Society. London 1888. Vol. XII. Part 7. 4⁰.

Inhoud:

H. B. Brady, W. K. Parker and T. R. Jones. On some foraminifera from the Abrohlos Bank.

Proceedings of the scientific meetings of the zoological Society for the year 1887. London 1888. Part 4. 8⁰.

OOSTENRIJK.

Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Wien 1887. N⁰. 17—18. 1888. N⁰. 1—6. 8⁰.

Mittheilungen der anthropologischen Gesellschaft. Wien 1888. Band XVIII. Heft 1. 4⁰.

DUITSCHLAND.

Sitzungsberichte der kön. preussischen Akademie der Wissenschaften. Berlin 1887. N⁰. XL—LIV. roy. 8⁰.

Archiv für pathologische Anatomie und Physiologie und für klinische Medicin. Berlin 1888. Band CXI. Heft 3. Band CXII. Heft 1—2. 8⁰.

Sophokles erklärt von F. W. Schneidewin. Berlin 1888. Band I. Allgemeine Einleitung Atas. Band VII. Philoktetes. 9te Auflage besorgt von A. Nauck. 8⁰.

Schriften der naturforschenden Gesellschaft. Danzig 1888. Neue Folge. Band VII. Heft 1. 8⁰.

Abhandlungen herausgegeben vom naturwissenschaftlichen Vereine. Bremen 1888. Band X. Heft 1—2. 8⁰.

Archiv des Vereins der Freunde der Naturgeschichte in Mecklenburg. Güstrow 1888. Jahr 41. 8⁰.

Chronik der Universität Kiel für das Jahr 1886/87. Kiel 1887. 8⁰.

F. Blass. Eudoxi ars astronomica qualis in charta aegyptiaca superest. Kiliae 1887. 4⁰.

——— Naturalismus und Materialismus in Griechenland zu Platon's Zeit. Kiel 1887. 8⁰.

V. Hensen. Die Naturwissenschaft im Universitätsverband. Kiel 1887. 8⁰.

F. Volbehr. Professoren und Docenten der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel 1665 bis 1887. Kiel 1887. 8⁰.

Th. Behrens. Ueber Fremdkörper in den Luftwegen. Kiel 1887. 8⁰.

G. Berger. Fünf Fälle von Erweiterung der Stirnhöhlen durch Flüssigkeitsansammlung. Kiel 1887. 8⁰.

Th. Bruhn. Beitrag zur Statistik der Exstirpation tuberkulöser Lymfdrüsentumoren. Kiel 1887. 8⁰.

C. Caspersohn. Zur Statistik und Radikaloperation des Mastdarmkrebses. Kiel 1887. 8⁰.

H. Danielsen. Krebs-Statistik nach den Befunden des pathologischen Instituts zu Kiel vom Jahre 1873—1887. Kiel 1887. 8⁰.

H. Falck. Beitrag zur Lehre und Casuistik der Bindegewebsgeschwülste des Halses. Kiel 1887. 8⁰.

B. Fischer. Ueber einen lichtentwickelnden, im Meerwasser gefundenen Spaltpilz. Leipzig. 8⁰.

L. von Fischer-Benzon. Ein Beitrag zur Anatomie und Aetiologie der beweglichen Niere. Kiel 1887. 8⁰.

K. Gerling. Ueber Athetosis. Kiel 1887. 8⁰.

E. Haacke. Ein Beitrag zur pathologischen Histologie des Magens. Kiel 1887. 8⁰.

C. Hass. Beiträge zur Lehre von der Arthritis gonorrhoïca. Kiel 1887. 8⁰.

E. Hönck. Drei Fälle von allgemeinem fötalem Hydrops. Kiel 1887. 8⁰.

I. O. Johannsen. Beitrag zur pathologischen Anatomie und Histologie des Magengeschwürs. Kiel 1886. 8⁰.

F. Kunze. Beitrag zur Lehre der Staubinhalationskrankheiten. Kiel 1887. 8⁰.

W. Lange. Ein Fall von Lebervenenobliteration. Kiel 1886. 8⁰.

B. Lau. Beitrag zur Kenntniss der Wirkung des Strychnins. Elmshorn 1886. 8⁰.

K. May. Ueber das Geruchsvermögen der Krebse nebst einer Hypothese über die analytische Thätigkeit der Riechhärchen. Kiel 1887. 8⁰.

H. Meyer. Knochenabscesse. Kiel 1887. 8⁰.

M. Mose. Ueber Exenteratio bulbi. Kiel 1887. 8⁰.

H. Niemeyer. Ein Fall von Lungenarterien-Embolie nach einer Distorsio pedis. Kiel 1887. 8⁰.

M. Petersen. Ueber Hornhautflecke als Ursache der Myopie und Anisometropie. Kiel 1887. 8⁰.

A Plehn. 35 Fälle von Schädel-Fractur. Ein Beitrag zur pathologischen Anatomie derselben. Kiel 1886. 8⁰.

F. Plehn. Beitrag zur Lehre vom chronischen Hydrocephalus. Kiel 1887. 8⁰.

P. Riesenfeld. Ueber Hysterie bei Kinderen. Kiel 1887. 8⁰.

L. Sievers. Schmarotzer-Statistik aus den Sections-Befunden des pathologischen Instituts zu Kiel vom Jahre 1877 bis 1887. Kiel 1887. 8⁰.

C. Stahl. Beitrag zur Casuistik der Schädelverletzungen. Kiel 1887. 8⁰.

E. Wegner. Zur Casuistik der Hirntumoren. Kiel 1887. 8⁰.

K. Elbel. Ueber einige Derivate der Opiansäure. Kiel 1887. 8⁰.

W. Grosse. Ueber Polarisationsprismen. Hannover 1886. 8⁰.

V. Jonas. Photometrische Bestimmung der Absorptions-spektra roter und blauer Blütenfarbstoffe. Ratibor 1887. 8⁰.

J. Noelting. Ueber das Verhältniss der sogenannten Schalenblende zur regulären Blende und zum hexagonalen Wurtzit. Kiel 1887. 8⁰.

H. Oldach Ueber eine Synthese des β-Methyltetramethylendiamins und des β-Methylpyrrolidins. Kiel 1887. 8⁰.

L. Reher. Ueber Aethylderivate des Chinolins. Kiel 1887. 8⁰.

C. G. Sye. Beiträge zur Anatomie und Histologie von Jaera marina. Kiel 1887. 8⁰.

A. von Elsner. Ueber Form und Verwendung des Personalpronomens im Altprovenzalischen. Kiel 1886. 8⁰.

J. Fuhrmann. Die alliterierenden Sprachformeln in Morris' Early English alliterative poems und im Sir Gwayne and the Green Knight. Hamburg 1886. 8⁰.

R. Goerke. Die Sprache des Raoul de Cambrai, eine Lautuntersuchung. Kiel 1887. 8⁰.

A. Kolls. Zur Lanvalsage. Eine Quellenuntersuchung. Berlin 1886. 8⁰.

H. Raeder. Die Tropen und Figuren bei R. Garnier, ihrem Inhalt nach untersucht und in den römischen Tragödien mit der lateinischen Vorlage verglichen. Wandsbeck 1886. 8⁰.

P. Schütze. Beiträge zur Poetik Ottfrids. Kiel 1887. 8⁰.

W. Wandschneider. Zur Syntax des Verbs in Langleys Vision of William concerning Piers the Plowman, together with vita de Dowel, Dobet and Dobest. Leipzig 1887. 8⁰.

Abhandlungen der kön. Gesellschaft der Wissenschaften. Göttingen 1887. Band XXXIV. 4⁰.

Inhoud:

A. von Koenen. Beitrag zur Kenntniss der Crinoïden des Muschelkalks.

W. Voigt. Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle.

H. A. Schwarz. Ueber specielle zweifach zusammenhängende Flächenstücke, welche kleineren Flächeninhalt besitzen, als alle benachbarten von denselben Randlinien begrenzten Flächenstücke.
E. Schering. Carl Friedrich Gauss und die Erforschung des Erdmagnetismus.
F. Bechtel. Die Inschriften des ionischen Dialekts.
F. Frensdorff. Das statutarische Recht der deutschen Kaufleute in Nowgorod
P. de Lagarde. Purim. Ein Beitrag zur Geschichte der Religion.

Nachrichten von der kön. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen aus dem Jahre 1887. Göttingen 1887. 8°.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. Leipzig 1887. Jahrg. 22. Heft 4. 8°.

Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1887. Jahrg. XI. N°. 278–279. 8°.

Petermann's Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt. Gotha 1888. Band XXXIV. N°. 4—5. Ergänzungsheft. N°. 89. 4°.

Abhandlungen herausgegeben von der Senckenbergischen naturforschenden Gesellschaft. Frankfurt a./M. 1888. Band XV. Heft 2. 4°.

Inhoud:

F. C. Noll. Beiträge zur Naturgeschichte der Kieselschwämme.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der kön. bayr. Akademie der Wissenschaften. München 1888. Heft 3. 8°.

Sitzungsberichte der philosophisch-philologischen und historischen Classe der kön. bayr. Akademie der Wissenschaften. München 1888. Jahrg. 1887. Band II. 8°.

Verhandlungen der physikalisch-medicinischen Gesellschaft. Würzburg 1888. Neue Folge. Band XXI. 8°.

ITALIË.

Atti della reale Accademia dei Lincei. Roma 1888. Serie 4ª. Rendiconti. Vol. IV. Fasc. 2—4. 4°.

I codici Palatini della R. Biblioteca nazionale centrale di Firenze. Roma 1887. Vol. I. Fasc. 7. 8°.

Bollettino delle publicazioni Italiane. Firenze 1888. N°. 56—57. 8°.

Mittheilungen aus der zoologischen Station zu Neapel. Berlin 1888. Band VIII. Heft 1. 8°.

J. A. Wynne. Sulla difficolta di rintracciare la verita storica. Traduzione dall' olandese di C. Lapierre. Atri 1888. 8°.

ZWEDEN EN NOORWEGEN.

Bulletin mensuel de l'Observatoire météorologique de l'Université d'Upsal. 1887—88. Vol. XIX. 4°.

AZIË.

Meteorological Observations recorded at seven stations in India, December 1887. 4°.

Report on the Meteorology of India in 1886. Calcutta 1887. Year 12. fol.

Indian meteorological Memoirs. Calcutta 1887. Vol. IV. Part 4. 4°.

Cyclone Memoirs. Calcutta 1888. Part 1. 8°.

W. L. Dallas. Memoir on the winds and monsoons of the Arabian Sea and North-Indian Ocean. Calcutta 1887. 4⁰.

AMERIKA.

Circulars of the Bureau of Education U. S. A. Washington 1887. N⁰. 3. 8⁰.

Report of the superintendent of the nautical Almanac for the year ending June 30, 1887. Washington 1887. 8⁰.

Journal of the American medical Association. Chicago 1888. Vol. X. N⁰. 15—18. 4⁰

Johns Hopkins University Circulars. Baltimore 1888. Vol. VII. N⁰. 65. 4⁰.

Memorias de la Sociedad cientifica »Antonio Alzate". Mexico 1888. Tomo I. N⁰. 9. 8⁰.

Boletin de Estadistica del Estado de Puebla. Puebla de Zaragoza 1888. Tomo 1. N⁰. 33—35. fol.

Revista do Observatorio, publicaçao mensal do imperial Observatorio do Rio de Janeiro 1888. Anno III. N⁰. 4. 4⁰.

Boletin de la Academia Nacional de Ciencias en Cordoba. Buenos Aires 1887. Tomo X. Entr. 1. 8⁰.

AANGEKOCHT.

De Navorscher. Amsterdam 1888. Nieuwe Serie. Jaarg. 21. Afl. 5. 8°.

Dictionnaire des antiquités grecques et romaines. Paris 1888. Fasc. 12 (Del-Dil). 4°.

La grande Encyclopédie. Inventaire raisonné des Sciences, des Lettres et des Arts. Paris 1888. Livr. 127—131. 4°.

Journal des Savants. Paris, Avril 1888. 4°.

Bulletin des Sciences mathématiques. Paris 1888. 2e Série. Tome XII. Mai. 8°.

Annales des Sciences naturelles. Paris 1887—1888. 7e Série. Botanique. Tome VI. N°. 3—6. Tome VII. N°. 1. 8°.

Annales de Chimie et de Physique. Paris 1888. 6e Série. Tome XIV. Mai. 8°.

The London, Edinburgh, and Dublin philosophical Magazine and Journal of Science. London 1888. 5th Series. Vol. XXV. N°. 126. 8°.

Annals and Magazine of natural History. London 1888. 6th Series. Vol. I. N°. 5. 8°.

Astronomische Nachrichten. N°. 2836—2840. 4°.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1888. N°. 8—9. 8°.

Corpus inscriptionum latinarum. Berolini 1888. Vol. XII. fol.

Veröffentlichungen des kais. Gesundheitsamtes. Berlin 1888. Jahrg. XII. N°. 17—19. 4°.

Berichte der deutschen botanischen Gesellschaft. Berlin 1888. Jahrg. 6. Heft 3. 8°.

Archiv für Naturgeschichte. Berlin 1886. Jahrg. 52. Band II. Heft 1. 8°.

Allgemeine deutsche Biographie. Leipzig 1888. Band XXVI. 8°.

Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1888. Neue Folge. Band XXXIV. Heft 2. Beiblätter. Band XII. Stück 4. 8°.

Zeitschrift für physikalische Chemie. Leipzig 1888. Band II. Heft 5. 8°.

Der zoologische Garten. Frankfurt a./M. 1888. Jahrg. XXIX. N°. 3. 8°.

Flora. Regensburg 1888. N°. 11—12. 8°.

DINGLER's polytechnisches Journal. Stuttgart 1888. Band CCLXVIII. Heft 4—7. 8°.

A. DE GUBERNATIS. Dictionnaire international des écrivains du jour. Florence 1888. Livr. 2. (Bab-Bec). 8°.

Archives des Sciences physiques et naturelles. Genève 1888. 3e Période. Tome XIX. N°. 4. 8°.

Journal of Morphology. Boston 1887. Vol. I. N°. 2. 8°.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAAND JUNI 1888.

NEDERLAND.

Verslag van den toestand der gemeente Amsterdam gedurende het jaar 1887. Amsterdam 1888. 8°.

Feestbundel, aan Franciscus Cornelis Donders op den 27sten Mei 1888 aangeboden door het Nederlandsch Tijdschrift voor Geneeskunde. Amsterdam 1888. 8°.

1ste vijfjarig Vervolg van den Catalogus der Bibliotheek van het wiskundig Genootschap: »Een onvermoeide arbeid komt alles te boven" te Amsterdam. 8°.

Bijdragen van het statistisch Instituut. Amsterdam 1888. Jaarg. 4. N°. 1. 8°.

De Volksvlijt, tijdschrift voor nijverheid, landbouw, handel en scheepvaart. Amsterdam 1887. N°. 11—12. 8°.

B. F. Matthes. Al de boeken van het Nieuwe Testament in het Makassaarsch vertaald. Amsterdam 1875—1888. 2 Dl. 8°.

Tijdschrift uitgegeven door de Nederlandsche Maatschappij ter bevordering van Nijverheid. Haarlem 1888. 4e Reeks. Deel XII. N°. 5—6. 8°.

Bijdragen tot de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië, uitgegeven door het koninklijk Instituut voor de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië. 's Gravenhage 1888. 5de Reeks. Deel III. Afl. 3. 8°.

Tijdschrift voor Entomologie, uitgegeven door de Nederlandsche entomologische Vereeniging. 's Gravenhage 1888. Deel XXXI. Afl. 2. 8°.

Algemeen Nederlandsch Familieblad. Tijdschrift voor geschiedenis, geslacht-, wapen-, zegelkunde, enz. 's Gravenhage 1888. Jaarg. 5. N°. 5. 4°.

Bijdragen voor vaderlandsche Geschiedenis en Oudheidkunde. 's Gravenhage 1888. 3de Reeks. Deel IV. Afl. 3—4. 8°.

L. A. J. W. Sloet. De dieren in het germaansche volksgeloof en volksgebruik. 's Gravenhage 1888. 2de Gedeelte. 8°.

Verslag der Commissie ter verzekering eener goede bewaring van gedenkstukken van geschiedenis en kunst te Nijmegen, over het jaar 1887. 8°.

A. A. de Pinto. Het herziene Wetboek van Strafvordering. Zwolle 1887—1888. Deel II. Afl. 1—9. 8°.

Rébus sur la lumière, l'image et les couleurs prismatiques. Groningue 1888. 8°.

Werken van het provinciaal Genootschap van Kunsten en Wetenschappen in Noord-Brabant. 's Hertogenbosch 1888. Nieuwe Reeks. N°. 3. 8°.

Inhoud:

Th. Ign. Welvaarts. Het refugiehuis der Abdij Postel te 's Hertogenbosch.

A. Steffens. Geschiedenis der aloude heerlijkheid en der Heeren van ter Horst, in het land van Kessel. Roermond 1888. 8°.

Statistiek van het koninkrijk der Nederlanden. Nieuwe Serie. Staten van de in-, uit- en doorgevoerde voornaamste handelsartikelen gedurende de maanden April en Mei 1888. 's Gravenhage 1888. 8⁰.

Verzamelingstabel der waterhoogten langs de kusten van de Noordzee, Zuiderzee en de Nederlandsche rivieren, waargenomen in de maand Januari 1888. fol.

Verzamelingstabel der waterhoogten volgens de bladen der zelfregistreerende peilschalen, waargenomen in de maand Januari 1888. fol.

NEDERLANDSCH OOST-INDIË.

Geneeskundig Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Vereeniging tot bevordering der geneeskundige Wetenschappen in Nederlandsch-Indië. Batavia 1888. Deel XXVIII. Afl. 1. 8⁰.

Annales du Jardin botanique de Buitenzorg. Leide 1888. Vol VII. Part 2. 8⁰.

BELGIË.

Annuaire statistique de la Belgique. Bruxelles 1887. Tome XVII. 8⁰.

Mémoires des concours et des Savants étrangers publiés par l' Académie royale de Médecine de Belgique. Bruxelles 1888. Tome VIII. Fasc. 3. 4⁰.

Inhoud:

F. Henrijean. Des diverses méthodes de pansement et de traitement antiseptiques des plaies et des affections chirurgicales.

Bulletin de l'Académie royale de Médecine de Belgique. Bruxelles 1888. 4e Série. Tome II. N⁰. 5. 8⁰.

G. van der Mensbrugghe. Causerie sur la tension superficielle. 8⁰.
(Extrait du Bulletin de la Société Belge de Microscopie. 1888).

——————————— Quelques mots sur ma théorie du filage de l'huile. Bruxelles 1888. 8⁰.
(Extrait des Bulletins de l'Académie royale de Belgique. 3e Série. Tome XV).

C. Ubaghs. Quelques considérations sur l'age de la craie tufeau de Folx-les-Caves. Bruxelles 1888. 8⁰.
(Extrait du Bulletin de la Société belge de Géologie. Tome II).

A. Preudhomme de Borre. Liste des cent et cinq espèces de Coléoptères lamellicornes actuellement authentiquement capturées en Belgique. 8⁰.
(Extrait des Annales de la Société entomologique de Belgique. Tome XXXII).

A. De Cock. Simon Stevin. Gent 1888. 8⁰.
(Uitgegeven door het Willems-fonds).

FRANKRIJK.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Paris 1888. Tome CVI. N⁰. 21–25. 4⁰.

Comptes rendus de l'Académie des Inscriptions et belles-Lettres. Paris 1888. 4e Série. Tome XV. N⁰. 4. Tome XVI. N⁰. 1. 8⁰.

Bulletin de l' Académie de Médecine. Paris 1888. 3e Série. Tome XIX. N°. 21—25. 8°.

Bulletin de la Société philomatique. Paris 1888. 7e Série. Tome XII. N°. 2. 8°.

Comptes rendus hebdomadaires de la Société de Biologie. Paris 1888. 9e Série. Tome V. N°. 18—20. 8°.

Journal d'Hygiène. Paris 1888. 14e Année. Vol. XIII. N°. 610—614. 4°.

Revue internationale de l'Electricité et de ses applications. Paris 1888. 4e Année. Tome VI. N°. 58—60. roy. 8°.

Revue de Botanique. Bulletin mensuel de la Société Française de Botanique. Courrensan 1888. Tome VI. N°. 61—72.

GROOT-BRITTANNIË EN IERLAND.

Proceedings of the royal Society. London 1888. Vol. XLIII. N°. 265—267. 8°.

Monthly Notices of the royal astronomical Society. London 1888. Vol. XLVIII. N°. 7. 8°.

Proceedings of the royal geographical Society. London 1888. New Series. Vol. X. N°. 6. 8°.

Journal of the royal microscopical Society. London 1888. Part 3. 8°.

Proceedings of the scientific meetings of the zoological Society of London. 1888. Part 1. 8°.

Journal of the anthropological Institute of Great Britain and Ireland. London 1888. Vol. XVII. N°. 3—4. 8°.

Catalogue of the sanskrit manuscripts in the Library of the India Office. London 1887. Part 1. Vedic manuscripts. 4⁰.

OOSTENRIJK-HONGARIJE.

Mittheilungen der prähistorischen Commission der kais. Akademie der Wissenschaften. Wien 1888. Jahrg. 1887. N⁰. 1. 4⁰.

Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Wien 1888. N⁰. 7—8. roy. 8⁰.

Mittheilungen aus dem Jahrbuche der kön. ungarischen geologischen Anstalt. Budapest 1888. Band VIII. Heft 6. 8⁰.

Jahrbuch der kön. ungarischen geologischen Anstalt für 1886. Budapest 1888. 8⁰.

L. Petrick. Ueber die Verwendbarkeit der Rhyolithe für die Zwecke der keramischen Industrie. Budapest 1888. 8⁰.

Földtani Közlöny. (Geologische Mittheilungen). Zeitschrift der ungarischen geologischen Gesellschaft. Budapest 1888. Kötet XVIII. Füzet 1—4. 8⁰.

DUITSCHLAND.

Sitzungsberichte der kön. preussischen Akademie der Wissenschaften. Berlin 1888. N⁰. I—XVI. roy. 8⁰.

Die Venus-Durchgänge 1874 und 1882. Bericht über die deutschen Beobachtungen. Berlin 1888. Band III 4⁰.

Wochenschrift für klassische Philologie. Berlin 1888. Jahrg. 5. N⁰. 1—26. 4⁰.

Zeitschrift der historischen Gesellschaft für die Provinz Posen. Posen 1887—1888. Jahrg. 3. Heft 1—4. 8°.

Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1888. Jahrg. XI. N°. 280—282. 8°.

Anzeiger des germanischen Nationalmuseums. Nürnberg 1887. Band II. Heft 1. roy. 8°.

Mittheilungen aus dem germanischen Nationalmuseum. Nürnberg 1887. Band II. Heft 1. roy. 8°.

Katalog der im germanischen Museum befindlichen vorgeschichtlichen Denkmäler. Nürnberg 1887. roy. 8°.

J. N. von Wilmowsky. Roemische Mosaiken aus Trier und dessen Umgegend. Trier 1888. 4°. Mit Atlas plano. (Herausgegeben von der Gesellschaft für nützliche Forschungen in Trier).

Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der kön. bayerischen Akademie der Wissenschaften. München 1887. Band XVI. Abth. 2. 4°.

Inhoud:

A. Voss. Ueber die projectieve Centrafläche einer algebraischen Fläche n. Ordnung.

A. von Braunmühl. Untersuchungen über p-reihige Charakteristiken, die aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind, und die Additionstheoreme der zugehörigen Thetafunktionen.

N. Rüdinger. Ueber künstlich deformirte Schädel und Gehirne von Südseeinsulanern (Neue Hebriden).

H. Seeliger. Zur Theorie der Beleuchtung der grossen Planeten, insbesondere des Saturn.

Abhandlungen der historischen Classe der kön. bayerischen Akademie der Wissenschaften. München 1888. Band XVIII. Abth. 4°.

Inhoud:

W. Preger. Ueber das Verhältnis der Taboriten zu den Waldesiern des 14 Jahrhunderts.
F. Stieve. Wittelsbacher Briefe aus den Jahren 1590 bis 1610.
S. Riezler. Arbeo's Vita Corbiniani in der ursprünglichen Fassung.

Monumenta Tridentina. Beiträge zur Geschichte des Concils von Trient. München 1887. Heft 3. 4°.

R. Meiser. Ueber historische Dramen der Völker. München 1887. 4°. (Festrede).

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der kön. bayr. Akademie der Wissenschaften. München 1888. Heft 1. 8°.

Sitzungsberichte der philosophisch-philologischen- und historischen Classe der kön. bayr. Akademie der Wissenschaften. München 1888. Heft 1. 8°.

J. van Rees. Beiträge zur Kenntniss der inneren Metamorphose von Musca vomitoria. 8°.
(Separatabdrück aus den zoologischen Jahrbüchern. Band II).

ZWITSERLAND.

Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences naturelles. Lausanne 1887. 3e Série. Vol. XXIII. N°. 97. 8°.

ITALIË.

Atti della reale Accademia dei Lincei. Roma 1884—1887. Memorie. Serie 2a. Vol. IV. Serie 3a. Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. Vol. XII. 4°.

Inhoud: Serie 2a. Vol. IV;

Q. Sella. Codex Astensis qui de Malabayla communiter nuncupatur.

Serie 3ª. Vol. XII.

Narducci. Giunte all' Opera „Gli scrittori d' Italia" del conte Giammaria Mazzuchelli, tratte dalla Biblioteca Alessandrina.
Schiaparelli. Il significato simbolico delle piramidi Egiziane.
Rosen. Remarques sur les manuscrits orientaux de la collection Marsigli à Bologne.
Gozzadini. Di due stele etrusche.
Ferri. Analisi del concetto di sostanza e sue relazioni coi concetti di essenza, di causa e di forza.
Pigorini. Gli antichi oggetti messicani incrostati di mosaico esistenti nel Museo preistorico ed etnografico di Roma.
Guidi. Festi orientali inediti sopra i Sette dormienti di Efeso.
——— La lettera di Filosseno ai monaci di Tell'addâ (Teleda).
Amari. De' titoli che usava la cancelleria de' Sultani di Egitto nel XIV secolo scrivendo a reggitori di alcuni stati italiani.
Levi. Le antichita egiziane di Brera.

Atti della reale Accademia dei Lincei. Roma 1888. Serie 4ª. Rendiconti. Vol. IV. Fasc. 5—6. 4⁰.

Memorie delle reale Accademia delle Scienze. Torino 1888. Serie 2ª. Tomo XXXVIII. 4⁰.

Inhoud:

C. Segre. Le coppie di elementi imaginari nella geometria proiettiva sintetica.
C. Pollonero. Molluschi fossili post-pliocenici del contorno di Torino.
A. Roiti. Misure assolute di alcuni condensatori.
L. Bellardi. I molluschi dei terreni terziarii del Piemonte e della Liguria.
D. Rosa. Sul criodrilus lacuum.
A. Portis. Contribuzioni alla ornitolitologia italiana.
L. Vincenzi. Contributo allo studio dei vizi congeniti del cuore.
A. Cattaneo. Sugli organi nervosi terminali muscolo-tendinei in condizioni normali e sul loro modo di comportarsi in seguito al taglio delle radici nervose e dei nervi spinali.
G. Loria. Il passato e il presente delle principali teorie geometriche.
O. Mattirolo. Illustrazione di tre nuove specie di Tuberacee italiane.

L. Camerano. Ricerche intorno al parassitismo ed al polimorfismo dei gordii.

G. Ferraris. Sulle differenze di fase delle correnti, sul ritardo d'induzione e sulla dissipazione di energia nei trasformatori.

F. Rossi. Vita di Sant' Ilarione e martirio di Sant' Ignazio, vescovo d' Antiochia.

A. Fabretti. Statuti ed ordinamenti suntuarii intorno ai vestire degli uomini e delle donne in Perugia dall' anno 1266 al 1336.

F. Rossi. I martirii di Gioore, Heraei, Epimaco e Ptolomeo con altri frammenti.

S. C. de Martiis. Il fondamento storico di una leggenda italica.

E. Ferrero. La strada Romana da Torino al Monginevro.

V. Puntoni. Sulla narrazione del mito di Promoteo nella Teogonia Esiodea.

Atti della reale Accademia delle Scienze. Torino 1888. Vol. XXIII. Disp. 6. 8⁰.

Bollettino delle pubblicazioni Italiane. Firenze 1888. N⁰. 58—59. 8⁰.

DENEMARKEN.

Aarböger for nordisk oldkyndighed og historie, udgivne af det kongelige nordiske Oldskrift Selskab. Kjobenhavn 1888. 2e Raekke. Bind III. Hefte 1. 8⁰.

ZWEDEN EN NOORWEGEN.

N. Ekholm. Undersökningar i hygrometri. Upsala 1888. 4⁰.

RUSLAND.

Catalogue de la section des gravures des Musées Public et Roumiantzow. Moscou 1888. N⁰. I—IV. 8⁰. (In het Russisch).

Recueil des matériaux pour l' Ethnographie. Moscou 1888. Livr. 3. 8⁰. (In het Russisch).

Meteorologische Beobachtungen des tifliser physikalischen Observatoriums in Jahre 1886. Tiflis 1886. 8°.

Sitzungsberichte der kurländischen Gesellschaft für Literatur und Kunst aus dem Jahre 1887. Mitau 1888. 8°.

A Z I Ë.

Mittheilungen der deutschen Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokio. Yokohama 1888. Heft 39. 4°.

Journal of the college of Science, imperial University, Japan. Tokio 1888. Vol. II. Part 1. 4°.

Inhoud:

R. Fiijisawa. Ueber die Darstellbarkeit willkürlicher Functionen durch Reihen die nach den Wurzeln einer transcendenten Gleichung fortschreiten.

E. Divers and M. Kawacita. On the composition of bird-lime.

IJ. Kikuchi. On anorthite from Miyakejima.

I. Ijima. The source of Bothriocephalus latus in Japan.

I. Sekiya. Earthquake measurements of recent years especially relating to vertical motion.

Mittheilungen aus der medicinischen Facultät der kais. japanischen Universität. Tokio 1888. Band I. N°. 2. 4°.

Inhoud:

IJ. Inoko. Untersuchungen über die Wirkung des Macleyin's auf den thierischen Organismus.

E. Baelz. Das Nervensystem bei fibrinöser Pneumonie.

K. Hyrano. Ein Beitrag zur Kenntniss der Samen von Pharbitis triloba Meia.

IJ. Koganëi. Ueber vier koreaner-Schädel.

Journal of te China Branch of the royal Asiatic Society. Shanghai 1887. New Series. Vol. XXII. N°. 3—4. 8°.

AFRIKA.

Bulletin de la Société khédiviale de Géographie. Le Caire 1888. 3e Série. N⁰. 1. 8⁰.

AMERIKA.

2d Annual Report of the photographic study of stellar spectra conducted at the Harvard College Observatory. Cambridge 1888. 4⁰.

Proceedings of the Academy of natural Science. Philadelphia 1888. Part 1. 4⁰.

Journal of the American medical Association. Chicago 1888. Vol. X. N⁰. 19—23. 4⁰.

Proceedings of the Canadian Institute. Toronto 1888. 3d Series. Vol. V. Fasc. 2. 8⁰.

Annual Report of the Canadian Institute, Session 1888—87. Toronto 1887. 8⁰.

Memorias de la Sociedad cientifica »Antonio Alzate". Mexico 1888. Tomo I. N⁰. 10. 8⁰.

Boletin de Estadistica del estado de Puebla. Puebla de Zaragoza 1888. Tomo I. N⁰. 36—38. fol.

Boletim da Academia imperial de Medicina do Rio de Janeiro. 1887. Anno III. N⁰. 6—15. 4⁰.

Annaes da Academia de Medicina do Rio de Janeiro. 1887—1888. Serie 6. Tomo III. N⁰. 2—3. 8⁰.

Revista do Observatorio, publicaçao mensal do imperial Observatorio do Rio de Janeiro. 1888. Anno III. N⁰. 4—5. 8⁰.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. Buenos Aires 1888. Tomo XXV. Entr. 3—4. 8°.

AUSTRALIË.

Journal and Proceedings of the royal Society of N. S. Wales. Sydney 1888. Vol. XXI. 8°.

Mineral Products of N. S. Wales by H. Wood. — Notes on the geology of N. S. Wales by C. S. Wilkenson and Description of the seams of coal worked in N. S. Wales by J. Mackenzie. Sydney 1887. 4°

AANGEKOCHT.

Oud-Holland. Nieuwe Bijdragen voor de geschiedenis der Nederlandsche Kunst, Letterkunde, Nijverheid, enz. Amsterdam 1886. Jaarg. VI. Afl. 1. 4°.

De Navorscher. Amsterdam 1888. Nieuwe Serie. Jaarg. 21. N°. 6. 8°.

Biographisch Woordenboek der Noord- en Zuidnederlandsche Letterkunde door J. G. Frederiks en F. J. van den Branden. Amsterdam 1888. Nieuwe druk. Afl. 1. 8°.

Bibliotheca Belgica. Livr. 87—89. 8°.

La grande Encyclopédie. Inventaire raisonné des Sciences, des Lettres et des Arts. Paris 1888. Livr. 132—136. 4°.

Journal des Savants. Paris, Mai 1888. 4⁰.

Archives de Zoologie expérimentale et générale. Paris 1888. 2ᵉ Série. Tome V. N⁰. 4. 8⁰.

Annales de Chimie et de Physique. Paris 1888. 6ᵉ Série. Tome XIV. Juin. 8⁰.

A. Laporte. Histoire littéraire du 19ᵉ Siècle. Paris 1888. Tome V. Livr. 1—2. 8⁰.

The London, Edinburgh, and Dublin philosophical Magazine and Journal of Science. London 1888. 5th Series. Vol. XXV. N⁰. 125. 8⁰.

Annals and Magazine of natural History. London 1888. 6th Series. Vol. I. N⁰. 6. 8⁰.

Astronomische Nachrichten. 1888. N⁰. 2841—2843. 4⁰.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1888. N⁰. 10—11. 8⁰.

Veröffentlichungen des kais. Gesundheitsamtes. Berlin 1888. Jahrg. XII. N⁰. 20—25. 4⁰.

Ephemeris epigraphica. Berolini 1888. Vol. VII. Fasc. 1—2. 8⁰.

Berichte der deutschen botanischen Gesellschaft. Berlin 1888. Band VI. Heft 4. 8⁰.

Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1888. Neue Folge. Band XXXIV. Heft 3—4. Beiblätter. Band XII. St. 5. 8⁰.

Zeitschrift für physikalische Chemie. Leipzig 1888. Band II. Heft 6. 8⁰.

Mittheilungen des Vereins für Kunde der Aachener Vorzeit Aachen 1887. Jahrg. 1. Heft 1—2. 8⁰.

Der zoologische Garten. Frankfurt a.M. 1888. Jahrg. 29. N°. 4. 8°.

Flora, oder allgemeine botanische Zeitung. Regensburg 1888. N°. 13—15. 8°.

Dingler's polytechnisches Journal. Stuttgart 1888. Band CCLXVIII. Heft 8. 8°.

Bibliothèque universelle et revue Suisse. Lausanne 1888. 3e Période. Tome XXXVIII. N°. 112—113. 8°.

Archives des Sciences physiques et naturelles. Genève 1888. 3e Période. Tome XIX. N°. 5—6. 8°.

Naturhistorisk Tidsskrift udgive af J. C. Schiödte. Kjobenhavn 1861—1884. Band I—XIII. 8°.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAANDEN JULI, AUGUSTUS EN SEPTEMBER 1888.

NEDERLAND.

Bijdragen tot de Dierkunde, uitgegeven door het koninklijk zoölogisch Genootschap »Natura Artis Magistra". Amsterdam 1888. Afl. 14—16. gr. 8°.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Amsterdam 1888. Deel XIV. St. 2. Deel XV. St. 1. 8°.

Wiskundige Opgaven met de oplossingen door de leden van het wiskundig Genootschap »Een onvermoeide arbeid komt alles te boven". Amsterdam 1882—1888. Deel II. St. 1—6. Deel III. St. 4. 8°.

Bijdragen van het statistisch Instituut. Amsterdam 1888. Jaarg. 4. N°. 2. 8°.

Jaarcijfers over 1887 en vorige jaren. Amsterdam 1888. N°. 7. 8°.

Koninklijk oudheidkundig Genootschap te Amsterdam. Jaarverslag uitgebracht in de 30ste algemeene vergadering op 23 April 1888. 4°.

Verslag over het jaar 1887 en Naamlijst van de leden der Maatschappij Arti et Amicitia gevestigd te Amsterdam. 8°.

Jaarboek van het Mijnwezen in Nederlandsch Oost-Indië. Amsterdam 1888. Jaarg. 17. 1ste Gedeelte. 8°.

Handelingen van de 43ste Algemeene Vergadering van het Nederlandsch Onderwijzers-Genootschap, gehouden te Amersfoort 31 Juli, 1 en 2 Augustus 1888. Amsterdam 1888. 8°.

J. Zürcher. Meyer de Haan's Uriël Acosta. 8°.

Rechtsgeleerde Bijdragen en Bijblad. Amsterdam 1887. Jaarg. 2. 2 Deelen. 8°.

Revue internationale scientifique et populaire des falsifications des denrées alimentaires. Amsterdam 1888. 1e Année. Livr. 6. 2e Année. Livr. 1—2. 4°.

Archives Néerlandaises des Sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des Sciences. Harlem 1888. Tome XXII. Livr. 4—5. 8°.

Tijdschrift uitgegeven door de Nederlandsche Maatschappij ter bevordering van Nijverheid. Haarlem 1888. 4e Reeks. Deel XII. N°. 7—10. 8°.

J. C. van den Berg. De Wervelbeweging. Haarlem 1888. Academisch Proefschrift. 8°.

W. Stortenbeker. Les combinaisons du chlore avec l'iode. Leide 1888. Dissertation. 8°.

Sammlungen des geologischen Reichsmuseums in Leiden. 1888. I. Beiträge zur Geologie Ost-Asiens und Australiens. Band IV. Heft 3. 8°.

Nederlandsch-Chineesch Woordenboek met de transcriptie der Chineesche karakters in het Tsiang-Tsiu dialekt, bewerkt door G. Schlegel. Leiden 1888. Deel IV. Afl. 1. roy. 8°.

C. A. J. A. Oudemans en J. G. Boerlage. Bibliographie der Flora van Nederland. Leiden 1888. 8°.

Rapport over ankerkuil- en staalboomen-visscherij op het Hollandsch Diep en Haringvliet. Leiden 1888. 8°.

Annales de l'Ecole polytechnique de Delft. Leide 1888. Tome IV. Livr. 1—2. 4°.

Inhoud:

S. Hoogewerff et W. A. van Dorp. Sur l'action de l'hypobromite de potassium sur les amides.

Ch. M. Schols. Remarques sur le calcul des efforts maxima dans les maîtresses-poutres des ponts de chemin de fer.

Vijfjarig Overzicht van de sterfte naar den leeftijd en de oorzaken van den dood in elke gemeente van Nederland gedurende 1880—1885. 8°.
(Uitgegeven door het Departement van Binnenlandsche Zaken).

Verslag aan den Koning van de bevindingen en handelingen van het veeartsenijkundig staatstoezicht in het jaar 1887. 's Gravenhage 1888. 4°.

Verslagen aan den Koning betrekkelijk den dienst der Posterij, der Rijkspostspaarbank en der Telegrafen in Nederland. 1887. III. Telegrafen. 's Gravenhage 1888. 4⁰.

Verslag aan den Koning over de openbare werken in het jaar 1887. 's Gravenhage 1888. 4⁰.

Verslag over den Landbouw in Nederland, 1886. 's Gravenhage 1888. 8⁰.

Verslagen omtrent 's Rijks oude archieven. IX. 1886. 's Gravenhage 1888. 8⁰.

Verslag aangaande een onderzoek in Duitschland naar archivalia belangrijk voor de geschiedenis in Nederland door Dr. P. J. Blok, 1886 - 1887. 's Gravenhage 1888. 8⁰.

4de Supplement (tot 1 Maart 1888) op den Catalogus der Bibliotheek van het Departement van Oorlog. 's Gravenhage 1888. 8⁰.

Geschiedkundige Catalogus der verzameling munten van Nederland, bezittingen en koloniën, bijeengebracht en beschreven door Joh. W. Stephanik en in bruikleen afgestaan aan het Rijksmuseum. 1888. 8⁰.

Bijdragen voor vaderlandsche Geschiedenis en Oudheidkunde. 's Gravenhage 1888. 3de Reeks. Deel V. Afl. 1. 8⁰.

J. K. J. de Jonge en M. L. van Deventer. De opkomst van het Nederlandsch gezag in Oost-Indië. 's Gravenhage 1888. Alphabetisch Register 8⁰.

Tijdschrift van het koninklijk Instituut van Ingenieurs. 's Gravenhage 1888. Afl. 4. 1ste Gedeelte. Afl. 5. 2de Gedeelte. 4°.

Tijdschrift voor Entomologie, uitgegeven door de Nederlandsche entomologische Vereeniging. 's Gravenhage 1888. Deel XXXI. Afl. 3. 8°.

C. Snouck Hurgronje. Mekka. Haag 1888. Theil I. 8°. Mit Bilder-Atlas. fol.

P. J. Cosyn. Altwestsächsische Grammatik. Haag 1888. 8°

N. H. Henket, Ch. M. Schols en J. M. Telders. Waterbouwkunde. 's Gravenhage 1888. Deel I. Afd. VII. Afl. 1. Deel III 2de gedeelte. Afl. 7. 8°.

M. S. Pols. Westfriesche Stadrechten. 's Gravenhage 1888. Deel I. 8°.

Algemeen Nederlandsch Familieblad. Tijdschrift voor geschiedenis, geslacht-, wapen-, zegelkunde, enz. 's Gravenhage 1888. Jaarg. 5. N°. 6—8. 4°.

Th. H. F. van Riemsdijk. Bijdragen tot de geschiedenis van de kersspelkerk van St. Jacob te Utrecht. Leiden 1888. fol.

(Uitgegeven met ondersteuning van het provinciaal Utrechtsch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen).

Th. Kooperberg. Geneeskundige plaatsbeschrijving van Leeuwarden. 's Gravenhage 1888. roy. 8°.
(Uitgegeven door het provinciaal Utrechtsch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen).

P. M. NETSCHER. Geschiedenis van de koloniën Essequebo, Demerary en Berbice, van de vestiging der Nederlanders aldaar tot op onzen tijd. 's Gravenhage 1888. 8°.
(Uitgegeven door het provinciaal Utrechtsch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen).

Verslag van het verhandelde in de algemeene vergadering van het provinciaal Utrechtsch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen, gehouden 28 Juni 1887. Utrecht 1887. 8°.

Aanteekeningen van het verhandelde in de sectie-vergaderingen van het provinciaal Utrechtsch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen ter gelegenheid van de algemeene vergadering, gehouden den 28 Juni 1887. Utrecht 1887. 8°.

Munt-Kabinet van 's Rijks Munt te Utrecht. Catalogus der gouden, zilveren, koperen en bronzen speciën van het koningrijk der Nedèrlanden, 1813—1887. Voorafgegaan door eenige geschiedkundige aanteekeningen betreffende den muntslag. 8°.

D. HARTING. Grieksch-Nederduitsch Handwoordenboek op het Nieuwe Testament. Utrecht 1888. 2de Druk. 8°.

L. VAN ELFRINKHOF. De viriaal en hare beteekenis in de mechanica. Utrecht 1888. Academisch Proefschrift. 8°.

Archief. Vroegere en latere mededeelingen voornamelijk in betrekking tot Zeeland, uitgegeven door het Zeeuwsch Genootschap der Wetenschappen. Middelburg 1888. Deel VI. St. 3. 8°.

F. NAGTGLAS. Levensberichten van Zeeuwen. Zijnde een vervolg op P. de la Rue, geletterd staatkundig en heldhaftig Zeeland. Middelburg 1888. Afl. 1. 8°.
(Uitgegeven door het Zeeuwsch Genootschap der Wetenschappen).

————— Zelandia Illustrata. Verzameling van kaarten, portretten, platen enz. betreffende de oudheid en geschiedenis van Zeeland. Middelburg 1885. Vervolg. 8°.

Mededeelingen en Berichten der Geldersch-Overijsselsche Maatschappij van Landbouw over 1888. Arnhem 1888. N°. I—II. 8°.

Rijkslandbouwschool te Wageningen. Programma van het onderwijs voor het leerjaar 1888—89. 8°.

Nederlandsch kruidkundig Archief. Verslagen en Mededeelingen der Nederlandsche botanische Vereeniging. Nijmegen 1888. 2de Serie. Deel V. St. 2. 8°.

Handelingen van het provinciaal Genootschap van Kunsten en Wetenschappen in Noord-Brabant, 1886—1888. 's Hertogenbosch 1888. 8°.

Verslag van den toestand der provincie Friesland in 1887. Leeuwarden 1888. 8°.

C. L. VAN DER BURG. Een paar opmerkingen naar aanleiding der brochure van E. VAN DIEREN: »nogmaals de Beri-Berikwestie". 8°.
(Overgedrukt uit het Nederl. militair geneeskundig Archief. Jaarg. 1888).

J. D. E. SCHMELTZ. Südsee-Reliquien. 4°.
(Separat-Abdrück aus internationales Archiv für Ethnographie. Bd. I).

G. Schlegel. A Singapore Streetscene. 4⁰. (Separat-Abdruck aus internationales Archiv für Ethnographie. Bd. I).

Koninkrijk der Nederlanden. Statistiek van den in-, uit- en doorvoer over het jaar 1887. 's Gravenhage 1888. 1ste Gedeelte. fol.

Statistiek van het koninkrijk der Nederlanden. Nieuwe Serie. Staten van de in-, uit- en doorgevoerde voornaamste handelsartikelen gedurende de maanden Juni, Juli en Augustus 1888. 's Gravenhage 1888. 8⁰.

Verzamelingstabel der waterhoogten langs de kusten van de Noordzee, de Zuiderzee en de Nederlandsche rivieren, waargenomen in de maanden Februari, Maart en April 1888. fol.

Recapitulatietabel der waterhoogten volgens de bladen der zelfregistreerende peilschalen, waargenomen in het jaar 1887. fol.

Verzamelingstabel der waterhoogten volgens de bladen der zelfregistreerende peilschalen, waargenomen in de maanden Februari, Maart en April 1888. fol.

NEDERLANDSCH OOST-INDIË.

Verhandelingen van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Batavia 1888. Deel XLV. Afl. 2. 4⁰.

Inhoud:

J. L. van der Toorn. Tjindoer Mato. Minangkabausch-Maleische Legende.

Tijdschrift voor indische taal-, land- en volkenkunde, uitgegeven door het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Batavia 1888. Deel XXXII. Afl. 3. 8°.

Notulen van de algemeene- en bestuurs-vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Batavia 1888. Deel XXVI. Afl. 1. 8°.

Natuurkundig Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de koninklijke natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indië. Batavia 1888. Deel XLVII. 8°.

Tijdschrift voor Nijverheid en Landbouw in Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Nederlandsch-Indische Maatschappij van Nijverheid en Landbouw. Batavia 1888. Deel XXXVI. Afl. 4—5. Deel XXXVII. Afl. 1. 8°.

Geneeskundig Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Vereeniging tot bevordering der geneeskundige Wetenschappen in Nederlandsch-Indië. Batavia 1888. Deel XXVIII Afl. 2. 8°.

BELGIË.

Bulletin de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des beaux-Arts de Belgique. Bruxelles 1888. 3e Série. Tome XV. N°. 5—6 Tome XVI. N°. 7. 8°.

Bulletin de l'Académie royale de Médecine de Belgique. Bruxelles 1888. 4e Série. Tome II. N°. 6—7. 8°.

Mémoires couronnés et autres Mémoires publiés par l' Académie royale de Médecine de Belgique. Bruxelles 1888. Tome VIII. Fasc. 5. 8°.

Mémoires des concours et des savants étrangers publiés par l'Académie royale de Médecine de Belgique. Bruxelles 1888. Tome VIII. Fasc. 4. 4⁰.

Inhoud:

E. Lermuseau. Des diverses méthodes de pansement et de traitement antiseptiques des plaies et des affections chirurgicales.

Recueil des ordonnances des Pays-Bas Autrichiens. 3e Série. 1700—1794. Bruxelles 1887. Tome VI. fol.

Coutumes des pays et comté de Flandre. Tome II. Coutume de la ville de Gand (Suite) par A. du Bois et L. de Hondt. Bruxelles 1887. 4⁰.

Coutumes des pays, duché de Luxembourg et comté de Chiny par Ch. Laurent. Bruxelles 1887. 2e Supplément. 4⁰.

Coutumes des pays et comté de Flandre. Coutume de la prévoté de Bruges par L. Gilliodts—van Severen. Bruxelles 1887. Tome I—II. 4⁰.

F. Nizet. Projet d'un catalogue idéologique (Realcatalog) des périodiques, revues et publications des sociétés savantes. Bruxelles 1888. 8⁰.

C. Ubaghs. Mes théories. Réponse à la notice de M. de Puydt, intitulée les théories de M. Casimir Ubaghs dans sa brochure intitulée »Les ateliers ou stations dits préhistoriques de St. Gertrude et Rijckholt. Liège 1888. 8⁰.

Verslagen en Mededeelingen der koninklijke Vlaamsche Academie voor Taal- en Letterkunde. Gent 1887—1888. Jaar 1887. Afl. 1—4. Jaar 1888. Afl. 1. 8⁰.

Jaarboek der koninklijke Vlaamsche Academie voor Taal- en Letterkunde. Gent 1887. 1ste Jaar. 8°.

K. Stallaert. De sevenste bliscap van Maria. Mysteriespel der XVe eeuw. Gent 1887. 8°.
(Uitgegeven door de koninklijke Vlaamsche Academie voor Taal- en Letterkunde).

Sleeckx. Karel VI en Maria Theresia. Gent 1888. 8°.
(Volksboekje uitgegeven door het Willems-Fonds, N°. 4).

——— Jozef II en zijne regeering. Gent 1888. 8°.
(Volksboekje uitgegeven door het Willems-Fonds, N°. 5).

Joost van den Vondel. Verslag der Antwerpsche feesten ter gelegenheid der 300ste verjaring van Vondels geboorte, benevens studiën over het leven en de werken van Nederlands grootsten dichter door G. Segers. Antwerpen 1888. 8°.

FRANKRIJK.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Paris 1888. Tome CVI. N°. 26. Tome CVII. N°. 1—12. 4°.

Bulletin de l'Académie de Médecine. Paris 1888. 3e Série. Tome XX. N°. 26—38. 8°.

Mémoires de la Société zoologique de France. Paris 1888. 1e Année. N°. 1—3. 8°.

Bulletin de la Société zoologique de France. Paris 1888. 12e Année. N°. 5—6. 13e Année. N°. 1—6. 8°.

Bulletin de la Société mathématique de France. Paris 1888. Tome XVI. N°. 4. 8°.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de la Société de Biologie. Paris 1888. 9e Série. Tome V. N°. 21—28. 8°.

Bulletin de la Société philomatique. Paris 1888. 7e Série. Tome XII. N°. 3. 8°.

Journal de l'Ecole polytechnique. Paris 1887. Cahier 57. 4°.

Inhoud:

HUGONIOT. Sur la propagation du mouvement dans les corps, et spécialement dans les gaz parfaits.
I. MOUTIER. L'énergie libre et les changements d'état.
DAVID. Développement des fonctions implicites.
G. HUMBERT. Sur les arcs des courbes planes algébriques.
R. LIOUVILLE. Sur quelques équations différentielles non linéaires.

Nouvelles Archives du Muséum d'Histoire naturelle. Paris 1887. 2e Série. Tome IX. Fasc. 2. Tome X. Fasc. 1. 4°.

Inhoud: Tome IX. Fasc. 2.

ED. PERRIER. Mémoire sur l'organisation et le développement de la Comatule de la Méditerranée.

Tome X. Fasc. 1.

A. GAUDRY. L'Actinodon.
A. FRANCHET. Plantae Davidianae ex Sinarum imperio.

Annales du Musée Guimet. Paris 1887. Tome X, XIV. 2 Dl. 4°.

Revue de l'histoire des religions. Paris 1887—1888. Tome XVI. N°. 1—3. Tome XVII N°. 1—2. 8°.

Journal d'Hygiène. Paris 1888. 14e Année. Vol. XIII. N°. 615—626. 4°.

Revue internationale de l'Electricité. Paris 1888. 4e Année. Tome VII. N⁰. 61—65. roy. 8⁰.

Bibliothèque du Dépôt de la Guerre. Catalogue. Paris 1886—1888. Tome IV—V. 2 Dl. 8⁰.

Collection de documents inédits sur l'histoire de France. Lettres de Cathérine de Médicis publiées par H. de la Ferrière. Paris 1887. Tome III. 4⁰.

Mission scientifique du Cap Horn, 1882—1883. Paris 1887—1888. Tome I. Histoire du voyage par L. F. Martial. Tome VI. Zoologie. Arachnides par E. Simon. 4⁰.

M. Berthelot. Collection des anciens alchimistes Grecs. Paris 1888. Livr. 1—2. 4⁰.

H. Lavoix. Catalogue des monnaies musulmanes de la Bibliothèque nationale. (Khalifes orientaux). Paris 1887 roy. 8⁰.

Enquêtes et documents relatifs à l'enseignement supérieur. Paris 1884—1886. N⁰. IX—XI. XIII—XXI. 8⁰.

G. Ebers. L'Egypte. Traduction de G. Maspero. Paris 1880. 2 Vol. gr. 4⁰.

Cl. Devic et J. Vaissette. Histoire générale de Languedoc. Toulouse 1885—1886. Tome IX—X. 2 Dl. 4⁰.

Dictionnaire de l'Académie Française. Paris 1879—1884. 7e Edition. 2 Dl. 4⁰.

Complément du Dictionnaire de l'Académie Française. Paris 1881. 4⁰.

Moralistes Français. Paris 1883. roy. 8⁰.

Oeuvres complètes de Voltaire. Paris 1876 – 1878. Tome I—XIII. roy. 8⁰.

A. Koumanondis. Supplément au Thesaurus linguae Graecae. 1888. 8⁰.

Becquerel. Traité de l'Electricité et du Magnétisme. Paris 1834—1840. 7 Dl. 8⁰. Avec Atlas. Plano.

Letronne. Recueil des Inscriptions grecques et latines. Paris 1842—1848. 2 Dl. 4⁰. Avec Atlas. fol.

J. de Joinville. Histoire de Saint Louis credo et lettre à Louis X accompagné d'une traduction par N. de Wailly. Paris 1874. roy. 8⁰.

A. Firmin-Didot. Alde Manuce et l'Hellénisme à Venise. Paris 1875. 8⁰.

Archives de Zoologie expérimentale et générale par H. de Lacaze Duthiers. Paris 1872—1882. Tome I—X. 8⁰.

Nouvelle Biographie générale publiée par Firmin-Didot frères sous la direction de Hoefer. Paris 1862—1877. 48 Vol. 8⁰.

Mémoires de la Société nationale des Sciences naturelles et mathématiques de Cherbourg. Paris 1887. Tome XXV. 8⁰.

Actes de l'Académie nationale des Sciences, belles-Lettres et Arts de Bordeaux. Paris 1885. 3e Série. Année 47. 8⁰.

Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Paris 1886. 3e Série. Tome II. Cahier 2. Tome III. Cahier 1. 8⁰.

Observations pluviométriques et thermométriques faites dans le département de la Gironde de Juin 1885 à Mai 1886. Bordeaux 1886. 8⁰.

Recueil de l'Académie de Législation de Toulouse. Paris-Toulouse 1887. Tome XXXV. 8⁰.

Mémoires de l'Académie des Sciences, Inscriptions et belles-Lettres. Toulouse 1887. 8e Série. Tome IX. 8⁰.

Académie des Sciences et Lettres. Mémoires de la Section des Sciences. Montpellier 1887. Tome XI. Fasc. 1. 4⁰.

Inhoud:

HOUDAILLE. Note sur un pluviomètre enregistreur installé à l' Ecole nationale d'agriculture de Montpellier.
E. COMBESCURE. Sur le principe des vitesses virtuelles.
A. CROVA. Observations actinométriques faites pendant les années 1884, 1885 et 1886 à l'Observatoire météorologique de Montpellier.
HOUDAILLE. Etude des pluies de 1885.
——— Description d'un contact à brèves émissions de courant, appliqué à l'anémomètre enregistreur Rédier.
S. DAUTHEVILLE. Démonstration d'un théorème de M. E. Picard relatif à la décomposition en facteurs primaires des fonctions uniformes ayant une ligne de points singuliers essentiels.
H. BROCARD. Propriétés d'un groupe de trois paraboles.
E. COMBESCURE. Sur quelques théories élémentaires de calcul intégral.
P. DE ROUVILLE. Monographie géologique de la commune de Cabrières (Hérault).
H. BROCARD. Remarques sur l'analyse indéterminée du premier degré.

Académie des Sciences et Lettres. Mémoires de la Section des Lettres. Montpellier 1887. Tome VIII. Fasc. 1. 4⁰.

Inhoud:

REVILLOUT. Antoine Gombaud, chevelier de Méré; sa famille, son frère et ses amis.

PH. CORBIÈRE. De l'organisation politique du parti protestant en 1573.

F. CELLARIER. Esquisse d'une théorie des principes rationnels.

E. LISBONNE. Etude sur le président I.Grasset et ses oeuvres.

Mémoires de la Société des Antiquaires de Picardie. Documents inédits concernant la province. Amiens 1888. Tome XI. 8°.

Inhoud :

HÉNOCQUE. Histoire de l' abbaye et de la ville de St.-Riquier. Tome III.

Bulletin de la Société des Antiquaires de Picardie. Amiens 1888. Année 1887. N°. 4. 1888. N°. 1. 8°.

Précis analytique des travaux de l'Académie des Sciences, belles-Lettres et Arts de Rouen pendant l'année 1886—1887. Rouen 1888. 8°.

Mémoires de la Société d'Emulation de Cambrai. 1887. Tome XLII. 8°.

PH. MILSAND. Bibliographie Bourguignonne. Supplément suivi de la table générale des noms d'auteurs, et de la table générale. Dyon 1888. 8°.

Bulletin historique de la Société des Antiquaires de la Morinie. St. Omer 1887—1888. Nouvelle Série. Livr. 143—146. 8°.

Bibliographie historique de l'arrondissement de St. Omer. St. Omer 1887. 8°.

Mémoires de la Société Dunkerquoise pour l'encouragement des Sciences, des Lettres et des Arts. Dunkerque 1887. Vol. XXIV. 8°.

Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique publié par la Société d'Agriculture, Sciences et Arts. Valenciennes 1887—1888. Tome XXXIX. N°. 22—24. Tome XL. N°. 1—5. 8°.

Ch. Paillard. Notes et éclaircissements sur l'histoire générale des Pays-Bas et sur l'histoire de Valenciennes au XVIe siècle. Valenciennes 1879. 8°.

Mémoires de la Société agricole, scientifique et littéraire des Pyrénées-orientales. Perpignan 1888. Vol. XXIX. 8°.

Documents de l'Académie des Sciences, belles-Lettres et Arts de Savoie. Chambéry 1886. Pièces justificatives. Vol. VI. 8°.

J. G. de Man. Sur quelques Nématodes libres de la mer du nord, nouveaux ou peu connus. 8°.
(Extrait des Mémoires de la Société zoologique de France pour 1888).

E. Lemoine. De la mesure de la simplicité dans les constructions géométriques. 4°.

——————— Quelques questions se rapportant à l'étude des antiparallèles des cotés d'un triangle. 8°.
(Extrait du Bulletin de la Société mathématique de France. 8°.).

——————— Questions diverses sur la nouvelle géométrie du triangle. 8°.
(Association française pour l'avancement des sciences. 1887).

——————— Questions diverses sur la géométrie du triangle. 8°.

(Association française pour l'avancement des sciences. 1886).

E. Lemoine. Etude des points inverses. 8⁰.
(Extrait du Journal de mathématiques spéciales. 1887).

——— Notes à propos du cercle des neuf points. 8⁰.
(Extrait du Journal de mathématiques élémentaires. 1886).

E. Lemoine et E. Vigarié. Note sur les élements Brocardiens. 8⁰.
(Extrait du Journal de mathématiques élémentaires. 1888).

GROOT-BRITTANNIË EN IERLAND.

Philosophical Transactions of the royal Society. London 1888. Vol. CLXXVIII. 4⁰.

Inhoud:

Ch. Chambers. On the luni-solar variations of magnetic declination and horizontal force at Bombay and of declination at Trevandrum.
Th. Andrews. On the properties of matter in the gaseous and liquid states under various conditions of temperature and pressure.
W. Ramsay and S. Young. On evaporation. Part III. A study of the thermal properties of Ethyl Oxide. Part V. A study of the thermal properties of Methyl-alcohol.
E. P. Culverwell. On the discrimination of maxima and minima solutions in the calculus of variations.
H. Lamb. On ellipsoidal current-sheets.
H. L. Callendar. On the practical measurement of temperature: Experiments made ad the Cavendisch Laboratory, Cambridge.
Ch. Davison. On the distribution of strain in the earth's crust resulting from secular cooling; wit special reference to the growth of continents and the formation of mountain chains.
G. H. Darwin. Note on Mr. Davison's paper on the straining of the earth's crust in cooling.

W. de W. Abney. Transmission of sunlight through the earth's atmosphere.

I. I. Sylvester. On Hamilton's numbers.

S. A. Hill. Some anomalies in the winds of Northern India, and their relation to the distribution of barometric pressure.

G. H. Darwin. On figures of equilibrium of rotating masses of fluid.

J. F. Bottomley. On thermal radiation in absolute measure.

W. Crookes. On the supposed „New Force" of M. I. Thore.

I. I. Thomson. Some applications of dynamical principles to physical phenomena. Part II.

R. Owen Additional evidence of the affinities of the extinct marsupial quadruped Thylacoleo carnifex (Owen).

H. Gadow. Remarks on the cloaca and on the copulatory organs of the Amniota.

I. R. Green. On the changes in the proteids in the seed with accompany germination.

Th. Carnelley and J. S. Haldane and A. M. Anderson. The carbonic acid, organic matter, and micro-organisms in air, more especially of dwellings and schools.

P. F. Frankland. A new method for the quantitative estimation of the micro-organisms present in the atmosphere.

Ch. E. Beevor and V. Horsley. A minute analysis (experimental) of the various movements produced by stimulating in the monkey different regions of the cortical centre for the upper limb, as defined by Professor Ferrier.

I. W. Hulke. Supplemental note on Polacanthus Foxii, describing the dorsal shield and some parts of the endoskeleton, unp rfectly known in 1881.

H. Marshall Ward. On the structure and life-history of Entyloma Ranunculi (Bonorden).

H. G. Seeley. Researches on the structure, organization and classification of the fossil reptilia. I. On Protorosaurus Speneri (Von Meyer).

A. D. Waller. On the action of the excised mammalian heart.

G. C. Frankland and P. F. Frankland. Studies on some new micro-organisms obtained from air.

W. C. Williamson. On the organisation of the fossil plants of the coal-measures. Part XIII. Heterangium Tiliaeoides (Williamson) and Kaloxylon Hookeri.

G. Massee. On Gasterolichenes: a new type of the group Lichenes.

E. B. Poulton. An inquiry into the cause and extent of a special

colour-relation between certain exposed lepidopterous pupae and the surfaces which immediately surround them.

O. Thomas. On the homologies and succession of the teeth in the Dasyridae, with an attempt to trace the history of the evolution of mammalian teeth in general.

W. H. Caldwell. The embryology of Monotremata and Marsupialia. Part I.

F. Gotch. The electromotive properties of the electrical organ of Torpedo marmorata.

H. Marshall Ward. On the tubercular swellings on the roots of Vicia Faba.

List of the fellows of the royal Society of London. Year 1887. 4⁰.

Proceedings of the royal Society of London. 1888. Vol. XLIV. N⁰. 268—270. 8⁰.

The eruption of Krakatoa, and subsequent phenomena. Report of the Krakatoa Committee of the royal Society. London 1888. 4⁰.

Monthly Notices of the royal astronomical Society. London 1888. Vol. XLVIII. N⁰. 8. 8⁰.

Proceedings of the royal geographical Society. London 1888. New Series. Vol. X. N⁰. 7—9. 8⁰.

Journal of the royal Asiatic Society of Great Britain and Ireland. London 1888. New Series. Vol. XX. Part. 3. 8⁰.

Journal of the royal microscopical Society. London 1888. Part 4. 8⁰.

Proceedings of the scientific meetings of the zoological Society. London 1888. Part 2. 8⁰.

Journal of the anthropological Institute of Great Britain and Ireland. London 1888. Vol. XVIII. N⁰. 1. 8⁰.

Transactions of the clinical Society. London 1888. Vol. XXI. 8⁰.

Memoirs of the Manchester literary and philosophical Society. London 1887. 3[d] Series. Vol. X. 8⁰.

Proceedings of the Manchester literary and philosophical Society. Manchester 1886—1887. Vol. XXV—XXVI. 8⁰.

Transactions of the royal Society of Edinburgh. Vol. XXX. Part IV. Vol. XXXI. Vol. XXXII. Part 2—4. Vol. XXXIII. Part 1—2. 4⁰.

Inhoud, Vol XXXI.

I. BAYLEY BALFOUR. Botany of Socotra.

Vol XXXII. Part 2—4.

HERDMAN. Report on the Tunicata dredged during the cruise of H. M. S. „Porcupine" and „Lightning" in the summers of the years 1868, 1869 and 1870.
PIAZZI SMYTH. Note on Sir David Brewster's Line Y in the infra-red of the solar spectrum.
J. AITKEN. On the formation of small clear spaces in dusty air.
J. T. CUNNINGHAM. On Stichocotyle Nephropis, a new Trematode.
T. P. KIRKMAN. The enumeration, description and construction of knots fewer than ten crossings.
E. SANG. On the approximation to the roots of cubic equations by help of recurring chain-fractions.
TAIT. On knots. Part II & III.
BLACKIE. On the philosophy of language.
B. N. PEACH. The old red sandstone volcanic rocks of Shetland.
C. M. SMITH. Observations on a green sun and associated phenomena.
L. CREMONA. An example of the method of deducing a surface from a plane figure.
C. PIAZZI SMYTH. Micrometrical measures of gaseous spectra under high dispersion.
TH. MUIR. On bipartite functions.

Vol XXXIII. Part 1—2.

F. E. Beddard. On the minute structure of the eye in certain Cymothoidae.

A. M. Marshall. Report on the Pennatulida dredged by H. M. S. „Porcupine".

G. Plarr. On the determination of the curve, on one of the coordinate planes, which forms the outer limit of the positions of the point of contact of an ellipsoid which always touches the three planes of reference.

W. Burnside. On the partition of energy between the translatory and rotational motions of a set of non-homogeneous elastic spheres.

W. Dittmar and Ch. A. Fawsitt. A contribution to our knowledge of the physical properties of Methyl-alcohol.

A. Crichton Mitchell. On the thermal conductivity of iron, copper, and german silver.

W. Dittmar and J. Mc Arthur. Critical experiments on the chloroplatinate method for the determination of potassium, rubidium and ammonium; and a redetermination of the atomic weight of platinum.

Proceedings of the royal Society of Edinburgh. 1883—1887. Vol. XII—XIV. 3 Dl. 8°.

Proceedings of the royal physical Society of Edinburgh. 1887. Vol. IX. Part 2. 8°.

Transactions of the royal Irish Academy. Dublin 1887. Vol. XXIX. Part 1—2. 4°.

Inhoud:

1. R. S. Ball. On the plane sections of the cylindroid. Being the seventh memoir on the theory of screws.
2. Ch. Graves. On the Ogam monument at Kilcolman.

Royal Irish Academy. Cunningham Memoirs. Dublin 1887. N°. IV. 4°.

Inhoud:

R. S. Ball. Dynamics and modern geometry: a new chapter in the theory of screws.

List of the papers published in the Transactions, Cunningham Memoirs and Irish Manuscript Series of the royal Irish Academy, between the years 1786 and 1886. Dublin 1887. 4°.

Proceedings of the royal Irish Academy. Dublin 1888. 2d Series. Science. Vol. IV. N°. 6. Polite Literature and Antiquities. Vol. II. N°. 8. 8°.

Scientific Transactions of the royal Dublin Society. Dublin 1887—1888 2d Series. Vol. III. N°. 14. Vol. IV. N°. 1. 4°.

Inhoud: Vol. III. N°. 14.

F. JEFFREY BELL. The Echinoderm-fauna of the island of Ceylon.

Vol. IV. N°. 1.

J. W. DAVIS. On fossil-fish remains from the tertiary and cretacce tertiary formations of New-Zealand.

Scientific Proceedings of the royal Dublin Society. Dublin 1887. New Series. Vol. V. Part 7—8. Vol. VI. Part 1—2. 8°.

OOSTENRIJK-HONGARIJE.

Verhandlungen der kais. kön. geologischen Reichsanstalt. Wien 1888. N°. 9—11. 4°.

Verhandlungen der kais. kön. zoologisch-botanischen Gesellschaft. Wien 1888. Band XXXVIII. 8°.

Mittheilungen der anthropologischen Gesellschaft. Wien 1888. Band XVIII. Heft 2—3. 4°.

Magnetische und meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag im Jahre 1887. Jahrg. 48. 4°.

V. Bericht der meteorologischen Commission des naturforschenden Vereines in Brunn. Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen im Jahre 1885. Brünn 1887. 8⁰.

Verhandlungen des naturforschenden Vereines in Brünn. 1887. Band XXV. 8⁰.

Mittheilungen des Vereines der Aerzte in Steiermark. Graz 1888. Jahr 1887. 8⁰.

Chronik des Vereines der Aerzte in Steiermark, 1863—1888. Graz 1888. 8⁰.

Abhandlungen der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kön. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag 1886. Folge 7. Band I. 4⁰.

Inhoud:

C. I. Küpper und C. Bobek. Hyperelliptische C3n.
Ph. Pocta. Beiträge zur Kenntniss der Spongien der böhmischen Kreideformation. Abth. III. Tetractinellidae Monactinellidae etc.
F. J. Studnicka. Resultate der ombrometrischen Beobachtungen in Böhmen in den Jahren 1884, 1885 und 1886.
W. Tempel. Ueber Nebelflecken. Nach Beobachtungen in den Jahren 1876—1879 mit dem Refractor von Amici auf der k. Sternwarte zu Arcetri bei Florenz.
A. Seydler. Ausdehnung der Lagrange'schen Behandlung des Dreikörper-Problems auf das Vierkörper-Problem.
C. Küpper. Ueber geometrische Netze.
I. Velenovsky. Beiträge zur Kenntniss der Bulgarischen Flora.
A. Seydler. Untersuchungen über verschiedene mögliche Formen des Kraftgesetzes zwischen Massentheilchen.

Abhandlungen der Classe für Philosophie, Geschichte und Philologie der kön. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften vom Jahre 1885—1886. Folge 7. Band I. 4⁰.

Inhoud:

A. Gindely. Die Entwickelung des böhmischen Adels und der Inkolatsverhältnisse seit dem 16 Jahrhunderte.
I. H. Loewe. John Bramall. Bishof von Derry und sein Verhältniss zu Thomas Hobbes.

Sitzungsberichte der kön. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag 1886—1888. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. Jahr 1885—1887. 3 Dl. Philophisch-historisch-philologische Classe. Jahr 1885—1887. 3 Dl. 8°.

Jahresbericht der kön. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften erstattet am 16 Januar 1886 und 15 Januar 1887. Prag 1886—1887. 8°.

Geschichte der kön. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften sammt einer kritischen Uebersicht ihrer Publicationen aus dem Bereiche der Philosophie, Geschichte und Philologie. Prag 1885. Heft 2. 8°.

Bericht über die mathematische und naturwissenschaftliche Publikationen der kön. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften während ihres hundertjährigen Bestandes. Prag 1885. Heft 2. 8°.

Regesta diplomatica nec non epistolaria Bohemiae et Moraviae. Pragae 1885—1886. Pars IV. Vol II—V. 4°.

Preisschrift der kön. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag 1888. Heft 1. roy 8°.

Inhoud:

F. Vejdoosky. Zrani, oplozeni a ryhovani vajicka.

Casopis pro pestovani mathematiky a fysiky, vydava

Iednota ceskych Matemathiku. Praze 1887—1888. Rocnik XVII. Cislo 1—6. 8⁰.

A magyar tud. Akademia Evkönyvei. Budapest 1887. Kötet XVII. Darab 5. 4⁰.

Regi magyar Nyelvemlekek. Budapest 1888. Kötet IV. Osztaly 2. Kotet V. 4⁰.
(Altungarische Sprachdenkmale).

Magyar tud. Akademiai Almanach. Budapest 1887. Naptarral 1888. 8⁰.

Ungarische Revue. Budapest 1888. Jahrg 1887. Heft 8—10. Jahrg. 1888. Heft 1—6. 8⁰.

Mathematische und naturwissenschaftlichte Berichte aus Ungarn. Budapest 1888. Band V. 8⁰.

Magyar tud. Akademia Ertesitöje. 1887. Szam 4—8. 1888. Szam 1. 8⁰.

Ertekezesek a nyelv-es szeptudomanyok Köreböl. Budapest 1887. Kötet XIV. Szam 1—7. 8⁰.

Ertekezesek a törtenelmi tudomanyok Köreböl. Budapest 1887. Köket XIII. Szam 6—8. 8⁰.

Ertekezesek a tarsadalmi tudomanyok Köreböl. Budapest 1887. Kötet IX. Szam 2—7. 8⁰.

Ertekezesek a mathematikai tudomanyok Köreböl. Budapest 1887. Kötet XIII. Szam 3. Kötet XIV. Szam 1. 8⁰.

Ertekezesek a termeszet tudomanyok Köreböl. Budapest 1887. Köket XVI. Szam 7. Kötet XVII. Szam 2 - 5. 8⁰.

Mathematikai es termeszet tudomanyi Közlemenyek. Budapest 1886. Kötet XXII. Szam 1—8. 8⁰.

Mathematikai es termeszet tudomanyi Ertesito. Budapest 1887. Kötet V. Füzet 6—9. Kötet VI. Füzet 1. 8⁰.

A magyar tudomyos Akademia Emlekbeszedek. Budapest 1887. Kötet IV. Szam 6—10. 8⁰.

Nyelvtudomanyi Közlemenyek. Budapest 1887. Kötet XX. Füzet 3. 8⁰.
(Philologische Mittheilungen).

Nyelvemlektar. Budapest 1888. Kötet IX—X. 8⁰.
(Ungarische Sprachdenkmaler).

Archaeologiai Ertesitö. Budapest 1887. Kötet VII. Szam 3—5. Kötet VIII. Szam 1—2. roy. 8⁰.

Monumenta comitialia regni Transsylvaniae. Budapest 1887. Kötet XII. 8⁰.

Monumenta Hungariae historica. Budapest 1887. Kötet XXVII. 8⁰.

L. Thanhoffer. Adatok a kozponti idegrendszer szerkezetehez. Budapest 1887. 4⁰.
(Daten zur Structur des centralen Nervensystems).

A. Pech. Also magyarorszag banyamivelesenek törtenete. Budapest 1887. Kötet II. 8⁰.
(Geschichte der Bergwerke in Nieder-Ungarn).

J. Bayer. A nemzeti jatekszin törtenete. Budapest 1887. Kötet I—II. 8⁰.
(Geschichte des nationalen Schauspielwesens).

J. Gelcich. Diplomatarium relationum reipublicae Ragusanae cum regno Hungariae. Budapest 1887. 8⁰.

J. Kunos. Oszman-Török nepköltesi Gyuztemeny. Budapest 1887. Kötet I. 8⁰.
(Sammlung osmano-türkischer Volksdichtungen).

G. Wenzel. Magyarorszag mezögazdasaganak törtenete. Budapest 1887. 8⁰.
(Geschichte des Landbaues in Ungarn).

A. Ballagi. Colbert. Budapest 1887. 8⁰.

Z. Simonyi. A magyar hatarozok. Budapest 1888. Kötet I. Tele 1. 8⁰.
(Die Bestimmungsworte im Ungarischen).

L. Szadeczky. Isabella es Janas Zsigmond lengyelorszagban. 1552—1556. Budapest 1886. 8⁰.
(Isabella und Johann Sigismund in Polen).

H. Marczali. Magyarorszag törtenete II Jozsef Koraban. Budapest 1888. Kötet III. 8⁰.
(Geschichte Ungarns unter Joseph II).

Föherczeg Jozsef. Czigany Nyelvtan romano csibakero sziklaribe. Budapest 1888. 8⁰.
(Grammatik der Zigeuner Sprache vom Erzherzog Joseph).

F. Pesty. Magyarorszag helynevei. Budapest 1888. Kötet I. 8⁰.
(Die Ortsnamen Ungarns).

DUITSCHLAND.

Ergebnisse der Beobachtungsstationen an den deutschen Küsten über die physikalischen Eigenschaften der Ostsee und Nordsee und die Fischerei. Berlin 1888. Jahrg. 1887. Heft 1—6. 4⁰. Obl.

Archiv für pathologische Anatomie und Physiologie und für klinische Medicin. Berlin 1888. Band CXII. Heft 3. Band CXIII. Heft 1—2. 8⁰.

J. M. van Bemmelen. Die Absorptionsverbindungen und das Absorptionsvermögen der Ackererde. Berlin 1888. 8⁰. (Landwirtschaftliche Versuchs-Stationen N⁰. XXXV).

J. G. de Man. Bericht über die im indischen Archipel von Dr. J. Brock gesammelten Decapoden und Stomatopoden. Berlin 1888. 8⁰.

Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft. Königsberg 1888. Jahrg. 28. 4⁰.

Jahrbuch der Hamburgischen wissenschaftlichen Anstalten. Hamburg 1888. Jahrg. 5. roy. 8⁰.

57ster Jahresbericht der schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. Breslau 1888. 8⁰.

Verhandlungen des naturhistorischen Vereines der preussischen Rheinlande. Bonn 1888. 1ste Hälfte. 8⁰.

Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, herausgegeben von der medizinisch-naturwissenschaftlichen Gesellschaft. Jena 1888. Band XXII. Heft 1—2. 8⁰.

Zeitschrift des Vereins für Thüringische Geschichte und Alterthumskunde. Jena 1888. Neue Folge. Band VI. Heft 1—2. 8⁰.

Thüringische Geschichtsquellen. Jena 1888. Neue Folge Band III. 8⁰.

Jahresbericht und Abhandlungen des naturwissenschaftlichen Vereins in Magdeburg. 1888. Jahrg. 1887. 8⁰.

Abhandlungen herausgegeben von der Senckenbergischen naturforschenden Gesellschaft. Frankfurt a. M. 1888. Band XV. Heft 3. 4⁰.

Inhoud.

L. Edinger. Untersuchungen über die vergleichende Anatomie des Gehirns. I. Das Vorderhirn.
J. Blum. Die Kreuzotter und ihre Verbreitung in Deutschland.

Abhandlungen der philologisch-historischen Classe der kön. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Leipzig 1888. Band X. N°. 8. roy. 8°.

Inhoud:

G. von der Gabelentz. Beiträge zur chinesischen Grammatik.

Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1888. Jahrg. XI. N°. 283—288. 8°.

Grunert's Archiv der Mathematik und Physik. Leipzig 1888. 2te Reihe. Teil VI. Heft 3—4. 8°.

C. Gegenbaur. Lehrbuch der Anatomie des Menschen. Leipzig 1888. 3te Auflage. roy. 8°.

Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt. Gotha 1888. Band XXXIV. N°. 6—9. Ergänzungsheft N°. 90. 4°.

Berichte der naturforschenden Gesellschaft. Freiburg i. B. 1886—1887. Band I—II. 8°.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der kön. bayr. Akademie der Wissenschaften. München 1888. Heft 2. 8°.

Sitzungsberichte der philosophisch-philologischen und historischen Classe der kön. bayr. Akademie der Wissenschaften. München 1888. Heft 2. 8°.

Berichte des naturwissenschaftlichen Vereines zu Regensburg. 1888. Heft 1. 8°.

Chronik der Universität Kiel für das Jahr 1887—88. Kiel 1888. 8⁰.

R. Foerster. De Aristotelis quae feruntur secretis secretorum commentatio. Kiliae 1888. 8⁰.

——————— Rede zur Feier des Gedächtnisses weiland S. H. des deutschen Kaisers Könings von Preussen Wilhelm. Kiel 1888. 8⁰.

F. Blass. Rede zur Feier des Gedächtnisses weiland S. M. des deutschen Kaisers Könings von Preusen Friedrich III Kiel 1888. 8⁰.

F. Brockhaus. Ueber das canonische Recht. Rede. Kiel 1888. 8⁰.

C. Barckmann. Ueber Xeroderma pigmentosum. Kiel 1888. 8⁰.

O. Behn. Studien über die Hornschicht der menschlichen Oberhaut, speciell über die Bedeutung des Stratum lucidum (Oehl.) Kiel 1887. 8⁰.

A. Bier. Beiträge zur Kenntniss der Syphilone der äusseren Muskulatur. Kiel 1888. 8⁰.

C. Boie. Ein Beitrag zur Keratitis parenchymatosa. Kiel 1887. 8⁰.

H. Breede. Ein Fall von tödtlicher Blutung aus Magenvaricen. Kiel 1887. 8⁰.

G. Breese. Ein Beitrag zur Statistik und pathologischen Anatomie der Hirnblutung. Kiel 1888. 8⁰.

J. Breunig. Bacteriologische Untersuchung des Trinkwassers der Stadt Kiel. Kiel 1888. 8⁰.

H. Collischonn. Beitrag zur Casuistik der Form und Lagerungsstörungen des Magens. Kiel 1888. 8⁰.

A. David. Beitrag zur Kenntniss der Wirkung des chlorsauren Natriums. Kiel 1888. 8⁰.

A. Ebermaier. Ein Fall von Syfilis hereditaria tarda. Kiel 1888. 8⁰.

C. Eschricht. Ein Fall von Hydrops genu intermittens. Kiel 1888. 8⁰.

J. Fichtel. Die Befunde bei plötzlichen Todesfällen im pathologischen Institut zu Kiel. Kiel 1888. 8⁰.

M. Friedrich. Ueber metastatische proliferirende Papillone der Aortenwand bei primären proliferirenden papillären Kystome des Ovarium. Kiel 1888. 8⁰.

L. Geerdt. Ein Fall von doppelter Ureteren-Bildung mit blinder Endigung des einen derselben. Kiel 1888. 8⁰.

O. Gehl. Ein Fall von Verletzung des Sehnerven. Kiel 1888. 8⁰.

O. Gerloff Beitrag zum Strychnin-Diabetes. Kiel 1888. 8⁰.

H. Görges. Beitrag zur pathologischen Anatomie der Difterie. Kiel 1888. 8⁰.

Th. Harke. Ein Fall von dreimaliger Magenresection wegen Magenbauchwandfistel. Kiel 1887. 8⁰.

O. Harttung. Ueber epidemische Cerebrospinalmeningitis in Kiel. Kiel 1888. 8⁰.

J. Herting. Ueber Axendrehungen des Darms bei Neugeborenen. Kiel 1888. 8⁰.

F. Hitzegrad. Welcher Art sind die Enderfolge der Kniegelenkresectionen. seit Einführung der antiseptischen Wundbehandlung und der künstlichen Blutleere? Kiel 1888. 8⁰.

L Hoche. Ein Beitrag zu der Lehre von der Radicaloperation von Hernien, speciell bei Kinderen Kiel 1888. 8⁰.

G. Hoppe-Seyler Ueber die Ausscheidung der Aetherschwefelsäuren im Urin bei Krankheiten. Strassburg 1887. 8⁰.

J. Jacob. Ueber simulirte Augenkrankheiten. Kiel 1888. 8⁰.

G. Kalmus. Ein Beitrag zur Statistik und pathologischen Anatomie der secundären Magen-Ditteritis. Kiel 1888. 8⁰.

Kirchhoff. Die Localisation psychischer Störungen. Kiel 1888. 8⁰.

H. Lange. Ein Beitrag zur Statistik und pathologischen Anatomie der interstitiellen Hepatitis. Kiel 1888. 8⁰.

J. P. A. Mörck. Beitrag zur pathologischen Anatomie der congenitalen Syfilis. Kiel 1888. 8⁰.

H. Noltenius. Beitrag zur Statistik und pathologischen Anatomie des Diabetes mellitus. Kiel 1888. 8⁰.

F. Oetken. Ueber ableitende Behandlung bei Wirbel- und Rückenmarks-Erkrankungen. Kiel 1887. 8⁰.

F. Pirow. Statistik des Keuchhustens nach den Daten der Kieler medicinischen Poliklinik von 1865 bis 1886. Kiel 1888. 8⁰.

E. Riemann. Ueber den Zusammenhang von Nierendislokation und Magenerweiterung. Kiel 1888. 8°.

H. Rohwedder. Der primäre Leberkrebs und sein Verhältniss zur Leberkirrhose. Kiel 1888. 8°.

R. Sauer. Beitrag zur Luxatio lentis in cameram anteriorem. Kiel 1888. 8°.

C. Schmid-Monnard. Ueber Pathologie und Prognose der Gelenktuberculose; insbesondere des Fusses. Kiel 1888. 8°.

J. Schmidt-Petersen. Ueber einen Fall von Melanosarkom des Rectums. Kiel 1888. 8°.

C. Schirren. Ein Beitrag zur Kenntniss von der Atrofie der Magenschleimhaut. Kiel 1888. 8°.

C. Schroeder. Ueber die Wirkung der Ueberosmiumsäure bei Epilepsie. Schwerin 1888. 8°.

M. Schulte. Entzündliche Spontanfrakturen des Oberschenkels für bösartige Knochenneubildingen gehalten. Kiel 1888. 8°.

W. von Starck. Die Lage des Spitzenstosses und die Percussion des Herzens im Kindesalter. Stuttgart 1888. 8°.

E. Stemann. Beiträge zur Kenntniss der Salpingitis tuberculosa und gonorrhoica. Kiel 1888. 8°.

R. Struck. Ueber das Verhältniss der Chorea und der Scarlatina zum acuten Gelenkrheumatismus. Kiel 1887. 8°.

C. Walter. Beitrag zur Lehre vom Hydrocephalus. Kiel 1888. 8°.

G. Warnstedt. Ein Fall von tötlicher Fettembolie nach Weichteilverletzung. Kiel 1888. 8°.

R. Weber. Beitrag zur Statistik der Echinokokkenkrankheit. Kiel 1887. 8°.

W. Wolfring. Statistik der Masern, des Scharlachs und der Varicellen von 1865 bis 1886. Kiel 1887. 8°.

M. Wollheim de Fonseca. Beitrag zur Frage der nächtlichen Harnabsonderung und zur Physiologie der Harnansammlung in der Blase. Neumünster 1888. 8°.

J. Abel. Ueber Aethylenimin (Spermin?). Kiel 1888. 8°.

H. Baurath. Ueber α-Stilbazol und seine Reduktionsprodukte. Kiel 1888. 8°.

E. Danzig. Ueber die eruptive Natur gewisser Gneisse sowie des Granulits im sächsischen Mittelgebirge. Kiel 1888. 8°.

W. Freese. Anatomisch- histologische Untersuchung von Membranipora pilosa L. nebst einer Beschreibung der in der Ostsee gefundenen Bryozoen. Berlin 1888. 8°.

B. Haseloff. Ueber den Krystallstiel der Muscheln, nach Untersuchungen verschiedener Arten der Kieler Bucht. Osterode 1888. 8°.

G. Mangold. Ueber die Altersfolge der vulkanischen Gesteine und der Ablagerungen des Braunkohlengebirges im Siebengebirge. Kiel 1888. 8°.

G. F. Rhein. Beiträge zur Anatomie der Caesalpiniaceen. Kiel 1888. 8°.

M. Schlaugk. Ueber synthetische Pyridinbasen aus Acet- und Propionaldehydammoniak. Kiel 1888. 8⁰.

C. Schramm. Synthetische Untersuchungen in der Chinolinreihe. Kiel 1887. 8⁰.

G. Schröder. Anatomisch- histologische Untersuchung von Nereis diversicolor O. Fr. Müll. Rathenow 1886. 8⁰.

H. C. Moritz Schultz. Ueber α-Methyl-α'-Aethyl- und α-Methyl-γ-Aethylpyridin und ihre zugehörigen Hexahydrobasen. Kiel 1888. 8⁰.

A. Schultze. Ueber die Bewegung der Wärme in einem homogenen rechtwinkligen Parallelepipedon. Kiel 1887. 8⁰.

M. Zwink. Die Pendel-Uhren im luftdicht verschlossenen Raume mit besonderer Anwendung auf die bezüglichen Einrichtungen der Berliner Sternwarte. Halle a. S. 1888. 4⁰.

R. Fick. Eine jainistische Bearbeitung der Sagara-Sage. Kiel 1888. 8⁰.

A. Gräf. Das Perfectum bei Chaucer. Eine syntactische Untersuchung. Frankenhausen 1888. 8⁰.

P. Hagen. Quaestiones Dioneae. Kiliae 1887. 8⁰.

R. Kayser. Placidus von Nanantula : De honore ecclesiae. Ein Beitrag zur Geschichte des Investiturstreits. Kiel 1888. 8⁰.

C. Lüttgens. Ueber Bedeutung und Gebrauch der Hilfsverba im frühen Altenglischen. Sculan und Willan. Wismar 1888. 8⁰.

O. Mätschke. Die Nebensätze der Zeit im Altfranzösischen. Kiel 1887. 8⁰.

O. Roll. Ueber den Einfluss der Volksetymologie auf die Entwicklung der neufranzösischen Schriftsprache. Kiel 1888. 8⁰.

S. Schopf. Beiträge zur Biographie und zur Chronologie der Lieder des Troubadours Peirè Vidal. Breslau 1887. 8⁰.

E. Schultze. De legione Romanorum XIII gemina. Kiliae 1887. 8⁰.

E. Träger. Die Volksdichtigkeit Niederschlesiens. Weimar 1888. 8⁰.

B. Wilde. Der Phänomenalismus des Thomas Hobbes. Kiel 1888. 8⁰.

ZWITSERLAND.

Neue Denkschriften der allgemeinen schweizerischen Gesellschaft für die gesammten Naturwissenschaften. Zürich 1888. Band XXX. Abth. 1. 4⁰.

Inhoud:

J. J. Früh. Beiträge zur Kenntniss der Nagelfluh der Schweiz.
C. Cramer. Ueber die verticillirten Siphoneen besonders Neomeris und Cymopolia.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern aus dem Jahre 1887. Bern 1888. N⁰. 1169—1194. 8⁰.

Verhandlungen der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft. Frauenfeld 1887. 70 Jahresversammlung. (1886/87) 8⁰.

Compte Rendu des travaux présentés à la 70e session de la Société helvétique des Sciences naturelles. Genève 1887. 8°.

I T A L I Ë.

Atti della reale Accademia dei Lincei. Roma 1887. Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. Vol. III Parte 2a. 4°.

Inhoud:

Notizie degli Scavi. Gennaio-Novembre.

Atti della reale Accademia dei Lincei. Roma 1888. Serie 4a. Rendiconti. Vol. IV. Fasc. 7—10. 4°.

Atti della reale Accademia delle Scienze. Torino 1888. Vol. XXIII. Disp. 11—12. 8°.

Bollettino delle pubblicazioni italiane. Firenze 1888. N°. 60—65. 8°.

Archivio per l'Antropologia e la Etnologia. Firenze 1888. Vol. XVIII. Fasc. 1. 8°.

G. de Lorenzo. Clinica delle malattie cutanee sifilitiche ed uterine. Napoli 1888. 8°.

Mittheilungen aus der zoologischen Station zu Neapel. Berlin 1888. Band VIII. Heft 2. 8°.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. 1888. Tomo II. Fasc. 3—4. roy. 8°.

S P A N J E.

Observaciones meteorologicas efectuadas en el Observatorio de Madrid durante los anos 1882, 1883, 1884 y 1885. Madrid 1887—1888. 2 Dl. 8°.

Resumen de las observaciones meteorologicas efectuadas en la peninsula y algunas de sus islas adyacentes durante el ano de 1883. Madrid 1888. 8⁰.

DENEMARKEN.

Mémoires de l'Académie royale de Copenhague. 1887—1888. Classe des Sciences. 6e Série. Vol. IV. N⁰. 6—7. 4⁰.

Inhoud:

6. Chr. Fr. Lütken. Kritiske studier over nogle Tandhvaler af slaegterne Tursiops, Orca og Lagenorhynchus.
7. E. Koefoed. Studier i Platosoforbindelserne.

Mémoires de l'Académie royale de Copenhague. 1888. Classe des Lettres. Vol. II. N⁰. 1. 4⁰.

Inhoud:

V. Finsen. Om den oprindelige ordning af nogle af den îslandske fristats institutioner.

Oversigt over det kongelige danske videnskabernes Selskabs forhandlinger i aaret 1887. Kjobenhavn 1888. N⁰. 3. 1888. N⁰. 1. 8⁰.

Aarböger for nordisk oldkyndighed og historie, udgivne af det kongelige nordiske oldskrift-Selskab. Kjobenhavn 1888. 2e Raekke. Bind III. Hefte 2. 8⁰.

ZWEDEN EN NOORWEGEN.

Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania. Aar 1887. Christiania 1888. 8⁰.

Die internationale Polarforschung 1882—1883. Beobachtungs-Ergebnisse der norwegischen Polarstation Bossekop in Alten. Christiania 1888. Theil II. Erdmagnetismus. Nordlicht. gr. 4⁰.

RUSLAND.

Mémoires de l'Académie impériale des Sciences de St. Pétersbourg. 1887. 7e Série. Tome XXXV. N°. 8—10. 4°.

Inhoud:

ERRATA.

5e Deel 1e Stuk blz. 150, regel 4

staat: de 2e lens . . . . — gelijkbol

lees — gelijkhol.

ell-

schaft. Dorpat 1887—1888. N°. 2—4. 4°.

Inhoud:

2. Fr. Berg. Einige Spielarten der Fichte.
3. E. Russow. Zur Anatomie resp. physiologischen und vergleichenden Anatomie der Torfmoose.
4. K. Weihrauch. Neue Untersuchungen über die Bessel'sche Formel und deren Verwendung in der Meteorologie.

Sitzungsberichte der Naturforscher-Gesellschaft. Dorpat 1888. Band VIII. Heft 2. 8°.

Resumen de las observaciones meteorologicas efectuadas en la peninsula y algunas de sus islas adyacentes durante el ano de 1883. Madrid 1888. 8⁰.

DENEMARKEN.

Mé ... hague. 1887—
]
(

6.

7.

M

V

Ove
ka
N⁰.

Aarböger for nordisk ... af det kongelige nordiske oldskrift-Selskab. Kjøbenhavn 1888. 2e Raekke. Bind III. Hefte 2. 8⁰.

ZWEDEN EN NOORWEGEN.

Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania. Aar 1887. Christiania 1888. 8⁰.

Die internationale Polarforschung 1882—1883. Beobachtungs-Ergebnisse der norwegischen Polarstation Bossekop in Alten. Christiania 1888. Theil II. Erdmagnetismus. Nordlicht. gr. 4⁰.

RUSLAND.

Mémoires de l'Académie impériale des Sciences de St. Pétersbourg. 1887. 7e Série. Tome XXXV. N°. 8—10. 4°.

Inhoud:

8. E. Büchner. Zur Geschichte der Kaukasischen Ture (Capra Caucasica Güld. und Capra cylindricornis Blyth.).
9. G. Tammann. Die Dampftensionen der Lösungen.
10. J. N. Woldrich. Diluviale europäisch-nordasiatische Säugethierfauna und ihre Beziehungen zum Menschen.

Bulletin de l'Académie impériale des Sciences de St. Pétersbourg. 1887. Tome XXXII. N°. 1. 4°.

Verslagen van het keiz. aardrijkskundig Genootschap. St. Petersburg 1888. Deel XXIV. N°. 1. 8°. (In het Russisch).

Acta horti Petropolitani. St. Petersburg 1887. Tomus X. Fasc. 1. 8°.

Bulletin de la Société impériale des Naturalistes. Moscou 1888. Année 1888. N°. 1. 8°.

Schriften herausgegeben von der Naturforscher-Gesellschaft. Dorpat 1887—1888. N°. 2—4. 4°.

Inhoud:

2. Fr. Berg. Einige Spielarten der Fichte.
3. E. Russow. Zur Anatomie resp. physiologischen und vergleichenden Anatomie der Torfmoose.
4. K. Weihrauch. Neue Untersuchungen über die Bessel'sche Formel und deren Verwendung in der Meteorologie.

Sitzungsberichte der Naturforscher-Gesellschaft. Dorpat 1888. Band VIII. Heft 2. 8°.

RUMENIË.

Documente privitore la istoria Romanilor culese de L. de Hurmuzaki. Bucuresci 1888. Vol. III. Partea 2. 4°.

AZIË.

Annals of the royal botanic Garden. Calcutta 1888. Vol. I. fol.

Inhoud:

G. King. The species of Fucus of the indo-malayan and chinese countries. Part 2. Synoecia, Sycidium, Covellia, Eusyce and Noemorphe.

Registers of original observations in 1888 reduced and corrected. January—March 1888. fol.

Proceedings of the Asiatic Society of Bengal Calcutta 1888. N°. 2—3. 8°.

Journal of the Asiatic Society of Bengal. Calcutta 1888. Vol. LVI. Part 2. N°. 4. Vol. LVII. Part 2. N°. 1. 8°.

Notes on economic entomology. Calcutta 1888. N°. 1—2. 8°.

Inhoud:

1. E. C. Cotes. A preliminary account of the wheat and rice weevil in India.
2. ———— The experimental introduction of insecticides into India, with a short account of modern insecticides and methods of applying them.

Journal of the College of Science, Imperial University, Japan. Tokio 1888. Vol. II. Part 2—3. 4°.

Inhoud:

B. Koto. On the so-called crystalline schists of Chichibu.

S. Okubo. On the plants of Sulphur islands.
I. Ijima. Some new cases of the occurrence of Bothriocephalus liguloides Lt.
C. G. Knott. A magnetic survey of all Japan.

Transactions of the seismological Society of Japan. Yokohama 1888. Vol. XII. 8⁰.

Mittheilungen der deutschen Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokio. Yokohama 1888. Heft 40. 4⁰.

Journal of the China branch of the royal Asiatic Society. Shanghai 1888. New Series. Vol. XXII. N⁰. 5. 8⁰.

AMERIKA.

Smithsonian miscellaneous Collections. Washington 1888. Vol. XXXI. 8⁰.

Bulletin U. S. Department of Agriculture. Division of Pomology, Washington 1888. N⁰. 1. 8⁰.

Report of the Superintendent of the U. S. coast and geodetic Survey, showing the progress of the work during the year 1886. Washington 1888. 4⁰.

John G. Bourke. Compilation of notes and memoranda bearing upon the use of human ordure and human urine in rites of a religious or semi-religious character among various nations. Washington 1888. 8⁰.

Memoirs of the Boston Society of natural History. Boston 1886. Vol. IV. N⁰. 1—4. 4⁰.

Inhoud:

1. Th. Dwight. The significance of bone structure.
2. D. H. Campbell. The development of the ostrich fern.

3. S. H. Scudder. The introduction and spread of Pieris Rapae in North-America 1860—1885.
4. W. Trelease. North American Geraniaceae.

Annals of Harvard College Observatory. Cambridge 1888. Vol. XVIII. N°. 3—5. 4°.

Inhoud:

3. H. M. Parkhurst. Photometric observations of Asteroids.
4. Total eclipse of the moon January 28, 1888.
5. W. H. Pickering. Total eclipse of the sun, August 29, 1888.

Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences. New Haven 1888. Vol. VII. Part 2. 8°.

American Journal of Science. New Haven 1888. 3d Series. Vol. XXXV. N°. 207—209. 8°.

Journal of the American medical Association. Chicago 1888. Vol. X. N°. 24—26. Vol. XI. N°. 1—10. 4°.

A. T. Bruce. Observations on the embryology of insects and arachnids. Baltimore 1887. 4°.

Transactions of the New York Academy of Sciences. New York 1887. Vol. IV. 8°.

History and work of the Warner Observatory. Rochester N. Y. 1887. Vol. I. 8°.

Report of the year 1886—7 and 1887—8, presented by the board of managers of the Observatory of Yale University. 8°.

Journal of the Elisha Mitchell scientific Society. Raleigh 1884—1888. Vol. I—V. 8°.

A memoir of Elisha Mitchell. Chapel Hill 1858. 8°.

Memoirs of the California Academy of Sciences. San Francisco 1888. Vol. II. N°. 1. 4°.

Inhoud:

G. Eisen. On the anatomy of Sutroa rostrata, a new annelid of the family Lumbriculina.

Bulletin of the California Academy of Sciences. San Francisco 1887. Vol. II. N°. 8. 8°.

Publications of the Lick Observatory. Sacramento 1887. Vol. I. 4°.

Rapport annuel de la Commission géologique et d'histoire naturelle du Canada. Sussex 1886. Vol. II. 8°.

Memorias de la Sociedad cientifica »Antonio Alzate". Mexico 1888. Tomo I. N°. 12. 8°.

Boletin de estadistica del estado de Puebla. Puebla de Zaragoza 1888. Tomo I. N°. 39—47. fol.

Boletin mensal do Observatorio meteorologico-magnetico central. Mexico 1888. Tomo I. N°. 1—5. fol.

Boletim da Academia imperial de Medicina. Rio de Janeiro 1888. Anno III. N°. 16—17. 4°.

Annaes da Academia imperial de Medicina. Rio de Janeiro 1888. Serie 6. Tomo III. N°. 4. 8°.

Revista do Observatorio publicaçao mensal do imperial Observatorio do Rio de Janeiro. 1888. Anno III. N°. 6—8. 8°.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. Buenos Aires 1888. Tomo XXV. Entr. 5—6. 8°.

Boletin de la Academia nacional de Ciencias en Cordoba. Buenos Aires 1887. Tomo X. Entr. 2. 8⁰.

Verhandlungen des deutschen wissenschaftlichen Vereins zu Santiago. Valdivia 1887. Heft 5. 8⁰.

Anales del Museo nacional de Costa Rica. San José 1888. Tomo I. 8⁰.

AUSTRALIË.

F. von Mueller. Iconography of Australian species of Acacia and cognate genera. Melbourne 1888. Decade 9—11. 4⁰.

AANGEKOCHT.

Oud Holland. Nieuwe Bijdragen voor de geschiedenis der Nederlandsche kunst, letterkunde, nijverheid enz. Amsterdam 1888. Jaarg. 6. Afl. 2. 4⁰.

De Navorscher. Amsterdam 1888. Nieuwe Serie. Jaarg. 21. N⁰. 7—9. 8⁰.

J. G. Frederiks en F. J. van den Branden. Biographisch Woordenboek der Noord- en Zuidnederlandsche letterkunde. Amsterdam 1888. Afl. 2. 8⁰.

J. H. W. Unger. Bibliographie van Vondels Werken. Amsterdam 1888. 8⁰.

La Grande Encyclopédie. Inventaire raisonné des Sciences, des Lettres et des Arts. Paris 1888. Livr. 137—149. 4⁰.

Journal des Savants. Paris, Juin—Août 1888. 4°.

Annales des Sciences naturelles. Paris 1888. 7e Série. Zoologie, Tome V. N°. 1—6. Botanie, Tome VII. N°. 2—6. 8°.

Archives de Zoologie expérimentale et générale. Paris 1888. 2e Série. Tome VI. N°. 1. 8°.

Bulletin des Sciences mathématiques. Paris 1888. 2e Série. Tome XII. Juin—Juillet. 8°.

Annales de Chimie et de Physique. Paris 1888. 6e Série. Tome XIV. Juillet—Septembre. 8°.

A. Laporte. Histoire littéraire du 19e siècle. Paris 1888. Tome V. Livr. 3. 8°.

The London, Edinburgh, and Dublin philosophical Magazine and Journal of Science. London 1888. 5th Series. Vol. XXVI. N°. 158—160. 8°.

Annals and Magazine of natural History. London 1888. 6th Series. Vol. II. N°. 7—9. 8°.

Journal of Anatomy and Physiology normal and pathological. London 1888. Vol. XXII. Part 4. 8°.

Annals of Botany. London 1888. Vol. II. N°. 5. 8°.

L. Stephen. Dictionary of national Biography. London 1888. Vol. XV. (Diamond-Drake). 8°.

G J. Gray. Bibliography of the works of Sir Isaac Newton. Cambridge 1888. 8°.

Astronomische Nachrichten. N°. 2844—2858. 4°.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1888. N°. 12—19. 8°.

Arbeiten aus dem kais. Gesundheitsamtes. Berlin 1888. Band IV. 4°.

Veröffentlichungen des kais. Gesundheitsamtes. Berlin 1888. Jahrg. XII. N°. 26—38. 4°.

Berichte der deutschen botanischen Gesellschaft. Berlin 1888. Band VI. Heft 5—7. 8°.

Archiv für Naturgeschichte. Berlin 1887. Jahrg. 53. Band I. Heft 3. 8°.

Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1888. Neue Folge. Band XXXIV. Heft 5. Band XXXV. Heft 1. Beiblätter. Band XII. St. 6—8. 8°.

Zeitschrift für physikalische Chemie. Leipzig 1888. Band II. Heft 7—9. 8°.

Journal für Ornithologie. Leipzig 1888. 4e Folge. Band XVI. Heft 1. 8°.

Der zoologische Garten. Frankfurt a.M. 1888. Jahrg. 29. N°. 5—8. 8°.

Flora. Regensburg 1888. Jahrg. 71. N°. 16—21. 8°.

Dingler's polytechnisches Journal. Stuttgart 1888. Band CCLXVIII. Heft 13. Band CCLXIX. Heft 1—12. 8°.

Bibliothèque universelle et revue Suisse. Lausanne 1888. 3e Période. Tome XXXVIII. N°. 114—115. 8°.

Archives des Sciences physiques et naturelles. Genève 1888. 3e Période. Tome XX. N°. 7—8. 8°.

A. de Gubernatis. Dictionnaire international des écrivains du jour. Florence 1888. Livr. 3—4. roy. 8°.

Württembergische Jahrbücher für Statistik und Landeskunde, herausgegeben von dem kön. statistischen Landesamt. Stuttgart 1887. Jahrg. 1886. Band I—II. roy. 8⁰.

ITALIË.

Atti della reale Accademia dei Lincei. Roma 1887. Serie 4ª. Rendiconti. Vol. III. Fasc. 4—5. 4⁰.

Bollettino delle pubblicazioni Italiane. Firenze 1887. N⁰. 46—47. 8⁰.

ZWEDEN EN NOORWEGEN.

Sveriges geologiska Undersökning. Serie A^a. Beskrifning till kartbladet Lund, Nortelge, Svartkluben, Forsmark och Björn, Öregrund, Motala, N⁰. 92, 94, 97, 99, 101, 102. Serie A^b. Beskrifning till kartbladet Venersborg och Halmstad. N⁰. 11, 12. Serie B^b. Beskrifning till agronomiskt geologisk karta öfver Egendomen Svalnäs i Roslagen. Serie C. Afhandlingar och uppsatser. N⁰. 65, 78—91. 4⁰ en 8⁰.

Nova Acta regiae Societatis scientiarum Upsaliensis. Upsaliae 1887. Seriei 3ª. Vol. XIII. Fasc. 2. 4⁰.

Inhoud:

P. T. Cleve. New researches on the compounds of Didymium.

K. B. J. Forssell. Beiträge zur Kenntniss der Anatomie und Systematik des Gloeolichenen.

A. Berger. Sur une application de la théorie des équations binômes à la sommation de quelques séries.

K. Angström. Sur une nouvelle méthode de faire des mesures absolues de la chaleur rayonnante, ainsi qu'un instrument pour enregistrer la radiation solaire.

C. Bovallius. Amphipoda Synopidea.
A. N. Lundström. Pflanzenbiologische Studien, II. Die Anpassungen der Pflanzen an Thiere.
C. W. S. Aurivillius. Beobachtungen über Acariden auf die Blättern verschiedener Bäume

RUSLAND.

Mémoires de l'Académie impériale des Sciences. St. Pétersbourg 1887. 7e Série. Tome XXXV. N°. 3—7. 4°.

Inhoud:

3. L. Struve. Bestimmung der Constante der Praecession und der eigenen Bewegung des Sonnensystems.
4. N. Uskow. Die Blutgefässkeime und deren Entwickelung bei einem Hühnerembryo.
5. Th. Pleske. Beschreibung einiger Vogelbastarde.
6 W. Radloff. Das türkische Sprachmaterial des Codex Comanicus.
7. J. Setschenow. Weiteres über das Anwachsen der Absorptionscoefficienten von CO_2 in den Salzlösungen.

Annalen des physikalischen Central-Observatoriums. St. Petersburg 1887. Jahrg. 1886. Theil I. 4°.

Bulletin de la Société impériale des Naturalistes de Moscou. 1887. N°. 3. 8°.

Korrespondenzblatt des Naturforscher-Vereins. Riga 1887. N°. 30. 8°.

Bidrag till Kännedom af Finlands Natur och Folk, utgifna af Finska Vetenskaps Societeten. Helsingfors 1887. Häftet 44. 8°.

Exploration internationale des régions polaires 1882—1883 et 1883—1884. Helsingfors 1887. Tome II. Magnétisme terrestre. 4°.

ESPERANTO. Internationale Sprache. Vorrede und vollständiges Lehrbuch. Warschau 1887. 8⁰.

RUMENIE.

B. PETRICEICU-HASDEU. Etymologicum magnum Romaniae. Bucuresci 1887. Tomul II. Fasc. 1. (Amus-Apuc). roy. 8⁰.

AZIË.

Meteorological Observations recorded at six stations in India. June—July. 1887. 4⁰.

Journal of the Asiatic Society of Bengal. Calcutta 1887. Vol. LIV. Part 2. N⁰. 4. Vol. LV. Part 2. N⁰. 5. Vol. LVI. Part 2. N⁰. 1. 8⁰.

Proceedings of the Asiatic Society of Bengal. Calcutta 1887. N⁰. 6—8. 8⁰.

Mittheilungen der deutschen Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokio. Yokohama 1887. Heft 37. 4⁰.

Journal of the College of Science, imperial University, Japan. Tokio 1887. Vol. I. Part 4. 4⁰.

Inhoud:

J. JJIMA. Ueber einige Tricladen Europa's.
S. SEKIYA. A model showing the motion of an earth-particle during an earthquake.
H. YOSHIDA. On aluminium in the ashes of flowering plants.
T. HAGA. The effects of dilution and the presence of jodium salts and carbonic acid upon the titration of Hydroxyamine by Jodine.
C. G. KNOTT. Notes on a large crystal sphere.

K. Mitsukuri. The marine biological station of the imperial University at Misaki.

AMERIKA.

Circulars of information of the Bureau of Education. Washington 1887. N°. 1—2. 8°.

Bulletin of the U. S. geological Survey. Washington 1886—1887. N°. 34—39. 8°.

Scientific Writings of Joseph Henry. Washington 1886. Vol. I—II. roy. 8°.
(Published by the Smithsonian Institution).

Memoirs of the national Academy of Sciences. Washington 1886. Vol. III. Part 2. 4°.

Inhoud:

E. Loomis. Contributions to meteorology.
C. H. F. Peters. On Flamsteed's stars „observed, but not existing".
———— Corrigenda in various star catalogues.
C. B. Comstock. Ratio of meter to yard.
J. S. Billings and W. Matthews. On composite photography as applied to craniology, and on measuring the cubic capacity of skulls.
———— On a new craniophore for use in making composite photographs of skulls.
A. S. Packard. On the Syncarida, a hitherto undescribed synthetic group of extinct malacostracous Crustacea.
———— On the Gampsonychidae, an undescribed family of fossil schizopod Crustacea.
———— On the Arithracaridae, a family of carboniferous macrurous decapod Crustacea.
———— On the carboniferous Xiphosurous fauna of North-America.
E. D. Cope. On two new forms of Polyodont and Gonorhynchid fishes from the eocene of the Rocky Mountains.

Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences. Boston 1887. New Series. Vol. XIV. Part 2. 8⁰.

Proceedings of the American philosophical Society. Philadelphia 1887. Vol. XXIV. N⁰. 125. 8⁰.

Proceedings of the Academy of natural Sciences. Philadelphia 1887. Part 1—2. 8⁰.

Ch. A. Ashburner. The geologic distribution of natural gas in the United States. St. Louis 1886. 8⁰.

——————— The geologic relations of the Nanticoke disaster. 1887. 8⁰.

American Journal of Science. New Haven 1887. 3e Series. Vol. XXXIV. N⁰. 199—202. 8⁰.

American Journal of Philology, edited by B. L. Gildersleeve. Baltimore 1887. Vol. VIII. N⁰. 3. 8⁰.

American chemical Journal, edited by Ira Remsen. Baltimore 1887. Vol. IX. N⁰. 6. 8⁰.

Johns Hopkins University Studies in historical and political Science. Baltimore 1887. 5th Series. N⁰. X. 8⁰.

Journal of the American medical Association. Chicago 1887. Vol. IX. N⁰. 20—23. 4⁰.

25th Annual Report of the Secretary of the State Board of Agriculture of the State of Michigan. Lansing 1886. 8⁰.

Publications of the Washburn Observatory of the University of Wisconsin. Madison 1887. Vol. V. 8⁰.

Bulletin of the California Academy of Sciences. San Francisco 1887. Vol. II. N⁰. 7. 8⁰.

Proceedings of the Canadian Institute. Toronto 1887. 3ᵈ Series. Vol. V. Fasc. 1. 8⁰.

Memorias de la Sociedad cientifica »Antonio Alzate". Mexico 1887. Tomo I. N⁰. 4. 8⁰.

Boletin de Estadistica del estado de Puebla. Puebla de Zaragoza 1887. Tomo I. N⁰. 12—14. fol.

AANGEKOCHT.

De Navorscher. Amsterdam 1887. Nieuwe Serie. Jaarg. 20. Afl. 12. 8⁰.

Jaarboek der Rijks-Universiteit te Leiden, 1886—1887. Leiden 1887. 8⁰.

La grande Encyclopédie. Inventaire raisonné des Sciences, des Lettres et des Arts. Paris 1887. Livr. 106—109. 4⁰.

Journal des Savants. Paris, Novembre 1887. 4⁰.

Bulletin des Sciences mathématiques. Paris 1887. 2ᵉ Série. Tome XI. Décembre. 8⁰.

Annales de Chimie et de Physique. Paris 1887. 6ᵉ Série. Tome XII. Décembre. 8⁰.

E. Maindron. L'Académie de Sciences. Histoire de l'Aca-

démie. Fondation de l'Institut national. Bonaparte membre de l'Institut national. Paris 1888. 8⁰.

The London, Edinburgh, and Dublin philosophical Magazine and Journal of Science. London 1887. 5th Series. Vol. XXIV. N⁰. 151. 8⁰.

Annals and Magazine of natural History. London 1887. 5th Series. Vol. XX. N⁰. 120. 8⁰.

Report of the 55th and 56th meeting of the British Association for the Advancement of Science. London 1886—1887. 2 Vol. 8⁰.

Annals of Botany. Oxford 1887. Vol. I. N⁰. 1. 8⁰.

Astronomische Nachrichten. N⁰. 2812—2816. 4⁰.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1887. N⁰. 24. 1888. N⁰. 1. 8⁰.

Veröffentlichungen des kais. Gesundheitsamtes. Berlin 1887. Jahrg. 11. N⁰. 47—50. 4⁰.

Corpus inscriptionum latinarum. Berolini 1887. Vol. XIV. fol.

Berichte der deutschen botanischen Gesellschaft. Berlin 1887. 5ter Jahrg. Heft 8. 8⁰.

Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1887. Neue Folge. Band XXXII. Heft 4. 8⁰.

Bibliotheca zoologica. II. bearbeitet von O. Taschenberg. Leipzig 1887. Lief. 4. 8⁰.

Dingler's polytechnisches Journal. Stuttgart 1887. Band CCLXVI. Heft 8—10. 8⁰.

Der zoologische Garten. Frankfurt a.M. 1887. Jahrg. 28. N°. 10. 8°.

Archives des Sciences physiques et naturelles. Genève 1887. 3e Période. Tome XVIII. N°. 11. 8°.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAAND JANUARI 1888.

NEDERLAND.

Bijdragen van het statistisch Instituut. Amsterdam 1887. N°. 3. 8°.

Revue internationale scientifique et populaire des falsifications des denrées alimentaires. Amsterdam 1888. 1e Année. Livr. 3. 4°.

Tijdschrift uitgegeven door de Nederlandsche Maatschappij ter bevordering van Nijverheid. Haarlem 1887. 4e Reeks. Deel XI. Afl. 12. 8°.

12de Jaarverslag omtrent het zoölogisch station der Nederlandsche dierkundige Vereeniging. Leiden 1887. 8°.

Flora Batava. Leiden 1887. Afl. 279—280. 4°.

Nota over de uitkomsten der waarnemingen van het slibgehalte der Nederlandsche rivieren door C. Lely. 's Gravenhage 1887. 4°.
(Uitgegeven door het Departement van Waterstaat, Handel en Nijverheid).

Bijdragen tot de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië, uitgegeven door het koninklijk Instituut voor de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië. 's Gravenhage 1888. 5de Reeks. Deel III. Afl. 1. 8°.

Reis in Oost- en Zuid-Borneo van Koetei naar Banjermassin door C. BOCK. 's Gravenhage 1887. 2de Gedeelte. 4°.
(Uitgegeven door het koninklijk Instituut voor de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië).

Sepp's Nederlandsche Insecten. 's Gravenhage 1887. 2de Serie. Deel IV. N°. 33—36. 4°.

J. DIRKS. De vondst van gouden voorwerpen en gouden merovingische munten te Dronrijp. Leeuwarden 1887. 8°.

L. SERRURIER. Versuch einer Systematik der Neu-Guinea Pfeile. 4°.
(Separat-Abdruck aus internationales Archiv für Ethnographie. Band I).

J. W. MOLL. De toepassing der paraffine-insmelting op botanisch gebied. 8°.
(Overgedrukt uit het Maandblad voor Natuurwetenschappen. 1887. N°. 5—6).

Statistiek van het Koningrijk der Nederlanden. Nieuwe Serie. Staten van de in-, uit- en doorgevoerde voornaamste handelsartikelen gedurende de maand November 1887. 's Gravenhage 1887. fol.

Verzamelingstabel der waterhoogten langs de kusten van de Noordzee, de Zuiderzee en de Nederlandsche rivieren, waargenomen in de maand Augustus 1887. fol.

Verżamelingstabel der waterhoogten volgens de bladen der zelfregistreerende peilschalen, waargenomen in de maand Augustus 1887. fol.

NEDERLANDSCH OOST-INDIË.

Notulen van de algemeene- en bestuurs-vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Batavia 1887. Deel XXV. Afl. 3. 8⁰.

Nederlandsch-Indisch plakaatboek, 1602—1811, door Mr. J. A. van der Chys. Batavia 1887. Deel IV. 8⁰. (Uitgegeven door het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen).

Tijdschrift voor nijverheid en landbouw in Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Nederlandsch-Indische Maatschappij van Nijverheid en Landbouw. Batavia 1887. Deel XXXV. Afl. 6. 8⁰.

Geneeskundig Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Vereeniging tot bevordering der geneeskundige Wetenschappen in Nederlandsch-Indië. Batavia 1887. Deel XXVII. Afl. 4. 8⁰.

Catalogus van de militaire geneeskundige Bibliotheek te Weltevreden. Batavia 1887. 8⁰.

BELGIË.

Annuaire de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des beaux-Arts de Belgique. 1888. Bruxelles 1888. 54e Année. 8⁰.

F. Plateau. Recherches expérimentales sur la vision

chez les arthropodes. Bruxelles 1887. Part 1—2. 8°. (Extrait des Bulletins de l'Académie royale de Belgique. 3e Série. Tome XIV).

FRANKRIJK.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Paris 1887. Tome CV. N°. 25—26. Tome CVI. N°. 1—3. 4°.

Bulletin de l'Académie de Médecine. Paris 1887—1888. 3e Série. Tome XVIII. N°. 51—52. Tome XIX. N°. 1—3. 8°.

Bulletin de la Société mathématique de France. Paris 1887. Tome XV. N°. 7. 8°.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de la Société de Biologie. Paris 1887. 8e Série. Tome IV. N°. 32—38, 40—42. Tome V. N°. 1. 8°.

Journal d'Hygiène. Paris 1887—1888. Année 14. Vol. XIII. N°. 588—592. 4°.

Bulletin de la Société philomatique de Paris. 1887. 7e Série. Tome XI. N°. 4. 8°.

GROOT-BRITTANNIË EN IERLAND.

Proceedings of the royal Society. London 1887. Vol. XLIII. N°. 260. 8°.

Proceedings of the royal Institution of Great Britain. London 1887. Vol. XII. Part 1. 8°.

List of the members of the royal Institution of Great Britain. London 1887. 8°.

Proceedings of the royal geographical Society. London 1887. New Series. Vol. X. N°. 1. 8°.

Monthly Notices of the royal astronomical Society. London 1887. Vol. XLVIII. N°. 2. 8°.

Journal of the royal Asiatic Society of Great Britain and Ireland. London 1888. New Series. Vol. XX. Part 1. 8°.

Astronomical and magnetical and meteorological Observations made at the royal Observatory, Greenwich, in the year 1885. London 1887. 4°.

G. B. Airy. Numerical lunar theory. London 1886. 4°.

Journal of the royal geological Society of Ireland. Dublin 1887. New Series. Vol. VIII. Part 2. 8°.

OOSTENRIJK-HONGARIJE.

Mittheilungen der anthropologischen Gesellschaft. Wien 1885—1887. Band XV. Heft 4. Band XVII. Heft 3—4. 8°.

Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft. Wien 1887. Band XXXVII. N°. 3—4. 8°.

E. Baum. Ein Combinations-Studium über die Entwicklungs-Geschichte der Erdkruste. Wien 1887. 8°.

Zeitschrift des Ferdinandeums für Tirol und Vorarlberg. Innsbruck 1887. 3e Folge. Heft 31. 8°.

Verhandlungen des Vereins für Natur- und Heilkunde. Presburg 1884—1887. Neue Folge. Heft 5—6. 8°.

Mittheilungen des naturwissenschaftlichen Vereines für Steiermark. Graz 1887. Jahrg. 1886. 8°.

DUITSCHLAND.

Sitzungsberichte der Gesellschaft naturforschender Freunde. Berlin 1887. Jahrg. 1887. 8°.

Archiv für pathologische Anatomie und Physiologie und für klinische Medicin. Berlin 1887. Band CIX. Heft 2. Band XC. Heft 1—3. 8°.

Abhandlungen aus dem Gebiete der Naturwissenschaften, herausgegeben vom naturwissenschaftlichen Verein. Hamburg 1887. Band X. 4°.

Inhoud:

E. Wohlwill. Joachim Jungius und die Erneuerung atomistischer Lehren im 17 Jahrhundert.

J. Kiessling. Beiträge zu einer Chronik ungewöhnlicher Sonnen- und Himmelsfärbungen.

G. Neumayer. Die Thätigkeit der Deutschen Seewarte während der ersten 12 Jahre ihres Bestehens.

H. Krüss. Die Farben-Korrektion der Fernrohr-Objektive von Gauss und von Fraunhofer.

A. Voller. Ueber die Messung hoher Potentiale mit dem Quadrant-Elektrometer.

F. Wibel. I. Die Schwankungen im Chlorgehalt und Härtegrade des Elbwassers bei Hamburg. — II. Chemisch-antiquarische Mitteilungen.

C. Gottsche. Die Mollusken-Faune des Holsteiner Gesteins.

K. Kraepelin. Die Deutschen Süsswasser-Bryozoen.

K. Möbius. Das Flaschentierchen (Folliculina ampulla).

G. Pfeffer. Beiträge zur Morphologie der Dekapoden und Isopoden.

G. Stuhlmann. Zur Kenntniss des Ovariums der Aalmutter (Zoarces viviparus Cuv.).

Zeitschrift der historischen Gesellschaft für die Provinz Posen. Posen 1885. Jahrg. 1. Heft 1—4. 8°.

Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, herausgegeben von der medicinisch-naturwissenschaftlicher Gesellschaft. Jena 1887. Band XXI. Heft 3—4. 8⁰.

Zeitschrift des Vereins für thüringische Geschichte und Altertumskunde. Jena 1887. Neue Folge. Band V. Heft 3—4. 8⁰.

Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1887. Jahrg. X. N⁰. 268—270. 8⁰.

R. Hoppe. Grunert's Archiv der Mathematik und Physik. Leipzig 1887. 2te Reihe. Teil V. Heft 4. Teil VI. Heft 1. 8⁰.

Petermann's Mitteilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt. Gotha 1887. Band XXXIII. N⁰. 10—12. Band XXXIV. N⁰. 1. Ergänzungsheft N⁰. 88. 4⁰.

C. P. Tiele. Babylonisch-assyrische Geschichte. Gotha 1888. Teil II. 8⁰.

B. Symons. Die Lieder Edda. Halle a/S. 1888. Band I. 1ste Hälfte. Götterlieder. 8⁰.

Zeitschrift für Naturwissenschaften, herausgegeben im Auftrage des naturwissenschaftlichen Vereins für Sachsen und Thüringen. Halle a/S. 1887. 4e Folge. Band VI. Heft 3—4. 8⁰.

Correspondenz-Blatt des naturwissenschaftlichen Vereines. Regensburg 1887. Jahrg. 40. 8⁰.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der kön. bayr. Akademie der Wissenschaften. München 1887. Heft 2. 8⁰.

Sitzungsberichte der philosophisch-philologischen und historischen Classe der kön. bayr. Akademie der Wissenschaften. München 1887. Heft 3. Band II. Heft 1—2. 8°.

Die Cisterzienser-Abtei Bebenhausen, bearbeitet von Dr. E. Paulus, herausgegeben vom Württembergischen Altertums-Verein. Stuttgart 1887. 4°.

ZWITSERLAND.

Verhandlungen der naturforschenden Gesellschaft. Basel 1887. Theil VIII. Heft 2. 8°.

ITALIË.

Atti della reale Accademia dei Lincei. Roma 1887. Serie 4a. Rendiconti. Vol. III. Fasc. 6—7. 4°.

Memorie del regio Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. Venezia 1887. Vol. XXII. Parte 3. 4°.

Inhoud:

A. Gloria. Monumenti della Universita di Padova.
A. Pazienti. Considerazioni generali intorno alla termodinamica
A. de Zigno. Sopra uno scheletro fossile di Myliobates, esistente nel Museo Gazola in Verona.
G. A. Pirona. Due Chamacee nuove del terreno cretaceo del Friuli.
A. Favaro. Miscellanea Galileiana inedita.

Atti del reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. Venezia 1887. Serie 6. Tome V. Disp. 2—9. 8°.

Atti della reale Accademia delle Scienze. Torino 1887—88. Vol. XXIII. Disp. 1. 8°.

Mittheilungen aus der zoologischen Station zu Neapel. Berlin 1887. Band VII. Heft 3—4. 8°.

Bollettino delle pubblicazioni Italiane. Firenze 1887. N⁰. 48—49. 8⁰.

Atti del Collegio degli Ingegneri ed Architetti. Palermo 1887. N⁰. 2. 4⁰.

A. Favaro. Per la edizione nazionale delle opere di Galileo Galilei. Firenze 1888. 4⁰.

Atti della Societa Toscana di Scienze naturali. Pisa 1887—89. Processi Verbali. Vol. VI. Adunanza del 13 Novembre 1887. 8⁰.

R U S L A N D.

Mémoires du Comité géologique. St. Pétersbourg 1887. Vol. II. N⁰. 4—5. Vol. III. N⁰. 3. 4⁰.

Inhoud:

4. J. Schmalhausen. Die Pflanzenreste der artinskischen und permischen Ablagerungen im Osten des europäischen Russlands.
5. A. Pavlow. Le presqu'île de Samara et les Gegoulis.

Vol. III. N⁰. 3:

Th. Tschernyschew. Die Fauna des mittleren und oberen Devon am West-Abhange des Urals.

Bulletins du Comité géologique. St. Pétersbourg 1887. Tome VI. N⁰. 8—10. 8⁰.

Verslagen van het keiz. aardrijkskundig Genootschap. St. Petersburg 1887. Deel XXIII. N⁰. 5. 8⁰. (In het Russisch).

A Z I Ë.

Transactions of the seismological Society of Japan. Yokohama 1887. Vol. XI. 8⁰.

AMERIKA.

Index-Catalogue of the Library of the Surgeon-General's Office, U. S. Army. Washington 1887. Vol. VIII. (Legier-Medicine). 4⁰.

Journal of the American medical Association. Chicago 1887—1888. Vol. IX. N⁰. 24—27. Vol X. N⁰. 1. 4⁰.

Johns Hopkins University Circulars. Baltimore 1887. Vol. VII. N⁰. 60—62. 4⁰.

American Journal of Mathematics, edited by S. Newcomb. Baltimore 1888. Vol. X. N⁰. 2. 4⁰.

Johns Hopkins University Studies in historical and political Science. Baltimore 1887. 5th Series. N⁰. XI. 8⁰.

Memorias de la Sociedad cientifica »Antonio Alzate". Mexico 1887. Tome I. N⁰. 5. 8⁰.

Boletin de Estadistica del estado de Puebla. Puebla de Zaragoza 1887. Tomo I. N⁰. 15—26. fol.

Archivos do Museu Macional do Rio de Janeiro. 1885. Vol. VI. 4⁰.

Inhoud:

C. F. Hartt. Contribuicoes para a ethnologia do valle do Amazonas.
J. B. de Lacerda. Contribuiçao para a anthropologia do Brazil.
J. R. Peixoto. Novos estudos craneometricos sobre os Botocudos.
L. Netto. Investigaçoes sobre a archeologia Brazileira.

Revista do Observatorio, publicaçao mensal do imperial Observatorio do Rio de Janeiro. 1887. Anno II. N⁰. 11. 4⁰.

AUSTRALIË.

Journal and Proceedings of the royal Society of N. S. W. Sydney 1887. Vol. XX. 8°.

F. W. Edgeworth David. Geology of the vegetable creek tin-mining field, New England district, N. S. W. with maps and sections. Sydney 1887. 4°.

Annual Report of the department of mines, N. S. W. for the year 1886. Sydney 1887. fol.

F. Mc. Coy. Prodromus of the zoology of Victoria; or figures and descriptions of the living species of all classes of the Victorian indigenous animals. Melbourne 1887. Decade XV. roy. 8°.

AANGEKOCHT.

Oud-Holland. Nieuwe Bijdragen voor de Geschiedenis der Nederlandsche Kunst, Letterkunde, Nijverheid, enz. Amsterdam 1887. Jaarg. 5. Afl. 4. 4°.

De Navorscher. Amsterdam 1888. Nieuwe Serie. Jaarg. 21. N°. 1. 8°.

Oeuvres complètes de Bartolomeo Borghesi. Paris 1879—1884. Tome IX. Part 1—2. 4°.

La grande Encyclopédie. Inventaire raisonné des Sciences, des Lettres et des Arts. Paris 1887. Livr. 110—114. 4°.

Journal des Savants. Paris, Décembre 1887. 4⁰.

Bulletin des Sciences mathématiques. Paris 1888. 2e Série. Tome XII. Janvier. 8⁰.

Annales des Sciences naturelles. Paris 1887. 7e Série. Zoologie. Tome III. N⁰. 1—6. Botanie. Tome VI. N⁰. 2. 8⁰.

Annales de Chimie et de Physique. Paris 1888. 6e Série. Tome XIII. Janvier. 8⁰.

Monthly microscopical Journal. Transactions of the royal microscopical Society. London 1869—1877. Vol. I—XVIII. 8⁰.

Journal of the royal microscopical Society. London 1878—1879. Vol. I—II. 8⁰.

The London, Edinburgh, and Dublin philosophical Magazine and Journal of Science. London 1888. 5th Series. Vol. XXV. N⁰. 152. 8⁰.

Annals and Magazine of natural History. Londen 1888. 6th Series. Vol. I. N⁰. 1. 8⁰.

Journal of Anatomy and Physiology normal and pathological. London 1888. Vol. XXII. Part 2. 8⁰.

The zoological Record for 1886. London 1887. 8⁰.

Annals of Botany. Oxford 1887. Vol. I. N⁰. 2. 8⁰.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1887. N⁰. 25. 8⁰.

Astronomische Nachrichten. 1887. N⁰. 2817—2823. 4⁰.

Veröffentlichungen des kais. Gesundheitsamtes. Berlin 1887. Jahrg. XI. N°. 51—52. Jahrg. XII. N°. 1—3. 4°.

Berichte der deutschen botanischen Gesellschaft. Berlin 1887. Band V. (General Versammlungs-Heft). 8°.

Archiv für Naturgeschichte. Berlin 1887. Jahrg. 53. Band I. Heft 2. Band II. Heft 2. 8°.

A. Boetticher. Die Akropolis von Athen. Berlin 1888. roy. 8°.

Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1888. Neue Folge. Band XXXIII. Heft 1. Beiblätter. Band XI. Stück 11—12. 8°.

Zeitschrift für physikalische Chemie. Leipzig 1887. Band I. Heft 11—12. 8°.

Der zoologische Garten. Frankfurt a. M. 1887. Jahrg. 28. N°. 11. 8°.

Dingler's polytechnisches Journal. Stuttgart 1887—1888. Band CCLXVI. Heft 11—13. Band CCLXVII. Heft 1—3. 8°.

Bibliothèque universelle et revue Suisse. Lausanne 1887. 3e Période. Tome XXXVI. N°. 107—108. 8°.

Archives des Sciences physiques et naturelles. Genève 1887. 3e Période. Tome XVIII. N°. 12. 8°.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAAND FEBRUARI 1888.

NEDERLAND.

Catalogus van de Bibliotheek der vereenigde doopsgezinde Gemeente te Amsterdam. 1888. Deel. II. 2de en 3de Afdeeling. roy. 8^{0}.

De Volksvlijt, tijdschrift voor nijverheid, landbouw, handel en scheepvaart. Amsterdam 1887. N^{0}. 5—8. 8^{0}.

N. Quint. De wervelbeweging. Amsterdam 1888. Academisch proefschrift. 8^{0}.

Tijdschrift uitgegeven door de Nederlandsche Maatschappij ter bevordering van Nijverheid. Haarlem 1888. 4^{e} Reeks. Deel XII. Afl. 1. 8^{0}.

B. J. Stokvis. Voordrachten over Homoeopathie, gehouden aan de Amsterdamsche Universiteit. Haarlem 1888. 8^{0}.

Recueil des travaux chimiques des Pays-Bas. Leide 1887. Tome VI. N^{0}. 1—7. 8^{0}.

Verslag aan den Koning van de bevindingen en handelingen van het geneeskundig Staatstoezicht in het jaar 1886. 's Gravenhage 1887. 4^{0}.

Graphische voorstelling van de sterfte van kinderen beneden het jaar in elke gemeente van Nederland in het vijfjarig tijdperk 1880—1885. Plano.

Tijdschrift van het koninklijk Instituut van Ingenieurs. 1887—1888. 's Gravenhage 1888. Afl. 2. 1ste Gedeelte. Afl. 3. 2de Gedeelte. 4^{0}.

Tijdschrift voor Entomologie, uitgegeven door de Nederlandsche entomologische Vereeniging. 's Gravenhage 1888. Deel XXXI. Afl. 1. 8°.

Archief voor Nederlandsche Kerkgeschiedenis, onder redactie van J. G. R. Acquoy en H. C. Rogge. 's Gravenhage 1885—1887. Deel I—II. 8°.

Bijdragen voor vaderlandsche Geschiedenis en Oudheidkunde. 's Gravenhage 1888. 3de Reeks. Deel IV. Afl. 2. 8°.

Algemeen Nederlandsch Familieblad. Tijdschrift voor geschiedenis, geslacht-, wapen-, zegelkunde, enz. 's Gravenhage 1888. Jaarg. 5. N°. 1. 4°.

Aanwinsten van het munt-, penning- en zegelkabinet van het Friesch Genootschap voor Geschiedenis en Oudheidkunde van 10 September 1886—10 October 1887. Leeuwarden z. j. 8°.

Verzamelingstabel der waterhoogten langs de kusten van de Noordzee, de Zuiderzee en de Nederlandsche rivieren, waargenomen in de maand September 1887. fol.

Verzamelingstabel der waterhoogten volgens de bladen der zelfregistreerende peilschalen, waargenomen in de maand September 1887. fol.

NEDERLANDSCH OOST-INDIË.

Tijdschrift voor nijverheid en landbouw in Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Nederlandsch-Indische Maatschappij van Nijverheid en Landbouw. Batavia 1888. Deel XXXVI. Afl. 1. 8°.

Dr. L. C. van der Burg. De geneesheer in Nederlandsch-Indië. Batavia 1887. Deel II. 8°.
(Uitgegeven door de Vereeniging tot bevordering der geneeskundige Wetenschappen in Nederlandsch-Indië.)

Schets-taalkaart van Sumatra, samengesteld door K. F. Holle en J. L. A. Brandes. 1887. Schaal 1 : 2000000.

BELGIË.

Bulletin de l'Académie royale de Médecine de Belgique. Bruxelles 1887. 4e Série. Tome I. N°. 11. Tome II. N°. 1. 8°.

Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège. Bruxelles 1888. 2e Série. Tome XIV. 8°.

F. de Potter en J. Broeckaert. Geschiedenis van de gemeenten der provincie Oost-Vlaanderen. Gent 1887. Deel XLI. 8°.

FRANKRIJK.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Paris 1888. Tome CVI. N°. 4—7. 4°.

Bulletin de l'Académie de Médecine. Paris 1888. 3e Série. Tome XIX. N°. 4—7. 8°.

Journal d'Hygiène. Paris 1888. 14e Année. Vol. XIII. N°. 593—596. 4°.

Revue internationale de l'Electricité et de ses applications. Paris 1885—1888. Tome I—V. Tome VI. N°. 49—50. roy. 8°.

GROOT-BRITTANNIË EN IERLAND.

Proceedings of the royal Society. London 1888. Vol. XLIII. N⁰. 261—262. 8⁰.

Monthly Notices of the royal astronomical Society. London 1888. Vol. XLVIII. N⁰. 3. 8⁰.

Proceedings of the royal geographical Society. London 1888. New Series. Vol. X. N⁰. 2. 8⁰.

Journal of the royal microscopical Society. London 1887. Part 6ª. 1888. Part 1. 8⁰.

Proceedings of the Cambridge philosophical Society. Cambridge 1887. Vol. VI. Part 3. 8⁰.

OOSTENRIJK-HONGARIJE.

W. Zsigmondy. Mittheilungen über die Bohrthermen zu Harkany, auf der Margaretheninsel nächst Ofen und zu Lippik, und den Bohrbrunnen zu Alcsuth. Pest 1873. 8⁰.

Die Kollectiv-Ausstellung ungarischer Kohlen auf der Wiener Weltausstellung 1873. Pest 1873. 8⁰.

Földtani Közlöny (Geologische Mittheilungen). Zeitschrift der ungarischen geologischen Gesellschaft. Budapest 1887. Kötet XVII. Füzet 7—12. 8⁰.

L. Petrik. Ueber ungarische Porcellanerden, mit besonderer Berücksichtigung der rhyolith-kaoline. Budapest 1887. 8⁰.

(Publicationen der kön. ungarischen geologischen Anstalt.)

DUITSCHLAND.

Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen im Jahre 1886, herausgegeben von dem kön. preussischen meteorologischen Institut. Berlin 1888. 4°.

A. Lissauer. Die prähistorischen Denkmäler der Provinz Westpreussen und der angrenzenden Gebiete. Leipzig 1887. 4°.
(Herausgegeben von der naturforschenden Gesellschaft zu Danzig.)

Abhandlungen herausgegeben von der Senckenbergischen naturforschenden Gesellschaft. Frankfurt a/M. 1887. Band XV. Heft 1. 4°.

Inhoud:

Th. Geyler und F. Kinkelin. Oberpliocän- Flora aus den Baugruben des Klärbeckens bei Niederrad und der Schleuse bei Höchst a. M.
H. B. Möschler. Beiträge zur Schmetterlings-Fauna der Goldküste.
F. Noll. Experimentelle Untersuchungen über das Wachstum der Zellmembran.

Chronik der königlichen Universität zu Greifswald für das Jahr vom 15 Mai 1886 bis 15 Mai 1887. Greifswald. 4°.

F. Susemihl. De Platonis Phaedro et Isocratis contra Sophistas oratione dissertatio cum appendice Aristotelica. Gryphiswaldiae 1887. 4°.

A. Kiessling. Coniectaneorum spicilegium. IV Gryphiswaldiae 1887. 4°.

E. Albrecht. Anatomische, histologische, physiologische Untersuchungen über die Muskulatur des Endocardium bei Warmblütern. Greifswald 1887.. 8°.

W. Arendt. Zur Casuistik der Nephrektomie. Greifswald 1887. 8⁰.

G. Bierbaum. Ein Fall von totaler Exstirpation der Scapula wegen eines Fibrosarcoms. Greifswald 1887. 8⁰.

P. Bodenstein. Beitrag zur Casuistik von Deckung grosser Defecte am Arm durch einen Bauchlappen. Greifswald 1887. 8⁰.

O. Böttcher. Ueber die Anwendung des Antipyrin mit besonderer Berücksichtigung des Gelenkrheumatismus. Greifswald 1887. 8⁰.

E. Cohnstädt. Ueber die osteoplastische Fussresection nach Mikulicz. Greifswald 1887. 8⁰.

W. Dommes. Radicaloperation einer Prostatahypertrophie complicirt mit suppurativer Cystitis. Greifswald 1887. 8⁰.

G. Dos. Zur Lehre vom Husten. Greifswald 1887. 8⁰.

P. Elbusch. Ueber entzündliche Epiphysenlösung. Greifswald 1887. 8⁰.

O. Elfeldt. Zur Casuistik der Schussverletzungen der Wirbelsäule. Greifswald 1887. 8⁰.

K. Faber. Ein Fall von schwerer allgemeiner Syphilis mit syphilitischer Knie-Gelenkentzündung. Greifswald 1887. 8⁰.

E. Fähndrich. Beitrag zur operativen Behandlung des Carcinoma penis. Greifswald 1887. 8⁰.

L. Flichter. Zur Pathologie und Therapie des Carcinoma Uteri nebst casuistischen Beiträgen. Greifswald 1887. 8⁰.

E. Frank. Zur Statistik und Behandlung der Querbrüche der Patella. Greifswald 1887. 8⁰.

F. Frank. Beitrag zur Kenntnis der typischen Bauchdecken Fibrome. Greifswald 1887. 8⁰.

K. Goedicke. Ein Fall von schwerer Urogenitaltuberkulose mit Tendenz zur Heilung. Greifswald 1887. 8⁰.

O. Granow. Zur Wirkung des Colchicin. Greifswald 1887. 8⁰.

F. von Grumbkow. Beitrag zur Aetiologie der Peritonitis. Greifswald 1887. 8⁰.

H. Hellenbroich. Casuistische Beiträge zur Chirurgie des Magens. Greifswald 1887. 8⁰.

O. Hildebrandt. Die vaginale Total-Exstirpation des carcinomatösen Uterus mit Anwendung der Müller'schen Zangen nebst casuistischen Beiträgen. Greifswald 1887. 8⁰.

J. Hoppe. Ueber den Streckapparat des Unterschenkels und die Behandlung der Querbrüche der Kniescheibe. Greifswald 1887. 8⁰.

A. Jaworowicz. Ein Fall von Carcinoma Omenti majoris. Greifswald 1887. 8⁰.

Th. Jüngst. Experimentelle Untersuchungen über Sedum acre. Greifswald 1887. 8⁰.

R. Kessler. Einige Fälle von Echinococcus hepatis mit Berücksichtigung der Aetiologie und Therapie. Greifswald 1887. 8⁰.

F. Köppler. Ueber das Antifebrin. Greifswald 1887. 8⁰.

F. Kozuszkiewicz. Ueber Pseudoleukaemie. Greifswald 1887. 8⁰.

A. Kruse. Ueber die Beziehungen des kohlensauren Ammoniaks zur Uraemie. Greifswald 1887. 8⁰.

J. Lemkowski. Beitrag zur Behandlung primärer perinephritischer Abscesse. Greifswald 1887. 8⁰.

M. Lobert. Ein Fall von Thrombose der Pfortader. Greifswald 1887. 8⁰.

R. Macks. Ueber den Zusammenhang zwischen psychischen Störungen und Abnahme des Körpergewichts. Greifswald 1887. 8⁰.

J. Moerlin. Ueber indirecte Sternalfracturen. Greifswald 1887. 8⁰.

M. Niesel. Ueber die Wirkung fortgesetzter kleiner Dosen von Schwefel beim gesunden Menschen. Greifswald 1887. 8⁰.

O. Olbrich. Zwei Fälle einer Complication von Carcinoma uteri mit Graviditaet. Greifswald 1887. 8⁰.

L. Pernice. Ueber die Wirkung localer Blutentziehungen auf acute Hautentzündungen. Greifswald 1887. 8⁰.

J. Pomorski. Ein Fall von Rankenneurom der Intercostalnerven, Fibroma molluscum und Neurofibroma. Greifswald 1887. 8⁰.

A. Proske. Ein Fall von Dermoidcyste des linken Ovariums. Greifswald 1887. 8⁰.

S. Rahmer. Der gegenwärtige Stand der Lehre von den Lungenerkrankungen und von der Todesursache nach

doppelseitiger Vagusdurchschneidung am Halse und experimentelle Beiträge zu dieser Frage. Greifswald 1887. 8⁰.

W. La Roche. Experimentelle Beiträge zur Eisenwirkung. Greifswald 1887. 8⁰.

A. Sauer. Ein Beitrag zur Lehre von der Perspiratio insensibilis. Greifswald 1887. 8⁰.

C. Schinke. Zur Casuistik der Leberkrankheiten. Greifswald 1887. 8⁰.

O. Schirmer. Experimentelle Studie über reine Linsencontusionen. Greifswald 1887. 8⁰.

C. Schleich. Ueber einen Fall von pulsirenden Knochensarcom (Sarcoma aneurysmaticum) des Oberschenkels mit Spontanfractur des Femur und des Humerus nebst Bemerkungen über die Aetiologie einiger Formen von Spontanfracturen. Greifswald 1887. 8⁰.

O. Schömann. Ueber Leukaemie in verscheidenen Lebensaltern mit besonderer Berücksichtigung eines Falles im 75sten Jahre. Greifswald 1887. 8⁰.

M. Schröder. Die Mitchell Playfair'sche Mastkur in den Irren-Anstalten. Greifswald 1887. 8⁰.

E. Seyler. Zur Casuistik der Hodensarcome. Greifswald 1887. 8⁰.

E. Stein. Ueber die Wirkung fortgesetzter kleiner Dosen von Kampher beim gesunden Menschen. Greifswald 1887. 8⁰.

G. Thümmel. Ueber einen Fall von allgemeiner Carcinose mit besonderer Berücksichtigung des klinischen Verlaufes. Greifswald 1887. 8⁰.

V. Ullrich. Zur Casuistik der Unterbindungen des Truncus anonymus. Greifswald 1887. 8⁰.

M. Weinert. Zur Casuistik der Leukaemie bei Frauen. Greifswald 1887. 8⁰.

S. Wendland. Ueber die Total-Exstirpation des carcinomatosen Uterus. Greifswald 1887. 8⁰.

O. Westphal. Ueber einen in akute Leukaemie übergehenden Fall von Pseudoleukaemie. Greifswald 1887. 8⁰.

H. Zielstorff. Ein Fall von Unterleibscyste (Pancreascyste?). Greifswald 1887. 8⁰.

W. Jaworowicz. Ueber die Hydrazinverbindungen einiger Amidobenzolsulfonsäuren. Greifswald 1887. 8⁰.

K. F. Ketel. Anatomische Untersuchungen über die Gattung Lemanea. Greifswald 1887. 8⁰.

W. Koch. Die conforme Abbildung des hyperbolischen Paraboloids auf einer Ebene. Greifswald 1887. 8⁰.

F. Pasche. Ueber Toluol- und Toluidendisulfosäuren und über die Constitution der sechs isomeren Toluoldisulfosäuren. Greifswald 1887. 8⁰.

A. Brunk. De excerptis ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΤΩΝ ΗΡΩΩΝ ΚΑΘ' ΟΜΗΡΟΝ ΒΙΟΥ ab Athenaeo Servatis. Gryphiswaldiae 1887. 8⁰.

E. Busch. Laut- und Formenlehre der anglonormannischen Sprache des XIV Jahrhunderts. Greifswald 1887. 8⁰.

C. Franke. De nominum propriorum epithetis Homericis. Gryphiswaldiae 1887. 8°.

Ph. Frucht. Metrisches und sprachliches zu Cynewulfs Elene, Juliana und Crist. Greifswald 1887. 8°.

L. Gieschen. Die charakteristischen Unterschiede der einzelnen Schreiber im Hatton MS. der Cura pastoralis. Greifswald 1887. 8°.

A. Haase. Die Schlacht bei Nürnberg vom 19 Juni 1502. Greifswald 1887. 8°.

G. Klinke. Quaestiones Aeschineae criticae. Lipsiae 1887. 8°.

F. Martens. Geschichte der französischen Synonymik. Teil I. Die Anfänge der französischen Synonymik. Stralsund 1887. 8°.

W. Meus. Zur Legation des Bischofs Hugo von Die unter Gregor VII. Greifswald 1887. 8°.

R. Pfennig. De librorum quos scripsit Seneca de ira compositione et origine. Gryphiae 1887. 8°.

H. Philipsen. Ueber Wesen und Gebrauch des bestimmten Artikels in der Prosa König Alfreds auf Grund des Orosius [hs. L.] und der Cura pastoralis. Greifswald 1887. 8°.

O. Schmidt. Rousseau und Byron. Ein Beitrag zur vergleichenden Litteraturgeschichte. Greifswald 1887. 8°.

G. Schulze. Quaestionum Homericarum specimen. Gryphiswaldiae 1887. 8°.

G. Steinhausen. De legum XII tabularum patria. Gryphiswaldiae 1887. 8°.

O. Wenner. Ueber zwei Denkschriften Radetzkys aus dem Frühjahr 1813. Greifswald 1887. 8°.

Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1888. Jahrg. 11. N°. 271—272. 8°.

Führer durch das Museum Godeffroy. Hamburg 1882. 8°.

ZWITSERLAND.

Abhandlungen der schweizerischen paläontologischen Gesellschaft. Basel 1887. Vol. XIV. 4°.

Inhoud:

H. Haas. Brachiopodes rhétins et jurassiques des Alpes Vaudoises 2e. partie.
Koby. Monographie des Polypiers jurassiques de la Suisse. 7e partie.
Th. Studer. Ueber den Steinkerrn des Gehirnraumes einer Sirenoide.
G. Maillard. Considérations sur les fossiles décrits comme Algues.
P. de Loriol et Bourgeat. Etudes sur les Mollusques des couches coralligènes de Valfin.

ITALIË.

Atti della reale Accademia dei Lincei. Roma 1887. Serie 4a. Rendiconti. Vol. III. Fasc. 8—9. 8°.

Atti della reale Accademia delle Scienze. Torino 1888. Vol. XXIII. Disp. 2—3. 8°.

Bollettino delle pubblicazioni Italiane. Firenze 1888. N°. 50—51. 8°.

DENEMARKEN.

Mémoires de la Société royale des Antiquaires du Nord. Copenhague 1887. Nouvelle Série. Année 1887. 8°.

RUSLAND.

Beobachtungen der russischen Polarstation an der Lenamündung. 1887. Theil II. Lief. 2. Meteorologische Beobachtungen. 4⁰.

Description systématique des collections du Musée ethnographique Daschkow. Moscou 1887. Livr. 1. 8⁰. (In het Russisch.)

AZIË.

Report on the administration of the meteorological Department of the Government of India in 1886—87. fol.

Indian meteorological Memoirs. Calcutta 1887. Vol. III. Part 2. fol.

Meteorological Observations recorded at six stations in India, August—September 1887.

AFRIKA.

Bulletin de la Société khédiviale de Géographie. Le Caire 1887. 2e Série. N⁰. 12. 8⁰.

AMERIKA.

Report of the Commissioner of Education for the year 1885—86. Washington 1887. 8⁰.

Report of the Surgeon-General of the Army to the Secretary of War for the year ending June 30, 1887. Washington 1887. 8⁰.

American chemical Journal, edited by IRA REMSEN. Baltimore 1888. Vol. X. N⁰. 1. 8⁰.

Annals of the astronomical Observatory of Harvard College. Cambridge 1888. Vol. XIII. Part 2. 4⁰.

Inhoud:

E. C. Pickering. Zone observations made with the transit Wedge-Photometer.

52d Annual Report of the Director of the astronomical Observatory of Harvard College. Cambridge 1887. 8⁰.

Journal of the American medical Associaton. Chicago 1888. Vol. X. N⁰. 2—5. 4⁰.

J. Macoun. Catalogue of Canadian plants. Part 3. Apetalae. Montreal 1886. 8⁰.
(Geological and natural History Survey of Canada.)

Boletin de Estadistica del estado de Puebla. Puebla de Zaragoza 1887. Tomo I. N⁰. 21—26. fol.

Revista do Observatorio, publicaçao mensal do imperial Observatorio do Rio de Janeiro. 1887. Anno 2. N⁰. 12. 4⁰.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. Buenos Aires 1887. Tomo XXIV. Entr. 2—6. 8⁰.

AUSTRALIË.

R. von Lendenfeld. Descriptive Catalogue of the Medusae of the Australian Seas. Sydney 1887. 8⁰.

AANGEKOCHT.

De Navorscher. Amsterdam 1888. Nieuwe Serie. Jaarg. 21. N°. 2. 8°.

La grande Encyclopédie. Inventaire raisonné des Sciences, des Lettres et des Arts. Paris 1887. Livr. 115—118. 4°.

Journal des Savants. Paris, Janvier 1888. 4°.

Annales des Sciences naturelles. Paris 1887. 7e Série. Zoologie. Tome IV. N°. 1—3. 8°.

Annales de Chimie et de Physique. Paris 1888. 6e Série. Tome XIII. Février. 8°.

The London, Edinburgh, and Dublin philosophical Magazine and Journal of Science. London 1888. 5th Series. Vol. XXV. N°. 153. 8°.

Annals and Magazine of natural History. London 1888. 6th Series. Vol. I. N°. 2. 8°.

L. Stephen. Dictionary of national Biography. London 1888. Vol. XIII. (Craik-Damer). 8°.

Astronomische Nachrichten. N°. 2824—2826. 4°.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1887. N°. 26. 1888. N°. 2—3. 8°.

Veröffentlichungen des kais. Gesundheitsamtes. Berlin 1888. Jahrg. 12. N°. 4—7. 4°.

Berichte der deutschen botanischen Gesellschaft. Berlin 1887. Jahrg. 5. Heft 10. 8°.

Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1888. Neue Folge. Band XXXIII. Heft 2. Beiblätter. Band XII. Stück 1. 8⁰.

Zeitschrift für physikalische Chemie. Leipzig 1888. Band II. Heft 1. 8⁰.

Journal für Ornithologie. Leipzig 1887. Jahrg. 35. Heft 3. 8⁰.

Der zoologische Garten. Frankfurt a.M. 1887. Jahrg. 28. N⁰. 12. Jahrg. 29. N⁰. 1. 8⁰.

Dingler's polytechnisches Journal. Stuttgart 1888. Band CCLXVII. Heft 4—7. 8⁰.

Archives des Sciences physiques et naturelles. Genève 1888. 3e Période. Tome XIX. N⁰. 1—2. 8⁰.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAAND MAART 1888.

N E D E R L A N D.

De Volksvlijt, tijdschrift voor nijverheid, landbouw, handel en scheepvaart. Amsterdam 1887. N⁰. 9—10. 8⁰.

Revue internationale scientifique et populaire des falsifications des denrées alimentaires. Amsterdam 1888. 1e Année. Livr. 4. 4⁰.

Tijdschrift uitgegeven door de Nederlandsche Maatschappij ter bevordering van Nijverheid. Haarlem 1888. 4e Reeks. Deel XII. Afl. 2. 8⁰.

Koloniaal Museum. Beschrijvende Catalogus tevens handleiding tot de kennis der voortbrengselen van de Nederlandsche overzeesche gewesten. Haarlem 1888. Deel V. 8⁰.

S. J. FOCKEMA ANDREAE. Bijdragen tot de Nederlandsche rechtsgeschiedenis. Haarlem 1888. 1e Bundel. 8⁰.

Onderzoek omtrent de afsluiting en droogmaking van de Zuiderzee, de Wadden en de Lauwerzee. — De afsluiting Noord-Holland — Wieringen — Friesland en de droogmaking van het gedeelte der Zuiderzee binnen die afsluiting. A. De afsluiting. 1. De invloed der afsluiting op de waterkeering der provinciën langs de Zuiderzee. Leiden. z. j. fol.

Jaarboek van de koninklijke Nederlandsche Zeemacht, 1886—1887. 's Gravenhage 1888. 8⁰.

Algemeen Nederlandsch Familieblad. Tijdschrift voor geschiedenis, geslacht-, wapen-, zegelkunde, enz. 's Gravenhage 1888. Jaarg. 5. N⁰. 2. 4⁰.

Berichten en Mededeelingen der Vereeniging voor Lijkverbranding. 's Gravenhage 1888. 13de Jaarg. N⁰. 1. 8⁰.

Annales de l'Ecole polytechnique de Delft. Leide 1888. Tome III. Livr. 4. 4⁰.

Inhoud:

J. CARDINAAL. Application des principes de la géométrie synthétique à la solution des problèmes de la géométrie descriptive.

CH. M. SCHOLS. Démonstration directe de la loi limite pour les erreurs dans le plan et dans l'espace.

29ste Jaarlijksch verslag door de hoofd-commissie aan de leden van de Vereeniging tot daarstelling van eene

algemeene openbare Bibliotheek en van een daaraan verbonden Leeskabinet te Rotterdam, medegedeeld in de algemeene Vergadering van 25 Februari 1888. 8°.

Werken van het historisch Genootschap. Utrecht 1888. Nieuwe Serie. N°. 46—50. 5 Dl. 8°.

Statistiek van het koninkrijk der Nederlanden. Nieuwe Serie. Staten van de in-, uit- en doorgevoerde voornaamste handelsartikelen gedurende de maanden Januari en Februari 1888. 's Gravenhage 1888. fol.

Verzamelingstabel der waterhoogten langs de kusten van de Noordzee, Zuiderzee en de Nederlandsche rivieren, waargenomen in de maand October 1887. fol.

Verzamelingstabel der waterhoogten volgens de bladen der zelfregistreerende peilschalen, waargenomen in de maand October 1887. fol.

NEDERLANDSCH OOST-INDIE.

Geneeskundig Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Vereeniging tot bevordering der geneeskundige Wetenschappen in Nederlandsch-Indië. Batavia 1888. Deel XXVII. Afl. 5. 8°.

Tijdschrift voor nijverheid en landbouw in Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Nederlandsch-Indische Maatschappij van Nijverheid en Landbouw. Batavia 1888. Deel XXXVI. Afl. 2. 8°.

G. J. P. J. Bolland. Schijn en wezen. Algemeene beschouwingen over de begrippen stof en kracht. Batavia 1887. 8°.
(Overgedrukt uit het Natuurkundig Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië. Deel XLVII.)

BELGIË.

Bulletin de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des beaux-Arts de Belgique. Bruxelles 1887. 3e Série. Tome XIV. N⁰. 12. Tome XV. N⁰. 1. 8⁰.

Bulletin de l'Académie royale de Médecine de Belgique. Bruxelles 1888. 4e Série. Tome II. N⁰. 2. 8⁰.

C. Ubaghs. Notice biographique du géologue Binkhorst tot den Binkhorst. 8⁰.

——— Quelques-considérations sur les dépots crétacés de Maestricht dans leurs connexions avec les couches dites Maestrichtiennes de Ciply. Bruxelles 1887. 8⁰.
(Extrait du Bulletin de la Société belge de Géologie, de Paléontologie et d'Hydrologie. Tome I).

——— Compte rendu général des séances et excursions de la Société belge de Géologie, de Paléontologie et d'Hydrologie. Bruxelles 1888. 8⁰.
(Extrait du Bulletin de la Société belge de Géologie, de Paléontologie et d'Hydrologie. Tome I).

FRANKRIJK.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Paris 1888. Tome CVI. N⁰. 8—12. 4⁰.

Bulletin de l'Académie de Médecine. Paris 1888. 3e Série. Tome XIX. N⁰. 8—12. 8⁰.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de la Société de Biologie. Paris 1888. 9e Série. Tome V. N⁰. 2—3, 5—9. 8⁰.

Bulletin de la Société mathématique de France. Paris 1887. Tome XVI. N°. 1. 8°.

Journal d'Hygiène. Paris 1888. 14e Année. Vol. XIII. N°. 599—601. 4°.

Revue internationale de l'Electricité et de ses applications. Paris 1888. 4e Année. Tome VI. N°. 52—54. roy. 8°.

L. Janmart de Brouillant. Histoire de Pierre de Marteau imprimeur à Cologne. (XVIIe et XVIIIe Siècles). Paris 1888. roy. 8°.

Bulletin de la Société Linnéenne de Normandie. Caen 1881. 3e Série. Vol. V—VI. 2 Dl. 8°.

GROOT-BRITTANNIË EN IERLAND.

Proceedings of the royal Society. London 1888. Vol. XLIII. N°. 263. 8°.

Memoirs of the royal astronomical Society. London 1888. Vol. XLIX. Part 1. 4°.

Inhoud:

J. L. E. Dreyer. A new general catalogue of nebulae and clusters of stars, being the catalogue of the late Sir John F. W. Herschel, revised, corrected, and enlarged.

Monthly Notices of the royal astronomical Society. London 1888. Vol. XLVIII. N°. 4. 8°.

Proceedings of the royal geographical Society. London 1888. New Series. Vol. X. N°. 3. 8°.

Transactions and Proceedings of the botanical Society. Edinburgh 1888. Vol. XVII. Part 1. 8°.

DUITSCHLAND.

Archiv für pathologische Anatomie und Physiologie und für klinische Medicin. Berlin 1888. Band CXI. Heft 1—2. 8⁰.

Schriften des naturwissenschaftlichen Vereins für Schleswig-Holstein. Kiel 1888. Band VII. Heft 1. 8⁰.

Verhandlungen des naturhistorischen Vereines der preussischen Rheinlande. Bonn 1887. Jahrg. 44. 2te Hälfte. 8⁰.

R. Hoppe. Grunert's Archiv der Mathematik und Physik. Leipzig 1888. 2te Reihe. Teil VI. Heft 2. 8⁰.

Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1888. Jahrg. XI. N⁰. 273—275. 8⁰.

Zeitschrift für Naturwissenschaften, herausgegeben im Auftrage des naturwissenschaftlichen Vereins für Sachsen und Thüringen. Halle a/S. 1887. 4^{e} Folge. Band VI. Heft 5—6. 8⁰.

Petermann's Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt. Gotha 1888. Band XXXIV. Heft 2—3. 4⁰.

Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Gesellschaft. Würzburg 1887. Jahrg. 1887. 8⁰.

29ster Bericht des naturwissenschaftlichen Vereins für Schwaben und Neuburg. Augsburg 1887. 8⁰.

Sitzungsberichte der Gesellschaft zur Beförderung der gesammten Naturwissenschaften. Marburg 1887. Jahrg. 1886 und 1887. 2 Dl. 8⁰.

XLIII—XLVIer Jahresbericht der Pollichia, eines naturwissenschaftlichen Vereins der Rheinpfalz. Dürkheim 1888. 8°.

ITALIË.

Atti della reale Accademia dei Lincei. Roma 1887. Serie 4ª. Rendiconti. Vol. III. Fasc. 10—11. 4°.

Annuario della reale Accademia dei Lincei. Roma 1888. 8°.

Bollettino delle pubblicazioni Italiane. Firenze 1888. N°. 52—53. 8°.

Atti della reale Accademia delle Scienze. Torino 1888. Vol. XXIII. Disp. 4—5. 8°.

Annales de Géologie et de Paléontologie, publiées sous la direction de A. de Gregorio. Palerme 1886. Livr. 1—5. 4°.

ZWEDEN EN NOORWEGEN.

Acta Universitatis Lundensis. Lund 1887—1888. Tomus XXIII. 4°.

Inhoud:

J. Ask. Om formaliteter vid kontrakt enligt romersk och svensk förmögenhetsrätt.
J. Paulson. Studia Hesiodea 1.
F. A. Wulff. Poèmes inédites de Juan de la Cueva.
J. Thyren. Verldsfreden under Napoleon.
A. Rosen. Solution d'un problème d'électrostatique.
S. G. Agardh. Till Algernas Systematik.

RUMENIË.

Analele Academiei Romane. Bucuresci 1888. Seria II Tomulu VIII. Sect. 2. Tomulu IX. 4°.

J. Bianu. Psaltirea in versuri intocmita de Dosofteiu, mitropolitul Moldovei, 1671—1686. Bucuresci 1887. 8⁰.

V. A. Urechia. Miron Costin, opere complete. Bucuresci 1888. Tomul II. 8⁰.

AZIË.

Meteorological Observations recorded at six stations in India. October-November 1887. 4⁰.

E. C. Cotes and C. Swinhoe. A catalogue of the moths of India. Calcutta 1887. Part 2. Bombyces. 8⁰.

Journal of the China branch of the royal Asiatic Society. Shanghai 1887. New Series. Vol. XXII. N⁰. 1—2. 8⁰.

Imperial University of Japan. Calendar for the year 1887—1888. Tokyo 1888. 8⁰.

AMERIKA.

Proceedings of the Academy of natural Sciences. Philadelphia 1887. Part 3. 8⁰.

Journal of the American medical Association. Chicago 1888. Vol. X. N⁰. 6—11. 4⁰.

Johns Hopkins University Circulars. Baltimore 1888. Vol. VII. N⁰. 63. 4⁰.

American Journal of Philology, edited by B. L. Gildersleeve. Baltimore 1887. Vol. VIII. N⁰. 4. 8⁰.

Johns Hopkins University Studies in historical and political Science. Baltimore 1887. 5th Series. N⁰. XII. 8⁰.

Proceedings of the Elliott Society of Science and Arts. Charlestown 1887. Vol. II. N°. 16—20. 8°.

Proceedings of the trustees of the Newberry Library. Chicago 1888. 8°.

Boletin de Estadistica del Estado de Puebla. Puebla de Zaragosa 1888. Tomo I. N°. 27—29. fol.

Revista do Observatorio, publicaçao mensal do imperial Observatorio do Rio de Janeiro. 1888. Anno III. N°. 1—2. 4°.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. Buenos-Aires 1888. Tomo XXV. Entr. 1—2. 8°.

AUSTRALIË.

F. Mc.Coy. Prodromus of the zoology of Victoria; or figures and descriptions of the living species of all classes of the Victorian indigenous animals. Melbourne 1887. Decade I—XIV. 4°.

F. von Mueller. Iconography of Australian species of Acacia and cognate genera. Melbourne 1887. Decade I—VIII. 4°.

AANGEKOCHT.

La grande Encyclopédie. Inventaire raisonné des Sciences, des Lettres et des Arts. Paris 1888. Livr. 119—123. 4°.

Journal des Savants. Paris, Février 1888. 4°.

Annales des Sciences naturelles. Paris 1887. 7e Série. Zoologie. Tome IV. N^0. 4—6. 8^0.

Archives de Zoologie expérimentale et générale. Paris 1887. 2e Série. Tome V. N^0. 3. 8^0.

Bulletin des Sciences mathématiques. 2e Série. Tome XII. Février-Mars 1888. 8^0.

Annales de Chimie et de Physique. Paris 1888. 6e Série. Tome XIII. Mars. 8^0.

The London, Edinburgh, and Dublin philosophical Magazine and Journal of Science. London 1888. 5th Series. Vol. XXV. N^0. 154. 8^0.

Annals and Magazine of natural History. London 1888. 6th Series. Vol. I. N^0. 3. 8^0.

Astronomische Nachrichten. N^0. 2827—2831. 4^0.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1888. N^0. 4—5. 8^0.

Veröffentlichungen des kais. Gesundheitsamtes. Berlin 1888. Jahrg. XII. N^0. 8—12. 4^0.

Beiträge zur Beurtheilung des Nutzens der Schutzpockenimpfung nebst Mittheilungen über Maszregeln zur Beschaffung untadeliger Thierlymphe. Berlin 1888. 8^0.

Corpus inscriptionum latinarum. Berolini 1888. Vol. XI. Pars 1. fol.

Berichte der deutschen botanischen Gesellschaft. Berlin 1888. Jahrg. 6. Heft 1. 8^0.

Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1888. Neue Folge. Band XXXIII. Heft 3—4. Beiblätter. Band XII. St. 2—3. 8^0.

Journal für Ornithologie. Leipzig 1887. 4e Folge. Band XV. Heft 4. 8⁰.

Flora, oder allgemeine botanische Zeitung. Regensburg 1886—1888. Neue Reihe. Jahrg. 44, 45, 46 N⁰. 1—9. 8⁰.

Dingler's polytechnisches Journal. Stuttgart 1888. Band 267. N⁰. 8—12. 8⁰.

Bibliothèque universelle et revue Suisse. Lausanne 1888. 3e Période. Tome XXXVII. N⁰. 109. 8⁰.

Archives des Sciences physiques et naturelles. Genève 1888. 3e Période. Tome XIX. N⁰. 3. 8⁰.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

Afdeeling NATUURKUNDE.

DERDE REEKS.

ZESDE DEEL.



AMSTERDAM.
JOHANNES MÜLLER.
1889.

GEDRUKT BIJ DE ROEVER KRÖBER-BAKELS.

INHOUD

VAN HET

ZESDE DEEL

DER

DERDE REEKS.

PROCESSEN-VERBAAL

DER

GEWONE VERGADERINGEN.

VERSLAGEN.

MEDEDEELINGEN.

VERBETERING.

Pag. 221 reg. 9 v. o. *staat:* weers componente

Hiervoor te *lezen:* westelijke componente

RAPPORT

OVER DE

VERHANDELING VAN Dr. J. DE VRIES.

„OVER VLAKKE POLYEDRALE CONFIGURATIES".

ERRATUM.

Pag. 435 reg. 21 staat: *M. subulatus.*

lees: *M. euryacanthus.*

denzelfden schrijver aansluit. Wij willen daaraan voldoen, hoezeer wij het niet mogelijk achten dit te volbrengen dan door het aanhalen van verkregen formulen en stellingen, die wel verstaanbaar kunnen worden, wanneer zij gelezen worden, maar bij het hooren zeker zeer raadselachtig zullen blijven. Wij zullen ons echter tot het voornaamste uit den overvloedigen, belangrijken oogst beperken.

Wanneer men een volledigen ruimte-n-hoek door een willekeurig vlak snijdt, ontstaan er $\binom{n}{2}$ snijpunten met de ribben en $\binom{n}{3}$ doorsneden met de vlakken. Deze vormen eene regelmatige configuratie $\left(\binom{n}{2}_{n-2}, \binom{n}{3}_{3}\right) = \pi_n$, die *polyedrale configuratie* heet. Wanneer i, k, l, getallen voorstellen van 1 tot n, dan komt elk punt ik voor in $2\binom{n-2}{2}$

elke lijn $i\,k\,l$ in $3\,(n - 3)$ conf. driehoeken, die dus ten getale van $\frac{1}{6}\,n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)$ in de configuratie voorkomen.

De restfiguren van het punt 12 bestaat uit de punten $i\,k$, en de lijnen $i\,k\,l$, voor $i = 3$ tot n, $k = 4$ tot n, $l = 5$ tot n: zij is dus eene π_{n-2}. Het punt 12 is het collineatie-centrum, de lijnen van de π_{n-2} zijn de collineatie-assen voor de paren driehoeken ($1\,i$, $1\,k$, $1\,l$) en ($2\,i$, $2\,k$, $2\,l$).

Met aanhaling van een opstel »Ueber gewisse ebene Configurationen", door schrijver in de *Acta Mathematica*, Tom. 12 geplaatst, bewijst hij, dat elke π_6 uit twee drietallen volledige zeshoeken bestaat, maar door een zoodanig drietal volkomen bepaald is, waarbij de twee lijnen, $i\,k\,l$, $j\,m\,n$, die ieder de gemeenschappelijke zijde van een der beide bijeen behoorende drietallen vierzijden zijn, den naam van *geassocieerde lijnen* dragen.

Eene π_n is evenzoo bepaald door $n - 3$ volledige vierzijden, die drie collineaire hoekpunten gemeen hebben. De geassocieerde lijnen van eene zelfde lijn van π_n ten aanzien van de verschillende π_6, waartoe deze lijn behoort, vormen eene π_{n-3}. De π_n kan gesplitst worden in eene π_{n-1} en eene conf. $\left((n-1)_{n-2},\ \binom{n-1}{2}_3\right)$, en dat wel op n verschillende wijzen.

Eene π_{2n} bevat groepen van n onderling gescheiden punten, waarvan elk paar tot eene π_4 behoort; men kan dus eene π_{2n} beschouwen als het zamenstel van eene conf. $\left(4\binom{n}{2}_{2n-4},\ 8\binom{n}{3}_3\right)$ met eene groep van $\binom{n}{2}$ conf. π_4; en dit wel op $1^{n\,2}$ wijzen.

Wanneer men in eene π_n eene uit gescheiden lijnen gevormde groep kan maken, zoodat hare afscheiding tot eene nieuwe conf. voert, dan heet zulk eene groep, *hoofd-veelzijde*, en deze figuur speelt in het vervolg een groote rol. Zij kan eerst voorkomen, als $n \geqq 7$ is, en wel voor $n = 6\,m + 1$ of $= 6\,m + 3$. Zulk eene hoofd-veel-zijde

bestaat dus uit $\frac{1}{6} n(n-1)$ conf. lijnen; en de π_n bestaat behalve haar uit een conf. $\left(\binom{n}{2}_{n-3}, \frac{1}{6} n(n-1)(n-3)_3\right)$.

Had de schrijver in het eerste gedeelte van zijn opstel reeds π_5, π_6 en π_7 beschouwd, thans in § 5 gaat hij over tot de discussie der π_9. Elke conf. lijn komt daar voor in 2160 hoofd-twaalf-zijden; in de conf. komen 15120 groepen voor van twaalf onderling gescheiden lijnen. Zondert men één hoofd-twaalf-zijde af, dan ontstaat er de conf. $(36_6, 72_3)$; laat men eene tweede weg, die met de eerste eene lijn gemeen heeft, dan blijft er een conf. $(36_5, 60_3)$ over.

Bij eene π_{13} vindt hij hoofd-26-zijden met de notatie $(13_6, 26_3)$.

Bij de π_{15} komen hoofd-35-zijden voor met de notatie $(15_7, 35_3)$, en daarvan heeft elke lijn tot restfiguur eene $(12_4, 16_3)$ A (zie schrijvers opstel over vlakke configuraties); de hoofd-35-zijde kan herleid worden tot zeven hoofd-vijf-zijden, die geene lijn gemeen hebben.

Na de discussie der restfiguur eener π_7, en de afleiding van eenige eigenschappen, zondert schrijver uit eene π_{2n+1} de daarin begrepen π_n en $\frac{2}{3}(n+1)n(n-1)$ niet tot de π_n behoorende lijnen af, en verkrijgt alsdan de conf. $\left(\frac{3}{2} n(n+1)_n, \frac{1}{2} n^2(n+1)_3\right)$, gevormd door $n+1$ groepen van n punten $1\,i$, $2\,i$ tot $n\,i$, $(i = n+1, n+2$, tot $2n+1)$, met $\binom{n+1}{2}$ punten $i\,k$ (voor $i = n+1$ tot $2n+1$, $k = n+2$ tot $2n+1$), ten opzichte waarvan die groepen paarswijze perspectivisch liggen, en de $n\binom{n+1}{2}$ perspectiviteitsstralen. De genoemde conf. bevat n volkomene $(n+1)$-hoeken, dus $\frac{1}{6}(n+1)n^2(n-1)$ conf. driehoeken, die geen der perspectiviteits-centra bevatten.

Door discussie der congruentie $2^x \equiv \pm 1$ (mod. $2n+1$)

komt schrijver tot het aantal $(2\,n+1)$-hoeken, waaruit eene π_{2n+1} kan worden samengesteld, en wel voor $n=2$ tot $n=12$, met de daarbij behoorende kleinste waarde van x. Voor deze x bevat π_{2n+1} een aantal $2\,n!:2\,x$ conf. $(2n+1)x_3$, welke ieder uit x $(2\,n+1)$-hoeken zijn samengesteld. Voor $n=3$ komt elk punt der 21_3 in twee conf. driehoeken voor; voor $n>3$ bestaan er geen conf. driehoeken. Zulke conf. zonder conf. driehoeken zijn de

$$\left(\binom{3\,p}{p}_{\binom{2p-1}{p-2}},\ \left(\frac{(3\,p)!}{6\,(p\,!)^3}\right)_3\right).$$

Thans gaat schrijver over tot eene afzonderlijke behandeling der volledige vierzijde π_4, en voert een punt kl/i in, dat op eene lijn ikl met de punten ik, il en kl harmonisch gelegen is. Hij vindt dan, dat de zes punten ik en de twaalf punten ik/l met de zes lijnen lij, kl/i, kl/j en de twaalf lijnen $(ij,\ ik/l,\ jk/l)$ eene 18_3 samenstellen, waarvoor de zijden ikl der vierzijde zespuntige diagonalen zijn. Deze 18_3 bevat vier configuratiedriehoeken, en vijf hoofd-zeszijden: neemt men van deze laatste ééne weg, dan ontstaat de conf. $(18_2,\ 12_3)$. De lijnen der 18_3 komen drie aan drie in twaalf punten samen: worden deze twaalf nieuwe punten aan de figuur toegevoegd, dan ontstaat er eene conf. $(30_3,\ 18_5)$; en worden hierin de punten ik weggelaten, dan komt er eene conf. $(24_3,\ 18_4)$.

Eene andere 18_3 ontstaat er uit de zes punten ik der π_4, en de twaalf punten ikl, met de zes lijnen $(ij,\ kl/i,\ kl/j)$ en de twaalf lijnen $(ij,\ ik/l,\ jk/l)$. Deze 18_3 verschilt van de vorige alleen door het ontbreken der zespuntige diagonalen. De evenvermelde conf. $(24_3,\ 18_4)$ is het zamenstel van de beide $(12_3,\ 18_2)$, welke door afzondering van de punten ik uit de beide (18_3) ontstaat. Zij heeft acht conf. driehoeken, namelijk de beide stellen, die door schrijver A, B, C, D en A', B', C', D' worden genoemd, en verschilt dus in zamenstelling van de harmonische conf. $(24_3,\ 18_4)$, welke 24 conf. driehoeken bevat.

Deze beide 18_3 hebben de conf. lijnen en de zes conf. punten ik, dus eene hoofd-zes-zijde gemeen; te samen vormen zij de vermelde (30_3, 18_5). Elk punt ik ligt met de punten lil en lkl, en evenzeer met de punten mim en mkm op eene rechte lijn; deze twaalf nieuwe lijnen vormen, met de zes punten ik en de twaalf punten lil, eene conf. (18_2, 12_3) met vier conf. driehoeken, die schrijver A'', B'', C'', D'' noemt. Worden deze twaalf lijnen aan de tweede der beide zoo even beschouwde conf. 18_3 toegevoegd, dan ontstaat er eene conf. (18_5, 30_3). De punten ik en iki bepalen met de lijnen $ikli$ die de punten ik, lil, lkl bevat, en ik/lm, dat is (ik, lm/i, lm/k), eene 18_3 met vier conf. driehoeken, en die gelijksoortig is met de laatstgenoemde 18_3. Te samen behooren deze beide 18_3 tot eene conf. (18_5, 30_3), waaruit men, de hoofd-zes-zijde met de lijnen ik/lm afzonderende, eene conf. (18_4, 24_3) vormen kan.

De twaalf punten ij/k, welke elk punt der π_4 harmonisch scheiden van de beide paren punten, waarmede het collineair ligt, bepalen achttien lijnen, die zes aan zes door de drie diagonaalpunten der π_4 gaan. Deze achttien lijnen kunnen gerangschikt worden in drie zestallen, dat elk de twaalf punten ij/k bevat, en waarvan er een de hoofd-zes-zijde vormt, die de drie straks gevonden conf. 18_3 gemeen hebben. Evenzeer worden de twaalf punten ikk paarswijze verbonden door achttien lijnen, die zes aan zes door de diagonaalpunten der π_4 gaan, en waarvan er weder zes tot de genoemde hoofd-zes-zijde behooren.

De driehoeken A, B, C, D, en evenzeer de stellen driehoeken A', B', C', D' en A'', B'', C'', D'', liggen paarsgewijze perspectief ten opzichte van een der diagonaalpunten van de π_4 en van een der punten ik. De driehoeken A, A' en A'', en evenzeer de stellen driehoeken B, B', B'', C, C', C'', D, D', D'', hebben één der zijden van de π_4 tot collineatie-as; en daaruit volgt nog: wanneer drie driehoeken $a_1 b_1 c_1$, $a_2 b_2 c_2$, $a_3 b_3 c_3$ zoodanig in een driestraal $A\ B\ C$ beschreven zijn, dat de zijden A_1, A_2, A_3 in een punt a, de zijden B_1, B_2, B_3 in een punt b, en de zijden C_1, C_2, C_3 in een punt c samenkomen; dan vormen de twaalf punten en

twaalf lijnen eene conf. 18_3; de punten a, b, c komen elk in zes, de overige punten elk in vijf conf. driehoeken voor.

De π_5 bevat vijf volledige vierzijden: hare vijftien diagonaalpunten liggen twee aan twee in dertig lijnen ij/kl, die drie aan drie in de punten der π_5 samenkomen en vier aan vier door die diagonaalpunten gaan. Wanneer men de punten eener π_5 harmonisch scheidt van de met hen collineair gelegen conf. punten, verkrijgt men dertig punten; voegt men daarbij de vijftien diagonaalpunten der π_4, die in π_5 begrepen zijn, dan vormen deze met zestig niet tot π_5 behoorende lijnen eene conf. $(45_4, 60_3)$; zij heeft tot driepuntige diagonalen, die ieder door een punt der π_5 gaan, de dertig lijnen van vijftien hoofd-zes-zijden, behoorende bij vijf conf. 18_3: worden deze dertig lijnen in de conf. opgenomen, dan ontstaat er eene nieuwe conf. $(45_6, 90_3)$. In de eerste conf. vormen de 45 punten vijftien onderling gelijkwaardige drietallen. Dezelfde eigenschap bestaat ook bij de conf. $(45_4, 60_3)$, gevormd door de 45 nevenhoekpunten van een in eene kegelsnede beschreven zeshoek en de zestig Pascallijnen; deze conf. bevat vijftien zespuntige diagonalen, de vorige conf. $(45_4, 60_3)$ daarentegen dertig driepuntige. Bij deze Pascalconf. kan men nu de 45 diagonaalpunten van de vijftien in haar begrepen π_4, en de 180 punten h opnemen, die de conf. punten harmonisch scheiden van de met hen collineair gelegen paren van punten: er ontstaat dan, door toevoeging van 360 lijnen, de conf. $(270_4, 360_3)$: deze heeft zestig zespuntige diagonalen en negentig vierpuntige diagonalen. Ook nog op andere wijze kan men eene conf. $(270_4, 360_3)$ van dezelfde soort verkrijgen.

Langs denzelfden weg kan men nog meer samengestelde conf. uit het vroeger gevondene afleiden.

Wanneer men ten slotte dezelfde behandelingswijzen op de π_4 toepast, verkrijgen wij het volgende.

Door elk punt ik gaan $3\binom{n-2}{2}$ lijnen, die elk twee punten ik/l of twee diagonaalpunten bevatten; door elk punt ik/l gaan $4(n-3)$ lijnen, die ieder een punt ik of een diagonaalpunt en bovendien steeds een tweede punt ik/l

bevatten; door elk diagonaalpunt gaan acht lijnen, die elk een tweede diagonaalpunt met een punt ik, of wel twee punten ik/l bevatten. Men kan daaruit geen conf. samenstellen.

En ten slotte: behoort in eene conf. $(p_n, 2q_3)$ elke lijn tot twee vierzijden, dan vormen de $3q$ diagonaalpunten van de q in haar begrepen vierzijden, — de $6q$ punten h, — en $12q$ nieuwe lijnen een conf. $(9q_4, 12q_3)$; deze heeft $3q$ vierzijden, waarbij elk conf. punt tot twee, elke conf. lijn tot één dezer vierzijden behoort; de $9q$ punten dezer nieuwe conf., hare $36q$ punten h, en de $9q$ diagonaalpunten vormen met $72q$ nieuwe lijnen eene conf. $(54q_4, 72q_3)$.

Daar deze verhandeling e n wegens de merkwaardigheid der uitkomsten, e n wegens de behandeling de opname in uwe werken ten volle verdient, aarzelen wij geenszins u daartoe aan te raden.

Leiden en Hilversum,
November 1888.

D. BIERENS DE HAAN,
F. J. VAN DEN BERG.

OVER VLAKKE POLYEDRALE CONFIGURATIES.

DOOR

J. DE VRIES.



1. De $\binom{n}{2}$ snijpunten der ribben en de $\binom{n}{3}$ doorsneden der vlakken van een volledigen ruimte-n-hoek met een willekeurig vlak vormen eene regelmatige configuratie $\left(\binom{n}{2}_{n-2}, \binom{n}{3}_3\right)$*), welke door Jung †) onderzocht en met den naam van »polyedrale" configuratie bestempeld is. Worden de hoekpunten van den ruimte-n-hoek door de getallen 1 tot n, zijne ribben en vlakken achtereenvolgens door de combinaties der tweede en derde klasse dezer getallen aangeduid, dan ligt et voor de hand, deze notatie der ribben en vlakken ook te bezigen voor hunne doorgangen, dus voor de punten en lijnen der $\left(\binom{n}{2}_{n-2}, \binom{n}{3}_3\right)$; dan bevat de lijn $i\,k\,l$ dezer cf. de punten $i\,k$, $k\,l$, $i\,l$, terwijl het cf.-punt $i\,k$ alle cf.-lijnen draagt, waarvan de notatie de getallen i en k met een der overige $(n - 2)$ bevat. Elk punt dezer cf., welke ik door

*) De in dit opstel gebezigde terminologie is besproken in „Over vlakke configuraties" (*Versl. en Meded.* 3de reeks, deel V, bl. 105) en „Ueber gewisse ebene Configurationen" (*Acta Mathematica* 12).

†) Sopra una classe di configurazioni d'indice 3. (*Rendiconti di R. Ist. Lombardo,* Ser. 2, tomo XVIII).

het teeken π_n zal voorstellen*), komt voor in $2\binom{n-2}{2}$, elke lijn in $3(n-3)$ cf.-driehoeken; π_n heeft dus $4\binom{n}{4}$ driehoeken. De restfiguur van het punt 12 bestaat uit de punten $i\,k$ ($i=3$ tot n, $k=4$ tot n) en de lijnen $i\,k\,l$ ($i=3$ tot n, $k=4$ tot n, $l=5$ tot n); zij is dus eene π_{n-2}. Hare lijnen zijn de collineatieassen der paren van driehoeken ($1\,i$, $1\,k$, $1\,l$) en ($2\,i$, $2\,k$, $2\,l$), waarvoor 12 het collineatiecentrum is: de polyedrale configuraties behooren dus tot de groep $\left(\binom{m+n-1}{n}_n, \binom{m+n-1}{n-1}_m\right)$, welke door KANTOR †) is opgemerkt.

»Eene π_n is door twee perspectief gelegen $(n-2)$ — hoeken volkomen bepaald."

In mijn opstel »Ueber gewisse ebene Configurationen" heb ik aangetoond §), dat eene π_6 op tien wijzen kan beschouwd worden als het samenstel van twee drietallen van volledige vierzijden π_4, die zoodanig geplaatst zijn, dat de π_4 van elk drietal drie collineaire toppen gemeen hebben, terwijl hunne overige negen hoekpunten tot beide drietallen behooren. De lijnen $i\,k\,l$ en $j\,m\,n$, welke ieder de gemeenschappelijke zijde van een dier drietallen zijn, heb ik »geassocieerde" lijnen genoemd; wordt een van hen als gemeenschappelijke collineatieas van drie cf. driehoeken beschouwd, dan draagt de andere de overeenkomstige collineatiecentra; π_6 is dus door *een* drietal vierzijden bepaald.

In π_n behoort elke lijn tot $(n-3)$ volledige vierzijden, dus tot $\binom{n-3}{3}$ cf. π_6; de $\binom{n-3}{3}$, in ieder van deze π_6 met de beschouwde lijn geassocieerde, lijnen vormen eene π_{n-3}, die voor de lijn 123 uit de punten $i\,k$ ($i=4$ tot n,

*) Hier beteekent π dus eene vaste benaming in tegenstelling met de in den aanhef van het opstel in de *Acta Mathematica* voorkomende notatie p_π.

†) Ueber eine Gattung von Configurationen (*Sitz. Wiener Akad.* Bd. 80).

§) *Acta Math.* 12. bl. 70

$k = 5$ tot n) en de lijnen $i\,k\,l$ ($i = 4$ tot n, $k = 5$ tot n, $l = 6$ tot n) is samengesteld.

»Eene π_n is volkomen bepaald door (n—3) volledige vierzijden, welke drie collineaire toppen gemeen hebben".

De ($n-1$) punten $1\,i$ ($i = 2$ tot n) vormen met de $\binom{n-1}{2}$ lijnen $1\,i\,k$ ($i = 2$ tot n, $k = 3$ tot n) eenen volledigen (n—1) — hoek, waarvan elke zijde een punt der π_{n-1} bevat, welke door afscheiding van den (n—1)—hoek uit π_n ontstaat; deze splitsing der π_n in eene π_{n-1} en eene $\left((n-1)_{n-2}, \binom{n-1}{2}_2\right)$ kan blijkbaar op n verschillende wijzen uitgevoerd worden *).

2. Daar de punten $i\,k$ en $l\,m$ niet door eene lijn der cf. π_n verbonden zijn, bezit elke polyedrale cf. π_{2m} van even orde groepen van m onderling gescheiden punten. Elk paar punten van zulk eene groep vormt een paar overstaande toppen eener in de cf. begrepen π_4; immers $i\,k$ en $l\,m$ behooren tot de volledige vierzijde, welke uit den ruimtevierhoek $i\,k\,l\,m$ voortkomt. De $\binom{m}{2}$ cf. π_4, waartoe elke groep van m onderling gescheiden punten aanleiding geeft, hebben blijkbaar geene zijde gemeen; wordt zulk een »nevenveelhoek" †) met de zijden der overeenkomstige vierzijden afgezonderd, dan verliezen de overblijvende punten der π_{2m} ieder twee van de door hen gedragen cf. lijnen, vormen dus met de overblijvende lijnen eene nieuwe cf.

Worden b. v. van $\pi_8 \equiv (28_6, 56_3)$ de vier punten 12, 34, 56, 78 benevens de 24 lijnen

---

*) Voor π_5 (de cf. van DESARGUES) werd dit reeds door KANTOR opgemerkt. („Die Conf. $(3,3)_{10}$" *Wiener Sitz.* Bd. 84).

†) Deze benaming voor eene groep van gescheiden cf. punten, welke samen slechts met een gedeelte der cf. lijnen incident zijn, bezig ik in navolging van MARTINETTI, die in zijne verhandeling „Sopra alcune configurazioni piane" (*Ann. di Mat.* Ser. IIa, tomo XIV) groepen van gescheiden cf. lijnen door de uitdrukkingen *n-latero principale* en *n-latero non principale* onderscheidt, naar gelang de lijnen van zulk eene groep samen *alle* cf. punten of slechts een deel van hen dragen.

123	125	127	345	347	567
124	126	128	346	348	568
134	156	178	356	378	578
234	256	278	456	478	678

. . . . . . (I)

afgezonderd, dan vormen de overige 24 punten met de overige 32 lijnen eene $(24_4, 32_3)$. In deze nieuwe cf. behoort het punt 13 tot de vierzijden 1357, 1358, 1367 en 1368 *), terwijl de lijn 135 de gemeenschappelijke zijde van 1357 en 1358 is.

In eene π_{2m} behoort elk punt van eenen neven-m-hoek tot $(m-1)$ volledige vierzijden; elk der overige $\binom{2m}{2} - m = 4\binom{m}{2}$ punten is incident met $(2m-4)$ van de $\binom{2m}{3} - 4\binom{m}{2} = 8\binom{m}{3}$ niet tot die vierzijden behoorende lijnen der π_{2m}. Wordt de neven-m-hoek $12, 34, 56, \ldots, (2m-1)\,2m$ met de door zijne punten gedragen cf. lijnen uit π_{2m} verwijderd, dan komt het punt 13 in de nieuwe cf. voor in de $\binom{2m-4}{2} - (m-2) = 4\binom{m-2}{2}$ vierzijden $13\,k\,l$, waar k en l de getallen > 4 voorstellen, voor zoover zij geen tot den neven-m-hoek behoorende combinatie vormen. De nieuwe cf. bezit dus $16\binom{m}{4}$ vierzijden, en elke harer lijnen komt in $2\,(m-3)$ dezer π_4 voor.

Het aantal verschillende neven-m-hoeken der π_{2m} is blijkbaar gelijk aan het aantal wijzen, waarop men $2m$ elementen in m paren kan verdeelen.

»Elke π_{2m} kan op $(2m)!:(2^m\,.\,m!)$ verschillende wij-
»zen beschouwd worden als het samenstel van eene

---

*) Door het teeken *i k l m* duid ik de vierzijde aan, die door de lijnen *i k l*, *i k m*, *i l m*, *k l m* wordt begrensd.

» $\left(4\binom{m}{2}_{2m-4}, 8\binom{m}{3}_3\right)$ met eene groep van $\binom{m}{2}$ volledige » vierzijden".

3. In eene π_n is de lijn $i\,j\,k$ van elke lijn $i\,l\,m$ en van elke lijn $l\,m\,n$ gescheiden; π_4 bezit dus geene gescheiden lijnen, π_5 heeft paren van gescheiden lijnen, b. v. 123, 145; bij π_6 komen viertallen van zulke lijnen voor, b. v. 123, 145, 256, 346, welke samen twaalf cf. punten dragen, terwijl de overige drie (in dit geval 16, 24, 35) gescheiden liggen. Eerst bij π_7 doet zich het geval voor, dat eene uit onderling gescheiden lijnen bestaande groep *alle* punten der cf. bevat, zoodat hare afscheiding tot eene nieuwe cf. leidt; zulk eene uit m onderling gescheiden lijnen samengestelde groep noem ik, wederom in navolging van MARTINETTI (l. c.) eene ,,hoofd-m-zijde."

De $(21_5, 35_3)$, welke door het teeken π_7 wordt aangeduid bevat o. m. de volgende hoofdzevenzijde:

123, 145, 167, 246, 257, 347, 356 . . . . (a).

Worden deze zeven lijnen uit de π_7 verwijderd, dan ontstaat eene regelmatige $(21_4, 28_3)$, waarin elk punt tot acht, elke lijn tot zes cf. driehoeken behoort, of, zooals ik ter bekorting zal zeggen: eene cf. met » oktotrigonische" punten en met » hexatrigonische" lijnen.

In π_7 komt elke lijn $i\,k\,l$ voor in zes hoofdzevenzijden, die door onderlinge permutatie der getallen i, k, l in elkander overgaan; bij gevolg bevat π_7 dertig zoodanige groepen. Van de zes hoofdzevenzijden, waartoe de lijn 124 behoort, hebben alleen de beide volgende geene lijn met de groep (a) gemeen.

124, 136, 157, 237, 256, 345, 467 . . . . (b)
124, 137, 156, 235, 267, 346, 457 . . . . (c).

Wordt eene dezer beide groepen tegelijk met (a) weggelaten, dan vormen de overige 21 lijnen der π_7 met hare 21 punten eene regelmatige 21_3, waarop ik in § 7 zal terugkomen. Elke hoofdzevenzijde kan op deze wijze met acht

andere samengesteld worden tot acht verschillende $(21_2, 14_3)$; immers elke der 28 lijnen, die niet in eene bepaalde hoofdzevenzijde voorkomen, geeft aanleiding tot twee paren van groepen, die geen lijn gemeen hebben; daar op deze wijze elk paar zeven maal in rekening wordt gebracht, bedraagt het aantal paren $28 \times 2 : 7 = 8$. De 30 verschillende hoofdzevenzijden leveren derhalve $30 \times 8 : 2 = 120$ cf. $(21_2, 14_3)$, dus evenzoovele cf. 21_3.

4. Eene π_n zal slechts dan hoofdveelzijden bezitten, wanneer het aantal cf. punten $\binom{n}{2}$ door 3 deelbaar, dus n van den vorm $3m$ of $(3m + 1)$ is. In de tabel voor de $\frac{1}{6} n (n-1)$ lijnen eener gescheiden groep komen verder alle getallen van 1 tot n, wegens de regelmatigheid van π_n, even vaak voor; $\frac{1}{2} n (n-1)$ moet dus door n deelbaar derhalve $(n-1)$ even zijn, d. w. z. $n \equiv 1$ of $n \equiv 3$ (mod. 6). Beschouwt men in de bedoelde tabel elk getal als de notatie van een punt, dan stelt zij tevens eene regelmatige $\left(n_{\frac{1}{2}(n-1)}, \frac{1}{6} n (n-1)_3\right)$ voor, waarin alle punten met elkander verbonden zijn; laat men dus *een* punt en de daarmede incidente lijnen uit deze cf. weg, dan ontstaat eene $\left((n-1)_{\frac{1}{2}(n-3)}, \frac{1}{6} (n-1)(n-3)_3\right)$ met $\frac{1}{2} (n-1)$ paren van onderling gescheiden punten. Wordt van de laatste cf. zulk een paar punten met de door hen gedragen lijnen afgezonderd, dan verliest elk der overblijvende punten twee lijnen, en er ontstaat eene $\left((n-3)_{\frac{1}{2}(n-7)}, \frac{1}{6} (n-3) (n-7)_3\right)$, waarin elk punt met $(n-7)$ punten verbonden, dus van 3 punten gescheiden is; deze 3 punten zullen in het algemeen niet onderling gescheiden zijn, omdat de punten der uit den aard der zaak regelmatige cf. dan in viertallen konden gerangschikt worden, hetgeen alleen voor $n \equiv 3$ (mod. 4) mogelijk is. Door deze beschouwing wordt de bepaling

der tabel voor eene hoofdveelzijde in elk geval teruggebracht tot de bepaling der notatie voor eene cf., die $\frac{1}{6}n(n-1) - \frac{1}{6}(n-3)(n-7) = \frac{1}{2}(3n-7)$ lijnen minder telt dan de hoofdveelzijde.

»Eene π_n kan, als $n = 6m + 1$ of $n = 6m + 3$ is, „hoofdveelzijden bezitten, die uit $\frac{1}{6}n(n-1)$ lijnen zijn samen„gesteld. De afscheiding van zulk eene hoofdveelzijde levert „eene regelmatige $\left(\binom{n}{2}_{n-3}, \frac{1}{6}n(n-1)(n-3)_3\right)$."

5. De tabel voor eene hoofdtwaalfzijde der π_9 kan door de in § 4 uiteengezette handelwijze uit de notatie der reeds door Möbius *) opgemerkte, onbestaanbare, 8_3 gevonden worden. Stellen de cijfers 1 tot 8 de punten dezer 8_3 voor, dan zijn hare lijnen aangewezen door de volgende groepen van 3 cijfers †).

123	478	
145	368	. . . . (II)
167	258	
246	357	

Door toevoeging van vier lijnen, die elk een paar gescheiden punten der 8_3 vereenigen en door een punt 9 gaan, volgt nu uit (II) de tabel (III) der, evenzeer onbestaanbare, $(9_4, 12_3)$; zij is de bekende cf. der buigpunten eener kromme der derde orde (Hesse).

*) *Gesammelte Werke* Bd. 1, S. 445. (Vgl. Schröter „Ueber lineare Konstructionen," *Göttinger Nachrichten* n°. 9, 1888).

†) Zie Schröter l.c. of Martinetti „Sulle conf. piane μ_3" (*Ann. di Mat.* Ser. IIa, tomo XV, pag. 4).

123	478	569	
145	279	368	. . . . (III)
167	258	349	
189	246	357	

De lijnen dezer tot π_9 behoorende hoofdtwaalfzijde zijn in tabel (III) zoo gerangschikt, dat elke horizontale rij alle cijfers van 1 tot 9 bevat. Door onderlinge permutatie van 4, 7, 8 en van 5, 6, 9 ontstaat uit (III) eene groep van 6^3 hoofdtwaalfzijden, die de nevendriezijde 123, 478, 569 gemeen hebben. Daar verder 4, 5, 6, 7, 8, 9 op 10 wijzen tot twee drietallen kunnen gerangschikt worden, komt de lijn 123, dus elke der $\binom{9}{3} = 84$ lijnen van π_9, in $6^3 \times 10 = 2160$ hoofdtwaalfzijden voor; π_9 bezit derhalve $2160 \times 84 : 12 = 15120$ hoofdtwaalfzijden, die ieder aanleiding geven tot eene regelmatige $(36_6, 72_3)$.

Door het weglaten van eene tweede, van de bovenstaande onafhankelijke, hoofdtwaalfzijde ontstaat uit de $(36_6, 72_3)$ eene $(36_5, 60_3)$. De mogelijkheid van zulk eene afscheiding blijkt o. a. uit tabel (IV), welke met (III) geene lijn gemeen heeft.

124	379	568	
136	289	457	. . . . (IV)
178	235	469	
159	267	348	

De regelmatige $(13_6, 26_3)$, welke door de tabel eener hoofdveelzijde der π_{13} wordt voorgesteld, hangt, volgens de algemeene beschouwing, af van eene 10_3 met drie onderling onafhankelijke groepen, die elk 5 paren van gescheiden punten bevatten.

Uit de tabellen, die door Martinetti voor de beide regelmatige 10_3 zijn opgesteld *), volgt gemakkelijk, dat alleen

*) t. a. p. bl. 17. De overige acht cf. 10_3 zijn onregelmatig.

de door KANTOR $10_3 A$ genoemde cf. hier in aanmerking kan komen; zij bezit de volgende vijftallen van gescheiden puntenparen:

18	19	1(10)
25	2(10)	27
37	35	36
4(10)	47	49
69	68	58

. . . . (V)

Onderstelt men, dat de lijnen, welke de eerste vijf paren verbinden, in een punt (11), de lijnen door de paren der tweede groep in een punt (12) samenkomen, dan ontstaat door toevoeging dezer 10 lijnen aan de 10_3 eene $(12_5, 20_3)$ met zes gescheiden paren van punten, n.l. de vijf paren der derde groep van (V) benevens het paar (11) (12).

Uit deze cf. volgt dan de gewenschte $(13_6, 26_3)$ door de genoemde zes paren collineair te onderstellen met een punt (13). Hierdoor verkrijgt men de volgende hoofdzesentwintigzijde der π_{13}.

1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3
2	4	6	8	9	10	4	5	7	8	10	4	5
3	5	7	10	12	13	6	11	13	9	12	8	12
3	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	7	11
6	7	9	7	9	10	6	7	8	8	9	8	12
13	11	10	12	13	11	10	9	13	12	11	10	13

. . (VI)

Bij het bepalen eener hoofdvijf-en-dertigzijde der π_{15} kan gebruik gemaakt worden van de tabel der $(12_4, 16_3) A$, welke in mijn opstel »Over vlakke configuraties'' *) voorkomt. Worden de vier gescheiden kwadrupels dezer cf. door de getallen 1, 2, 3, 4; 5, 6, 7, 8; 9, 10, 11, 12 aangeduid, dan gaat de bedoelde tabel over in:

*) t. a. p. bl. 107, tabel (B).

1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	
5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8	. . (VII)
9	10	11	12	10	9	12	11	11	12	9	10	12	11	10	9	

De 18 paren van gescheiden punten dezer cf. kunnen tot de volgende 3 onderling onafhankelijke zestallen gebracht worden

1, 2	3, 4	5, 6	7, 8	9, 10	11, 12	
1, 3	2, 4	5, 7	6, 8	9, 11	10, 12	. . (VIII)
1, 4	2, 3	5, 8	6, 7	9, 12	10, 11	

Wordt tabel (VII) aangevuld met de lijnen

1	3	5	7	9	11	1	2	5	6	9	10	
2	4	6	8	10	12	3	4	7	8	11	12	. . (IX)
13	13	13	13	13	13	14	14	14	14	14	14	

dan ontstaat de notatie eener $(14_6, 28_3)$ met 7 gescheiden paren van punten, n.l. het derde zestal van (VIII) benevens het paar 13, 14. Hieruit volgt dan de tabel eener $(15_7, 35_3)$, tevens die eener hoofdvijfendertigzijde der π_{15}, door toevoeging van de lijnen

1	2	5	6	9	10	13	
4	3	8	7	12	11	14	. . . (X)
15	15	15	15	15	15	15	

In de genoemde $(15_7, 35_3)$ heeft elke lijn tot restfiguur eene $(12_4, 16_3)$ A: elke der acht hoofdvierzijden dezer cf. vormt dus met de bedoelde lijn eene hoofdvijfzijde der $(15_7, 35_3)$. Met het oog hierop zijn de 35 lijnen der gevonden hoofdveelzijde van π_{15} gerangschikt in de volgende 7 groepen, die elk alle getallen van 1 tot 15 bevatten.

12 (13)	35 (11)	489	(10) (12) (14)	67 (15)	
13 (14)	269	47 (10)	58 (15)	(11) (12) (13)	
14 (15)	25 (10)	36 (12)	78 (13)	9 (11) (14)	
159	27 (12)	38 (10)	46 (11)	(13) (14) (15)	..(XI)
16 (10)	28 (11)	34 (13)	57 (14)	9 (12) (15)	
17 (11)	23 (15)	45 (12)	68 (14)	9 (10) (13)	
18 (12)	24 (14)	379	56 (13)	(10) (11) (15)	

6. In eene π_7 bestaat de restfiguur der lijn 123 uit 22 lijnen en 18 punten; worden daaruit de lijnen 456, 457, 467 en 567 weggelaten, dan ontstaat eene cf. 18_3 met de lijnen:

145	146	147	156	157	167	
245	246	247	256	257	267	. . . (XII)
345	346	347	356	357	367	

Zij bestaat uit vier drietallen van punten $1\,i$, $2\,i$, $3\,i$, ($i = 4, 5, 6, 7$), die paarsgewijze perspectief liggen t. o. v. zes punten $i\,k$ ($i = 4$ tot 7, $k = 5$ tot 7), en de achttien perspectiviteitsstralen.

Tot deze cf. behooren drie volledige vierhoeken met de toppen $i\,4$, $i\,5$, $i\,6$, $i\,7$ ($i = 1, 2, 3$), dus 12 cf. driehoeken; de zes perspectiviteitscentra komen in geen dier driehoeken voor, de overige twaalf punten elk in drie driehoeken.

»Na afzondering van eene der in π_{2n+1} begrepen π_n en »van $4\binom{n+1}{3}$ niet tot deze π_n behoorende lijnen ontstaat

»eene $\left(3\binom{n+1}{2}_n, n\binom{n+1}{2}_3\right)$, bestaande uit $(n+1)$ »groepen van n punten $1\,i$, $2\,i$, $3\,i$, ... $n\,i$ $(i = n+1$ »tot $2\,n+1)$ met $\binom{n+1}{2}$ punten $i\,k$ $(i = n+1$ »tot $2\,n+1$, $k = n+2$ tot $2\,n+1)$ ten opzichte »waarvan die groepen paarsgewijze perspectief liggen, en de »$n\binom{n+1}{2}$ perspectiviteitsstralen. De nieuwe cf. bevat n volledige $(n+1)$ hoeken, dus $n\binom{n+1}{3}$ driehoeken; geen »der perspectiviteitscentra behoort tot zulk een driehoek, ter- »wijl elk der overige punten in $\binom{n}{2}$ driehoeken voorkomt".

Eene met de bovengevonden 18_3 gelijksoortige cf. kan aldus geconstrueerd worden: In een door de lijnen $\overline{4}$, $\overline{5}$, $\overline{6}$, $\overline{7}$ gevormden vierstraal beschrijft men twee vierhoeken met de hoekpunten (14, 15, 16, 17) en (24, 25, 26, 27), bepaalt de snijpunten $i\,k$ der homologe zijden $(1\,i, 1\,k)$ en $(2\,i, 2\,k)$ en brengt door deze zes punten de zijden van een derden vierhoek, waarvan de hoekpunten 34, 35, 36, 37 achtereenvolgens op $\overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}$ liggen. Deze 18_3 onderscheidt zich van de uit π_7 afgeleide cf. enkel door het bezit van de vier naar een punt convergeerende driepuntige diagonalen $\overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}$.

Op dergelijke wijze kan eene cf. gevonden worden, die van de boven vermelde $\left(3\binom{n+1}{2}_n, n\binom{n+1}{2}_3\right)$ alleen door het voorkomen van $(n+1)$ door een punt gedragen n-puntige diagonalen verschilt.

7. De cf. π_5, welke door twee homologe driehoeken met hun centrum en as gevormd wordt, kan op zes verschillende wijzen beschouwd worden als het samenstel van twee in elkander beschreven vijfhoeken *). De toppen de beide vijfhoeken kunnen b. v. zijn:

---

*) Volgens SCHRÖTER (t. a. p.) reeds door CAYLEY opgemerkt. (CRELLE XXXI, blz. 215).

12, 23, 34, 45, 51; . . . . (1)
13, 35, 52, 24, 41 . . . . (2)

Beschouwt men hier 123 als eerste, 234 als tweede zijde van vijfhoek (1), 135 als eerste, 352 als tweede zijde van (2), dan ligt het i^{de} hoekpunt van (2) blijkbaar op de $(2\,i - 1)^{ste}$ zijde van (1), het i^{de} hoekpunt van (1) daarentegen op de $(1 - 2\,i)^{de}$ zijde van (2), mits men zorg drage, de door dezen regel gevonden getallen door hunne positieve resten mod. 5 te vervangen *).

Bij π_7 vormen de 21 cf. punten met 21 bepaalde cf. lijnen eene uit 3 zevenhoeken samengestelde cf., die door Schröter †) is aangewezen. Voor de toppen dezer zevenhoeken kan men b. v. de volgende cf. punten nemen:

(*a*) 12, 23, 34, 45, 56, 67, 71;
(*b*) 13, 35, 57, 72, 24, 46, 61; . . . (XIII)
(*c*) 15, 52, 26, 63, 37, 74, 41.

Hier ligt het i^{de} hoekpunt van (*b*) op de $(2\,i-1)^{ste}$ zijde van (*a*), het i^{de} hoekpunt van (*c*) op de $(2\,i-1)^{ste}$ zijde van (*b*), het i^{de} hoekpunt van (*a*) op de $(2\,i-1)^{ste}$ zijde van (*c*), met dien verstande, dat de door dezen regel bepaalde getallen door hunne positieve resten mod. 7 worden vervangen; de wijze van samenstelling dezer 21_3 komt dus niet geheel overeen met die der boven beschouwde 10_3 §).

Elke willekeurige volgorde der cijfers 1 tot 7 kan voor (*a*) worden aangenomen; men vindt dan de voor (*b*) in acht te nemen volgorde door, uitgaande van het eerste getal, telkens één over te slaan, die voor (*c*) door evenzoo te han-

---

*) Ook de bovenvermelde cf. 10_3 A is het samenstel van 2 in elkander beschreven vijfhoeken; de plaatsing is evenwel anders.

†) Ueber das Fünfflach und Sechsflach, Crelle C. bl. 237, noot.

§) Schönflies heeft aangetoond, dat er twee soorten van regelmatige cf. bestaan, welke uit eene reeks van in elkander beschreven veelhoeken zijn samengesteld. Deze 21_3 behoort tot de eerste, gene 10_3 tot de tweede soort. (*Math. Ann.* XXXI bl. 61).

delen ten opzichte van (b); past men hetzelfde toe op de getallen, waaruit (c) dan is samengesteld, zoo komt de oorspronkelijke volgorde weder te voorschijn, terwijl bij π_5 de cijfers der eerste reeks in tegengestelde orde terugkomen. De π_7 bevat blijkbaar $7\,!: (7 \times 2 \times 3) = 120$ verschillende 21_3, overeenkomende met de 120 boven aangewezen $(21_2, 14_3)$, die elk eene 21_3 tot π_7 aanvullen.

Bij π_9 wordt eene 27_3 gevormd door de volgende negenhoeken.

$$\begin{array}{ll} (a) & 12,\ 23,\ 34,\ 45,\ 56,\ 67,\ 78,\ 89,\ 19; \\ (b) & 13,\ 35,\ 57,\ 79,\ 29,\ 24,\ 46,\ 68,\ 18; \ldots \text{(XIV)} \\ (c) & 15,\ 59,\ 49,\ 48,\ 38,\ 37,\ 27,\ 26,\ 16. \end{array}$$

Hier ligt het i^{de} hoekpunt van (b) resp. (c) op de $(2\,i - 1)^{ste}$ zijde van (a) resp. (b), maar, in tegenstelling met de 21_3 bij π_7, het i^{de} hoekpunt van (a) op de $(1 - 2\,i)^{de}$ zijde van (c).

8. Voor elk oneven aantal getallen der natuurlijke rij kunnen de volgende reeksen opgeschreven worden, waar alle getallen grooter dan $(2\,n + 1)$ door hunne positieve resten mod. $(2\,n + 1)$ moeten vervangen worden.

$$\left.\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots, (1 + t), \ldots (2n + 1); \\ 1,\ 3,\ 5,\ \ldots\ldots, (1 + 2t), \ldots (2n); \\ 1,\ 5,\ 9,\ \ldots\ldots, (1 + 4t), \ldots (2n - 2); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1,\ 1 + 2^x,\ 1 + 2^x 2, \ldots, (1 + 2^x t), \ldots (1 + 2^x 2n). \end{array}\right\} \ldots \text{(XV)}$$

Nu is, volgens eene bekende eigenschap der getallen, $2^{\tau\,(2n+1)} - 1 \equiv 0$ (mod. $2\,n + 1$), waar $\tau\,(2\,n + 1)$ de door Sylvester ingevoerde notatie is voor het „totient,” d. i. het aantal getallen kleiner dan en onderling ondeelbaar met $(2\,n + 1)$. Bijgevolg is $2^{\frac{1}{2}\,\tau\,(2\,n + 1)} \equiv 1$ of $\equiv -1$ (mod. $2\,n + 1$). In de congruentie $2^x \equiv 1$ of $\equiv -1$ (mod. $2\,n + 1$) is x dus, met het oog op de maximumwaarde

$2n$ van τ $(2n + 1)$, hoogstens gelijk aan n, maar kan natuurlijk ook een deeler van n zijn. Voor de kleinste waarde van x, die, wanneer aan $2^x \equiv -1$ niet kan voldaan worden, $2^x \equiv 1$ maakt, is $1 + 2^x \equiv 2$, zoodat de laatste der opgeschreven reeksen geheel met de eerste overeenkomt. Dan zijn

$$\left.\begin{array}{l} 12,\ 23,\ 34,\ \ldots\ (2n)(2n+1),\ (2n+1)1; \\ 13,\ 35,\ 57,\ \ldots\ (2n-2)(2n),\ (2n)1; \\ 15,\ 59,\ 9(13),\ldots(2n-6)(2n-2),\ (2n-2)1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1(n+2),\ (n+2)2,\ldots(2n+1)(n+1),\ (n+1)1; \end{array}\right\} \ldots (XVI)$$

de hoekpunten van x tot eene cf. $(2n + 1) x_3$ vereenigde $(2n + 1)$ hoeken in zoodanige ligging, dat het i^{de} hoekpunt van den k^{den} veelhoek op de $(2i \quad 1)^{ste}$ zijde van den $(k-1)^{sten}$ veelhoek is geplaatst. Het aantal cf. van deze soort, begrepen in eene π_{2n+1}, bedraagt blijkbaar $(2n + 1)! : 2x(2n + 1)$.

Kan aan de congruentie $2^x \equiv -1$ voldaan worden, dan is voor de kleinste waarde van den exponent $1 + 2^x \equiv 2n + 1$ (mod. $2n + 1$), zoodat de laatste reeks van getallen met de reeks $1, 2n + 1, 2n, 2n - 1, \ldots\ldots 3,2$ overeenkomt. In dit geval zijn

$$\left.\begin{array}{l} 12,\ 23,\ \ldots\ldots\ldots\ (2n+1)1; \\ 13,\ 35,\ \ldots\ldots\ldots\ (2n)1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1(n+1),\ (n+1)(2n+1),\ \ldots\ (n+2)1; \end{array}\right\} \ldots (XVII)$$

de punten van eene in π_{2n+1} begrepen $(2n + 1) x_3$, die van de boven gevonden cf. alleen daarin verschilt, dat de eerste $(2n + 1)$ hoek ten opzichte van den laatsten zoo is geplaatst, dat het i^{de} hoekpunt op de $(1 - 2i)^{de}$ zijde ligt.

De volgende tabel bevat de uitkomsten van het onderzoek naar de waarde van x voor de eerste tien oneven getallen > 5.

π_7	$2^3 \equiv 1$	3	zevenhoeken	21_3	
π_9	$2^3 \equiv -1$	3	negenhoeken	27_3	
π_{11}	$2^5 \equiv -1$	5	elfhoeken	55_3	
π_{13}	$2^6 \equiv -1$	6	dertienhoeken	78_3	
π_{15}	$2^4 \equiv 1$	4	vijftienhoeken	60_3	
π_{17}	$2^4 \equiv -1$	4	zeventienhoeken	68_3	. . (XVIII)
π_{19}	$2^9 \equiv -1$	9	negentienhoeken	171_3	
π_{21}	$2^6 \equiv 1$	6	eenentwintighoeken	126_3	
π_{23}	$2^{11} \equiv 1$	11	drieëntwintighoeken	253_3	
π_{25}	$2^{10} \equiv -1$	10	vijfentwintighoeken	250_3	

9. In elke tot eene π_{2n+1} behoorende $(2n+1)x_3$ is het punt 12 incident met de lijnen 123, $12(2n+1)$ en $12(n+2)$. Van de 6 op die lijnen gelegen punten 13, 23, $1(2n+1)$, $2(2n+1)$, $1(n+2)$, $2(n+2)$ kunnen alleen het eerste, derde en vijfde onderling verbonden zijn; evenzoo het tweede, vierde en zesde dezer punten. Nu kunnen ik en il alleen dan tot eene lijn der $(2n+1)x_3$ behooren, wanneer i, k, l in eenige volgorde genomen en zoo noodig door getallen vervangen, die met hen $\equiv$ zijn mod. $(2n+1)$, eene rekenkundige reeks vormen. Het onderzoek der verschillende hierbij mogelijke gevallen leert nu, dat voor $2n+1>7$ geene verbinding door cf. lijnen tusschen de genoemde zes punten bestaat, terwijl bij π_5 de punten $1i$ evenals de punten $2i$ onderling verbonden zijn, en bij π_7 25 met 27, 13 met 15 door eene cf. lijn is vereenigd.

»Stelt x de kleinste waarde voor, welke aan $2^x \equiv -1$ »(mod. $2n+1$), of, zoo dit niet mogelijk is, aan $2^x \equiv 1$ »(mod. $2n+1$) voldoet, dan kan men uit eene π_{2n+1} op »$(2n)!:(2x)$ verschillende wijzen eene cf. $(2n+1)x_3$ »afleiden, welke uit x tot π_{2n+1} behoorende $(2n+1)$ hoe- »ken zoodanig is samengesteld, dat de k^{de} veelhoek in den

»$(k-1)^{\text{sten}}$, de eerste in den laatsten is beschreven. Naar »gelang $2^x \equiv 1$ of $\equiv -1 \pmod{2n+1}$ is $(2n+1)\,x_3$ „eene cf. der *eerste* of *tweede* soort (Schoenflies). Met uit- „zondering van de ditrigonische 21_3 zijn deze cf. *atrigonisch*".

Atrigonische configuraties, d. w. z. cf. zonder driehoeken, zijn het eerst beschouwd door Martinetti *); hij toonde aan, dat eene $(27_5, 45_3)$, eene 15_3, eene 17_3 en vier verschillende 18_3 deze eigenschap bezitten. De bedoelde eigenaardigheid heb ik ook opgemerkt bij eene $(84_{10}, 280_3)$, waarvan de punten door de combinaties 3 aan 3 van de cijfers van 1 tot 9 kunnen voorgesteld worden, en elke lijn drie punten bevat, die geen cijfer gemeen hebben; algemeen bij de cf.

$$\left(\binom{3p}{p}_{\binom{2p-1}{p-1}},\ \frac{(3p)\,!}{6\,(p\,!)^3}_3\right)$$

waarvan de punten door de combinaties p aan p van $3p$ getallen worden aangewezen, en drie punten collineair zijn, als zij geen getal gemeen hebben; $p = 2$ geeft de cf. 15_3 van Martinetti, $p = 3$ de zooeven vermelde $(84_{10}, 280_3)$.

10. Wordt op de lijn $i\,k\,l$ der volledige vierzijde π_4 het door de punten $i\,k$ en $i\,l$ van $k\,l$ harmonisch gescheiden punt, door $k\,l/i$ voorgesteld, dan gaat de lijn, welke $k\,l/i$ en $k\,l/j$ verbindt, door het punt ij. Immers de harmonische groepen $i\,k$, $i\,l$; $k\,l$, $k\,l/i$ en $j\,k$, $j\,l$; $k\,l$, $k\,l/j$ hebben het punt $k\,l$ gemeen: de lijn $(k\,l/i,\ k\,l/j)$ gaat dus door het snijpunt der lijnen $(i\,k,\ j\,k)$ en $(i\,l, j\,l)$. Om dezelfde reden komen in $i\,j$ de lijnen $(i\,k/l,\ j\,k/l)$ en $(i\,l/k,\ j\,l/k)$ samen.

„De 6 punten $i\,k$ en de 12 punten $i\,k/l$ vormen met de „6 lijnen $i\,j/k\,l \equiv (i\,j,\ k\,l/i,\ k\,l/j)$ en de 12 lijnen $\overline{i\,j/k} \equiv$ „$(i\,j,\ i\,k/l,\ j\,k/l)$ eene 18_3, voor welke de zijden $i\,k\,l$ der „vierzijde zespuntige diagonalen zijn".

---

*) Sopra alcune cf. piane. (*Ann di Mat.*, Serie IIa, tomo XIV). Martinetti schijnt niet opgemerkt te hebben dat de restfiguur van elke lijn der bovengenoemde $(27_5, 45_3)$ eene *atrigonische* $(24_4, 32_3)$ is.

De volgende tabel geeft de verdeeling der punten dezer 18_3 over hare lijnen.

L.	P.			L.	P.			L.	P.		
12/34	12	34/1	34/2	12/3	12	13/4	23/4	23/1	23	21/4	31/4
13/24	13	24/1	24/3	12/4	12	14/3	24/3	23/4	23	24/1	34/1
14/23	14	23/1	23/4	13/2	13	12/4	32/4	24/1	24	21/3	41/3
23/14	23	14/2	14/3	13/4	13	14/2	34/2	24/3	24	23/1	43/1
24/13	24	13/2	13/4	14/2	14	12/3	42/3	34/1	34	31/2	41/2
34/12	34	12/3	12/4	14/3	14	13/2	43/2	34/2	34	32/1	42/1

..(XIX)

Uit dit overzicht blijkt gemakkelijk, dat de cf. 5 hoofdzeszijden en 5 hoofdvijfhoeken bevat; de afzondering van elk dezer zestallen van onderling gescheiden lijnen of punten geeft eene $(18_2, 12_3)$ of eene $(12_3, 18_2.)$

Deze hoofdzeszijden zijn:

12/34	12/34	12/34	13/24	14/23
13/24	13/24	23/14	23/14	24/13
14/23	14/23	24/13	34/12	34/12
23/14	23/1	13/2	12/3	12/4
24/13	24/1	14/2	14/3	13/4
34/12	34/1	34/2	24/3	23/4

. . . (XX)

De gevonden 18_3 bevat vier cf. driehoeken:

Δ	Hoekpunten.			Zijden.		
A	23/1	24/1	34/1	34/2	23/4	24/3
B	13/2	14/2	34/2	34/1	13/4	14/3
C	12/3	14/3	24/3	24/1	12/4	14/2
D	12/4	13/4	23/4	23/1	12/3	13/2

. . (XXI)

Geen der punten $i\,k$ behoort tot een cf. driehoek; de overige 12 punten komen elk in een driehoek voor.

11. De driehoeken A, B, C, D liggen twee aan twee perspectief t. o. v. de punten $i\,k$. De hoekpunten van A en B zijn b. v. paarsgewijze met de lijnen 123, 124 en 12/34 incident; de snijpunten van $\overline{14/3}$ met $\overline{24/3}$ en van $\overline{13/4}$ met $\overline{23/4}$ zijn dus collineair met het snijpunt 34 van $\overline{34/1}$ en $\overline{34/2}$. Nu zijn 12, 34 en het snijpunt van $\overline{13/4}$ met $\overline{23/4}$, dat ik door 343 zal aanduiden, de nevenhoekpunten van een volledigen vierhoek, die tot toppen heeft 13, 23, 34/1, 34/2 en tot zijden 123, 12/34, 134, 234, $\overline{13/4}$ en $\overline{23/4}$; de verbindingslijn der nevenhoekpunten 34, 343 bepaalt dus op 123 het door 13 en 23 van 12 harmonisch gescheiden punt 12/3. De collineatieas 34/12 van A en B bevat dus de 5 punten 34, 12/3, 12/4, 343, 344. Algemeen bevat elke der 6 lijnen $i\,j/k\,l$ het snijpunt $i\,j\,i$ van $\overline{i\,k/j}$ met $\overline{i\,l/j}$ en het snijpunt $i\,j\,j$ van $\overline{j\,k/i}$ met $\overline{j\,l/i}$.

Hier volgen de 12 punten $i\,j\,i$ en de drietallen van lijnen der 18_3, met welke zij eene $(12_3, 18_2)$ vormen.

P.	L.			P.	L.			
121	12/34	13/2	14/2	232	23/14	12/3	24/3	
122	12/34	23/1	24/1	233	23/14	13/2	34/2	
131	13/24	12/3	14/3	242	24/13	12/4	23/4	..(XXII)
133	13/24	23/1	34/1	244	24/13	14/2	34/2	
141	14/23	12/4	13/4	343	34/12	13/4	23/4	
144	14/23	24/1	34/1	344	34/12	14/3	24/3	

»De lijnen der harmonisch in π_4 beschreven 18_3 komen »3 aan 3 in 12 punten samen. Worden deze 12 punten »aan de configuratie toegevoegd, dan ontstaat eene $(30_3, 18_5)$, »die na weglating van de punten $i\,k$ overgaat in eene »$(24_3, 18_4)$"

Tabel der (30_3, 18_5).

Lijnen.	Punten.				
12/34	12	34/1	34/2	121	122
13/24	13	24/1	24/3	131	133
14/23	14	23/1	23/4	141	144
23/14	23	14/2	14/3	232	233
24/13	24	13/2	13/4	242	244
34/12	34	12/3	12/4	343	344
12/3	12	13/4	23/4	131	232
12/4	12	14/3	24/3	141	242
13/2	13	12/4	23/4	121	233
13/4	13	14/2	34/2	141	343
14/2	14	12/3	24/3	121	244
14/3	14	13/2	34/2	131	344
23/1	23	12/4	13/4	122	133
23/4	23	24/1	34/1	242	343
24/1	24	12/3	14/3	122	144
24/3	24	23/1	34/1	232	344
34/1	34	13/2	14/2	133	144
34/2	34	23/1	24/1	233	244

. . . (XXIII)

Worden de 3[de] en 4[de] kolom uit deze tabel gelicht, dan ontstaat de notatie voor eene 18_3 met de 4 cf. driehoeken;

Δ	Hoekpunten.			Zijden.		
A'	122	133	144	23/1	34/1	24/1
B'	121	233	244	13/2	34/2	14/2
C'	131	232	344	12/3	24/3	14/3
D'	141	242	343	12/4	23/4	13/4

. . (XXIV)

»De 6 punten $i\,k$ eener π_4 en de 12 punten $i\,k\,k$ vormen »met de 6 lijnen $i\,j/k\,l$ en de 12 lijnen $\overline{i\,j/k}$ eene 18_3, welke »van de harmonisch in π_4 beschreven 18_3 alleen door de »afwezigheid van zespuntige diagonalen verschilt".

De beide 18_3 hebben de cf. lijnen en de 6 cf. punten $i\,k$ gemeen; samen vormen zij de bovengenoemde $(30_3, 18_5)$, terwijl de daaruit afgeleide $(24_3, 18_4)$ het samenstel is van de beide $(12_3, 18_2)$, welke door afzondering van de punten $i\,k$ uit de beide 18_3 ontstaan. Daar geen der punten $i\,k$ tot een cf. driehoek eener 18_3 behoort, kunnen door hunne afscheiding geen driehoeken verloren gaan, en bevat de bedoelde $(24_3, 18_4)$ acht cf. driehoeken, te weten A, B, C, D; A', B', C', D', zoodat zij in samenstelling verschilt van de »harmonische" $(24_3, 18_4)$, welke 24 cf. driehoeken bezit *).

De beide 18_3 hebben de eerste hoofdzeszijde van tabel (XX) gemeen; worden deze 6 lijnen uit de bovengenoemde $(30_3, 18_5)$ verwijderd, dan blijft eene $(30_2, 12_5)$, welke blijkbaar uit twee $(18_2, 12_3)$ †) met de 6 gemeenschappelijke punten $i\,k$ bestaat.

12. De lijnen 123, 124; 134, 34/2; 14/23, 13/24 zijn drie paren overstaande zijden van een volledigen vierhoek met de hoekpunten 13, 14, 23/1, 24/1 en de nevenhoek-

*) „Over vlakke configuraties" § 6, of „Over de harm. cf. $(24_3, 18_4)$" (*Versl. en Med.*, 3e reeks, deel V, bl. 210).

†) § 10 van dit opstel.

punten 12, 34 en (14/23, 13/24); de lijn, die het laatste punt met 12 verbindt, ontmoet derhalve 134 in het punt 34/1, dat door 13 en 14 van 34 harmonisch is gescheiden: de lijnen 14/23, 13/24, 12/34 gaan dus door één punt, dat ik door 121314 zal aanduiden. De lijnen der aan de beide 18_3 gemeenschappelijke hoofdzeszijde (§ 11) vormen derhalve een volledigen vierhoek met de hoekpunten 121314, 212324, 313234, 414243.

Daar de lijnen 13/24 en 14/23 in 121314, $\overline{23/1}$ en $\overline{24/1}$ in 122, $\overline{12/3}$ en $\overline{12/4}$ in 12 samenkomen, en deze drie punten tot de lijn 12/34 behooren, liggen de driehoeken (131, 133, 13/4) en (141, 144, 14/3) perspectief en gaat de lijn 1341 $\equiv$ (131, 141) door het snijpunt 34 der lijnen $\overline{34/1} \equiv$ (133, 144) en 134 $\equiv$ (13/4, 14/3). Elk punt ik ligt dus met de punten ijj en kjj in eene rechte $jikj$, en met de punten ill en kll in eene rechte $likl$.

De 12 door deze beschouwing geleverde lijnen vormen met de 6 punten ik en de 12 punten ijj eene $(18_2, 12_3)$ met de cf. driehoeken:

Δ	Hoekpunten.			Zijden.		
A''	121	131	141	1231	1341	1241
B''	122	232	242	2132	2342	2142
C''	133	233	343	3123	3243	3143
D''	144	244	344	4124	4234	4134

. . (XXV)

Worden de 12 nieuwe lijnen van (XXV) toegevoegd aan de 18_3, waarvoor tabel (XXIII), na afscheiding van de 3de en 4de kolom, de notatie bevat, dan ontstaat de door tabel (XXVI) voorgestelde $(18_5, 30_3)$.

L.	P.		
12/34	12	121	122
13/24	13	131	133
14/23	14	141	144
23/14	23	232	233
24/13	24	242	244
34/12	34	343	344

(α) . . . . (XXVI)

L.	P.		
12/3	12	131	232
12/4	12	141	242
13/2	13	121	233
13/4	13	141	343
14/2	14	121	244
14/3	14	131	344
23/1	23	122	133
23/4	23	242	343
24/1	24	122	144
24/3	24	232	344
34/1	34	133	144
34/2	34	233	244

(β)

L.	P.		
1341	34	131	141
2342	34	232	242
1241	24	121	141
3243	24	233	343
1231	23	121	131
4234	23	244	344
3123	12	133	233
4124	12	144	244
2132	13	122	232
4134	13	144	344
2142	14	122	242
3143	14	133	343

γ)

Hier vormen de groepen (α) en (β) samen de notatie voor de 18_3 van tabel (XXIII) met de cf. driehoeken A', B', C', D', terwijl (α) en (γ) eene 18_3 van dezelfde soort met de cf. driehoeken A'', B'', C'', D'' en (β) met (γ) eene $(18_4, 24_3)$ voorstellen.

»De punten *i k* en *i k k* bepalen met de lijnen *j i k j* en »*i j/k l* eene 18_3 met 4 cf. driehoeken, welke gelijksoortig »is met de 18_3, welke dezelfde punten met de lijnen *j i/k* »en *i j/k l* vormen. Samen behooren deze beide cf. tot eene »$(18_5, 30_3)$, waaruit, na afzondering der hoofdzeszijde met »de lijnen *i j/k l*, eene $(18_4, 24_3)$ ontstaat".

13. De beide harmonische groepen 12, 12/3; 13,23 en 34, 34/2; 24,23 hebben het punt 23 gemeen: de lijn, welke 12/3 met 34/2 verbindt, gaat dus door het snijpunt der diagonalen (12,34) en (13,24) dat ik door 1213 zal aanduiden. Door hetzelfde punt gaan dan de lijnen (12/4, 34/1), (24/1, 13/4), (24/3, 13/2), (14/2, 14/3) en (23/1, 23/4).

»De 12 punten $i\,j/k$, welke elk der punten eener π_4 har»monisch scheiden van de beide paren, waarmede het col»lineair ligt, bepalen 18 lijnen, die 6 aan 6 door de 3 »diagonaalpunten van π_4 gaan."

Deze 18 lijnen kunnen gerangschikt worden in 3 zestallen, zoodat elk zestal 12 punten $i\,j/k$ bevat.

1213	14/2	14/3	1213	12/3	34/2	1213	13/2	24/3
1213	23/1	23/4	1213	12/4	34/1	1213	13/4	24/1
1214	13/2	13/4	1214	14/2	23/4	1214	12/3	34/1
1214	42/1	24/3	1214	14/3	23/1	1214	12/4	34/2
1314	12/3	12/4	1314	13/2	24/1	1314	14/2	23/1
1314	34/1	34/2	1314	13/4	24/3	1314	14/3	23/4

. . . .(XXVII).

De eerste zes dezer lijnen vormen de hoofdzeszijde, welke de drie cf. 18_3 der §§ 10, 11, 12 gemeen hebben. Uit tabel (XXVII) volgt, dat de driehoeken A, B, C, D en A', B', C', D', (tab. XXI en XXIV) twee aan twee perspectief liggen ten opzichte van 1213, 1214, 1314 als centra.

De harmonische groepen 24/1, 24; 14, 12 en 24/3, 24; 23, 34 worden achtereenvolgens uit de punten 34 en 12 op de lijnen 23/14 en 14/23 geprojecteerd in de harmonische groepen, 233,23; 14/3, 1213 en 141, 14; 23/1, 1213; daar deze het punt 1213 gemeen hebben, komen de lijnen ($\overline{141, 233}$) ($\overline{14, 23}$) en ($\overline{14/3, 23/1}$) in een punt samen, d. w. z. de lijn ($\overline{141, 233}$) gaat door 1214. De punten $i\,k\,k$ worden dus paarsgewijze verbonden door 18 lijnen, die 6 aan 6 door de diagonaal punten van π_4 gaan; zes dier lijnen behooren weder tot de bovengenoemde hoofdzeszijde (tabel XXVI, α); de overige 12 lijnen zijn

1213	131	244	1213	121	344	
1213	133	242	1213	122	343	
1214	121	343	1214	141	233	..(XXVIII)
1214	122	344	1214	144	232	
1314	141	232	1314	131	242	
1314	144	233	1314	133	244	

Elke dezer beide zestallen van lijnen bevat blijkbaar alle punten *i k k*. De 18 zooeven gevonden lijnen dragen de hoekpunten der driehoeken A'', B'', C'', D'', (tab. XXV.) zoodat deze 2 aan 2 de diagonaalpunten van π_4 tot perspectiviteitscentra hebben.

„De driehoeken A, B, C, D liggen paarsgewijze perspectief „ten opzichte van een der punten en tevens ten opzichte „van een der diagonaalpunten van π_4. Hetzelfde geldt voor A', B', C', D' en voor A'', B'', C'', D''."

Tabel der 9 perspectiviteitscentra.

Paren.		Paren.		Paren.		Centra.		
A	B	A'	B'	A''	B''	12	1314	
A	C	A'	C'	A''	C''	13	1214	
A	D	A'	D'	A''	D''	14	1213	..(XXIX)
B	C	B'	C'	B''	C''	23	1213	
B	D	B'	D'	B''	D''	24	1214	
C	D	C'	D'	C''	D''	34	1314	

Hierbij valt op te merken, dat 12 niet het gemeenschappelijke perspectiviteitscentrum van A, A', A' of van B, B', B'' is. De tabellen (XXIII) en (XXVI) bewijzen, dat de hoekpunten van A, A', A'' rusten op de drie in 121314 samen-

komende lijnen 12/34, 13/24, 14/23, terwijl hunne homologe zijden drie aan drie met de punten 23, 34, 24 incident zijn, zoodat de zijde 234 van π_4 hunne gemeenschappelijke collineatieas is.

Drietallen.			Centra.	Assen.	Snijp. hom. z.			
A	A'	A''	121314	234	23	34	24	
B	B'	B''	212324	134	13	34	14	...(XXX)
C	C'	C''	313234	124	12	24	14	
D	D'	D''	414243	123	12	23	13	

De hoekpunten en zijden der driehoeken A, A', A'' vormen met de snijpunten 23, 34, 24 hunner homologe zijden en de perspectiviteitsstralen 12/34, 13/24, 14/23 eene 12_3.

»Wanneer drie driehoeken $a_1 b_1 c_1$, $a_2 b_2 c_2$, $a_3 b_3 c_3$ zoo»danig in een driestraal A, B, C beschreven zijn, dat de »zijden $A_1 A_2 A_3$ in een punt a, de zijden $B_1 B_2 B_3$ in een »punt b en de zijden $C_1 C_2 C_3$ in een punt c samenkomen, »dan behooren de genoemde 12 punten en 12 lijnen tot »eene 12_3, waar a, b, c elk in 6, de overige punten elk in »5 cf.-driehoeken voorkomen".

De cf. is met zichzelf reciprook; zij geeft aanleiding tot de volgende tabel:

A	a_1	a_2	a_3	B	b_1	b_2	b_3	C	c_1	c_2	c_3	
A_1	a	b_1	c_1	B_1	b	c_1	a	C_1	c	a_1	b_1	...(XXXI)
A_2	a	b_2	c_2	B_2	b	c_2	a_2	C_2	c	a_2	b_2	
A_3	a	b_3	c_3	B_3	b	c_3	a_3	C_3	c	a_3	b_3	

14. Eene π_5 wordt gevormd door twee perspectief gelegen driehoeken (13, 14, 15) en (23, 24, 25) met hun centrum 12 en as $345 \equiv (34, 45, 35)$. Van de eveneens ten opzichte van 12 perspectief gelegen driehoeken (13, 15, 24) en (23, 25, 14) gaat de as door het punt 35 en bevat de

snijpunten der homologe zijden (13, 24) en (14, 23), (15, 24) en (14, 25); ik zal deze as door het teeken $\overline{35/12}$ voorstellen. Nu kan π_5 ook beschouwd worden als het samenstel van twee t. o. v. 14 perspectief geplaatste driehoeken met hunne door 35 loopende as; 35 zal dus ook incident zijn met de lijn $\overline{35/14}$, die het snijpunt der cf. diagonalen $(\overline{13,24})$ en $(\overline{12,34})$ benevens het snijpunt van $(\overline{15,24})$ met $(\overline{12,45})$ bevat; eindelijk behoort 35 nog tot de lijn $\overline{35/24}$ met de snijpunten $(\overline{12,34}\,;\,\overline{14,23})$ en $(\overline{12,45}\,;\,\overline{14,25})$.

»De 15 diagonaalpunten der 5 tot eene π_5 behoorende »volledige vierzijden liggen paarsgewijze in 30 lijnen $\overline{ij/kl}$, »welke drie aan drie door de punten van π_5 gaan en vier »aan vier in die diagonaalpunten samenkomen".

Door elk punt ik van π_5 gaan de lijnen $\overline{ik/lm}$, $\overline{ik,ln}$ en $\overline{ik,mn}$, door elk diagonaalpunt $(\overline{ik,lm}\,;\,\overline{im,lk})$ de lijnen $\overline{ji/km}$, $\overline{jk,il}$, $\overline{jl,km}$ en $\overline{jm,il}$.

In eene π_n behoort elk punt ik tot $\binom{n}{2}$ cf. π_5 en tot $\binom{n-2}{2}$ lijnen $\overline{ik/lm}$, waar l en m alle getallen van 1 tot n, (i en k uitgezonderd) kunnen voorstellen. De 3 $\binom{n}{4}$ diagonaalpunten der $\binom{n}{4}$ tot π_n behoorende π_4 liggen dus paarsgewijze in $\binom{n}{2}\binom{n-2}{2} = 6\binom{n}{4}$ lijnen $\overline{ik/lm}$, die in viertallen met de diagonaalpunten incident zijn.

Elk punt ik van π_n komt voor in $\binom{n-2}{2}$ cf. π_4, is dus met 2 $\binom{n-2}{2}$ lijnen $\overline{ik/l}$ incident, die elk twee punten ik/l dragen. Daar verder elke lijn van π_n tot $(n-3)$ cf. π_4 behoort, gaan door elk der $3\binom{n}{3}$ punten ik/l $2(n-3)$ lijnen $\overline{kl}$ (§ 10).

Verder is (§ 13) elk diagonaalpunt eener tot π_n behoorende π_4 met 4 lijnen incident, welke elk twee punten ik/l

bevatten. (De eerste zes lijnen van tabel (XXVII) blijven hier buiten beschouwing, omdat zij elk vier punten, n.l. ook een punt *i k*, dragen). Elk punt *i k*/*l* bevat daarentegen $2(n-3)$ door diagonaalpunten getrokken lijnen.

»In eene π_n gaan door elk punt *i k* $3\binom{n-2}{2}$ lijnen, die »elk 2 punten *i k*/*l* of 2 diagonaalpunten $(\overline{ik, lm; im, lk})$ »bevatten; door elk punt *i k*/*l* $(4n-3)$ lijnen, elk een punt »*i k* met een tweede punt *i k*/*l*, of een diagonaalpunt met »een tweede punt *i k*/*l* dragende; door elk diagonaalpunt »8 lijnen, die elk een tweede diagonaalpunt met een punt »*i k*, of twee punten *i k*/*l* bevatten. Daar nu de getallen »$\frac{3}{2}(n-2)(n-3)$, $4(n-3)$ en 8 voor geen waarde van n »even groot zijn, is het niet mogelijk uit de genoemde »punten en lijnen eene cf. samen te stellen."

15. Door elk diagonaalpunt *d* eener tot π_5 behoorende π_4 gaan 4 lijnen, die elk nog 2 punten *i k*/*l* bevatten, terwijl elk der punten *i k*/*l*, omdat de lijn $\overline{ikl}$ tot twee cf. π_4 behoort, met 4 lijnen incident is, die een tweede punt *i k*/*l* benevens een diagonaalpunt dragen.

»De 30 punten, welke de punten eener π_5 harmonisch »scheiden van de met hen collineair gelegen cf. punten en »de 15 diagonaalpunten *d* der 5 in π_5 begrepen cf. π_4 »vormen met 60 niet tot π_5 behoorende lijnen eene $(45_4, 60_3)$, »waarvoor de 30 lijnen *i k*/*l m* van 5 in de 5 cf. 18_3 be»grepen hoofdzeszijden driepuntige diagonalen zijn, die elk »een punt van π_5 dragen; worden deze 30 lijnen in de cf. »opgenomen, dan ontstaat eene $(45_6, 90_3)$."

In de bedoelde $(45_4, 60_3)$ is het punt $(\overline{12,34}; \overline{13,24})$ in 2 volledige vierzijden het overstaande hoekpunt der punten $(\overline{12,34}; \overline{14,23})$ en $(\overline{13,24}; \overline{14,23})$; daar de beide laatstgenoemde punten overstaande hoekpunten eener mede tot de cf. behoorende vierzijde zijn, vormen de drie genoemde diagonaalpunten eene gesloten groep. Geheel op dezelfde wijze blijkt, dat de punten 12/3, 12/4 en 12/5, twee aan twee

genomen, overstaande hoekpunten van 3 in de cf. begrepen vierzijden zijn. De 45 cf. punten vormen dus 15 onderling gelijkwaardige drietallen. Dezelfde eigenschap heb ik opgemerkt bij de $(45_4, 60_3)$, welke uit de 45 nevenhoekpunten van een in eene kegelsnede beschreven zeshoek en de 60 Pascallijnen is samengesteld. Worden de hoekpunten door 1, 2, 3, 4, 5, 6, de zijden door ik ($i = 1$ tot 6, $k = 2$ tot 6), de nevenhoekpunten door 12/45 enz. voorgesteld, dan bevat deze cf. o. m. de volgende lijnen.

12/45	23/56	34/16	15/42	23/56	13/46	14/25	35/16	34/26
12/45	35/26	13/46	15/42	35/26	34/16	14/25	13/56	23/46
12/45	35/16	23/46	15/42	13/26	34/56	14/25	13/26	35/46
12/45	13/56	34/26	15/42	16/23	35/46	14/25	16/23	34/56

Uit deze tabel blijkt, dat 12/45, 14/25 en 15/42 een gesloten groep vormen op dezelfde wijze als b. v. de punten 12/3, 12/4, 12/5 der eerst genoemde $(45_4, 60_3)$; de beide cf. zijn dus gelijksoortig; in elk van hen komt elk punt in twee vierzijden, elke lijn in eene vierzijde voor. In een opzicht is de cf. der Pascallijnen van meer bizonderen aard; zij bezit in de 15 lijnen ik evenzoovele zespuntige diagonalen, terwijl de andere cf. 30 driepuntige diagonalen telt*).

16. De boven besproken $(45_4, 60_3)$ geeft aanleiding tot nieuwe cf., wanneer de 45 diagonaalpunten der 15 in haar begrepen π_4 en de 180 punten h, welke de cf. punten van de met hen collineair gelegen paren van cf. punten har-

---

*) De 60 Pascallijnen vormen met de 60 Kirkmanpunten 6 cf. π_5 (de stelsels π van VERONESE); door toevoeging van de 20 Steinerpunten worden deze 6 cf. vereenigd tot eene $(80_3, 60_4)$, door toevoeging van de 20 Cayleylijnen daarentegen tot eene $(60_4, 80_3)$, door toevoeging van de Steinerpunten en de Cayleylijnen ontstaat dus eene 80_4. Eene volledige opgave der litteratuur over dit onderwerp en eene gemakkelijke notatie vindt men in „The Pascal hexagram" by Miss CHRISTINE LADD (*Amer. J. of Math.* Vol. II, 1, 1879).

monisch scheiden, in de beschouwing worden opgenomen. Door elk cf. punt gaan dan vier lijnen, die elk twee punten h bevatten, n.l. twee voor elke π_4, waarin dat cf. punt voorkomt; door elk diagonaalpunt d gaan vier lijnen, elk met twee punten h; door elk punt h vier lijnen, welke elk een tweede punt h met een cf. punt of een diagonaalpunt d dragen.

»De Pascalcf. $(45_4, 60_3)$ levert eene door hare 45 cf. »punten, hare 180 punten h en hare 45 punten d met 360 »niet tot de cf. behoorende lijnen gevormde $(270_4, 360_3)$, »welke 60 zespuntige diagonalen (de lijnen der $(45_4, 60_3)$) »en 90 vierpuntige diagonalen (de lijnen der 15 tot de 15 »cf. π_4 behoorende hoofdzeszijden $i j | k l$) bezit".

Blijkbaar wordt eene $(270_4, 360_3)$ van dezelfde soort bepaald door de 15×12 tot de 15 cf. π_4 behoorende punten $i k k$ (§ 11) met de 45 diagonaalpunten d, de 45 cf. punten, de 15×12 lijnen $i k l i$ (§ 12) en de 15×12 lijnen van tabel (XXVIII).

De beschouwingen van deze § gelden voor alle cf. waarin elk punt tot twee, elke lijn tot eene π_4 behoort. Zoo vindt men uit de $(12_4, 16_3)$ B, welke ik in mijn opstel »Over vlakke cf." heb beschreven, eene uit 12 cf. punten, 4×3 diagonaalpunten en 48 punten h samengestelde $(72_4, 96_3)$ en eene daarmede gelijksoortige cf., waarin de 48 punten h door 48 punten $i k k$ zijn vervangen.

In de $(12_4, 16_3)$ A, welke in hetzelfde opstel voorkomt, behoort elk punt tot 6, elke lijn tot 3, elk diagonaalpunt (als snijpunt van 3 cf. diagonalen) tot 3 vierzijden, zoodat hier op dergelijke wijze eene nieuwe cf. kan worden samengesteld.

»De 12 cf. punten en 48 punten h eener $(12_4, 16_3)$ A »en de 12 punten der geassocieerde cf. behooren tot eene »$(72_{12}, 288_3)$ met 16 zespuntige en 72 vierpuntige diago»nalen; elke der laatste bevat een punt der oorspronkelijke »cf., een punt der geassocieerde cf. en twee punten h."

Uit het in de §§ 15 en 16 behandelde volgt algemeen:

»Behoort elke lijn eener $\left(\left(\frac{6q}{n}\right)_n, 2q_3\right)$ tot twee vierzijden,

»dan vormen de $3q$ diagonaalpunten der q in haar begrepen »vierzijden met de $6q$ punten h en $12q$ nieuwe lijnen eene »($9q_4$, $12q_3$), welke uit $3q$ vierzijden zoodanig is samenge- »steld, dat elk cf. punt tot twee, elke cf. lijn tot eene »dezer vierzijden behoort. De $9q$ punten der nieuwe cf., »hare $36q$ punten h en hare $9q$ diagonaalpunten, bepalen »met $72q$ nieuwe lijnen eene ($54q_4$, $72q_3$)."

RAPPORT

OVER DE

VERHANDELING VAN Dr. **J. DE VRIES.**

„OVER EENE GROEP VAN REGELMATIGE VLAKKE CONFIGURATIES".

DOOR

D. BIERENS DE HAAN EN **F. J. VAN DEN BERG.**

(Uitgebracht in de Vergadering van 24 November 1888).

Nog is ons opgedragen over de bovenstaande verhandeling van denzelfden schrijver rapport uit te brengen; en daaromtrent gelden dezelfde opmerkingen, die bij het voorgaande rapport gemaakt zijn.

De in de vorige verhandeling behandelde Polyedrale configuratien zoowel als die, welke de tweede ondergeteekende (VAN DEN BERG) afleidde bij de graphische oplossing van een stelsel lineaire vergelijkingen, behooren tot de conf. $\left(\binom{p+q}{q}_q, \binom{p+q}{q-1}_{p+1}\right)$; deze ontstaat bij p volledige q-hoeken, die paarsgewijze ten opzichte van een bepaald punt perspectivisch gelegen zijn.

Schrijver wil vooreerst bewijzen, dat deze conf. eene regelmatige is. Hij neemt drie driehoeken, die op drie in één punt zamenkomende rechten, een driestraal, rusten, en vindt dat de drie collineatie-assen in één punt zamenkomen, en dus tot de conf. $(20_3, 15_4)$ aanleiding geven, die nu re-

gelmatig is. Voor het snijpunt van drie rechten der configuratie het punt *j m n*, en voor het snijpunt der drie bijbehoorende collineatie-assen het punt *i k l* nemende, noemt hij deze *geassociëerde punten*, in overeenstemming met de »geassociëerde lijnen" der polyedrale conf. (15_4, 20_3), die met de vorige reciprook verwant is.

In een vierstraal, waarin drie volledige vierhoeken zijn beschreven, noemt schrijver het middelpunt *complementair* met de lijn, die de vier geassociëerde punten van dit middelpunt in vier conf. (20_3, 15_4) blijkt te bevatten. Die complementaire lijn voltooit de gegeven figuur met de conf. (20_3, 15_4) tot eene conf. 35_4, en wordt hier door c_1 aangeduid.

Deze conf. 35_4 is regelmatig: zij ontstaat ook bij drie volledige vierzijden, die ten opzichte van vier collineaire punten in *lineale* ligging zijn; dat is, waarbij de *n* snijpunten van homologe zijden op ééne rechte lijn liggen.

In een vijfstraal, waarop drie volledige vijfhoeken rusten, komt schrijver op eene regelmatige conf. (56_5, 70_4), die ook ontstaat uit vier volledige vierzijden, die lineaal gelegen zijn ten opzichte van vier collineaire punten. Hare lijnen kunnen in 35 tweetallen worden verdeeld, die *geassociëerde paren der tweede orde* worden genoemd, en door a_2 worden aangeduid.

Wordt bij den vierstraal het centrum door vier letters aangeduid, en draagt hij vier volledige vierhoeken, dan verkrijgt men, door zamenvoeging van vier in de figuur begrepen conf. 35_4, eene conf. (70_4, 56_5), die met de voorgaande reciprook verwant is. Vier vijfhoeken, beschreven in een vijfstraal, geven aanleiding tot vijf conf. (70_4, 56_5). De vijf punten a_2, die in deze vijf conf. bij het middelpunt daarvan behooren, liggen in eene rechte, die *de complementaire lijn der tweede orde* wordt genoemd, en door c_2 aangegeven wordt; zij vult de genoemde conf. aan tot een conf. 126_5; deze is regelmatig, elk punt kan dus weder als centrum worden beschouwd.

Het voorgaande wettigt het vermoeden, dat ook ($p - 1$) p-hoeken, die twee aan twee perspectivisch gelegen zijn ten

opzichte van een door $(p - 1)$ letters voorgesteld punt, aanleiding geven tot eene regelmatige conf. $\binom{2p-1}{p}_p$; deze zoude dan $\binom{p-1}{i+2}\binom{p}{i+2}$ punten a_1 en $\binom{p-1}{i+2}\binom{p}{i+3}$ lijnen c_1 bevatten voor $i = 1, 2, 3 \ldots p - 3$; waarvan elke lijn c_1 incident is met $(i + 3)$ punten a_1. Deze stelling wordt door schrijver bewezen, en daaruit verder afgeleid, dat, wanneer men p volledige q-hoeken in een q-straal beschrijft, deze aanleiding geven tot $\left(\binom{p+q}{q}_q, \binom{p+q}{q-1}_{p+1}\right)$, eene regelmatige configuratie.

Schrijver gaat terug tot de vroeger behandelde regelmatige conf. 35_4. Deze bevat groepen van zeven gescheiden punten, die nu *neven-zeven-hoeken* vormen, in tegenstelling met de »hoofd-veel-hoeken" die wij in het vorige opstel leerden kennen. De complementaire lijnen van zeven gescheiden punten leveren ook eene *neven-zeven-zijde*. Zondert men zeven gescheiden punten en hunne complementaire lijnen uit de conf. 35_4 af, dan ontstaat er eene 28_3, die nu echter noch conf. driehoeken bevat, noch als de conf. $(9_2, 6_3)$ A samengesteld is uit twee drietallen van onderling gescheiden lijnen, welke laatste door de letter Δ zal worden voorgesteld.

In de conf. $\left(\binom{m}{3}_{n-3}, \binom{m}{4}_4\right)$ vormen alleen voor $m = 6k + 1$ en $m = 6k + 3$, de lijnen, die in $\frac{1}{6} m (m - 1)$ onderling gescheiden punten samenkomen, met de overige conf. punten eene conf. $\left(\frac{1}{6} m (m - 1) (m - 3\right)_3$, die geene conf. driehoeken, en evenmin figuren (Δ) bevat. De overige lijnen van de oorspronkelijke conf. vormen met dezelfde punten eene conf. $\left(\frac{1}{6} m (m - 1) (m - 3)_{m-6}, \frac{1}{24} m (m - 1) (m - 3) (m - 6)_4\right)$.

Opdat onze conf. $\left(\binom{m}{3}_{m-6}, \binom{m}{4}_4\right)$ hoofd veel-zijden kunne bevatten, moet m van den vorm $6k + 2$ of $6k + 4$ zijn;

alsdan bestaan die hoofd-veel-zijden uit $\frac{1}{4}\binom{m}{3}$ lijnen. Wordt nu zulk een groep weggenomen, dan verkrijgt men eene conf. $\left(\binom{m}{3}_{m-4}, \frac{m-4}{4}\binom{m}{3}_4\right)$, waarin elk punt tot $3\binom{m-4}{2}$ conf. driehoeken behoort; terwijl er in de oorspronkelijke conf. voor elk punt $3\binom{m-3}{2}$ conf. driehoeken bevat zijn.

Voor enkele, bepaalde waarden van m zal deze laatste conf. een neven-veel-hoek bezitten; het wegnemen van deze geeft tot eene splitsing der conf. aanleiding. Derhalve bezit de conf. (56_4) — die uit de conf. $(56_5, 70_4)$ ontstaan is door het wegnemen eener hoofd-veertien-zijde — neven-acht-hoeken; laat men een daarvan weg, zoo valt de conf. uit-een in twee andere $(48_2, 32_3)$ en $(48_2, 24_4)$. Evenzoo be-vat de conf. $(120_6, 180_4)$ — ontstaan uit de weglating van eene hoofd-dertig-zijde uit de conf. $(120_7, 210_4)$ — neven-twaalf-hoeken; laat men daarvan eene weg, zoo valt de conf. uiteen in de conf. $(108_2, 72_3)$ en de conf. (108_4).

De vroeger verkregen configuratie

$$\left(\frac{1}{6}\, m\,(m-1)\,(m-3)_{m-6}, \frac{1}{24}\, m\,(m-1)\,(m-3)\,(m-6)_4\right)$$

kan eene configuratie

$$\left(\frac{1}{6}\, m\,(m-1)\,(m-3)_{m-7}, \frac{1}{24}\, m\,(m-1)\,(m-3)\,(m-7)_4\right)$$

leveren door de afscheiding van $\frac{1}{24}\, m\,(m-1)\,(m-1)$ gescheiden lijnen.

De configuratie

$$\left(\binom{2p}{3}_{2p-3}, \binom{2p}{4}_4\right)$$

bevat de configuratie

$$\left(4\binom{p+1}{3}_{p-1}, (p-1)\binom{p+1}{3}_4\right),$$

die samengesteld is uit de hoekpunten van $\binom{p+1}{2}$ $(p-1)$-

hoeken, die drie aan drie op $\binom{p+1}{3}$ $(p-1)$-stralen rusten, en uit hunne $\binom{p+1}{3}$ collineatie-centra en hunne collineatie-stralen; worden die centra weggenomen, dan valt de conf. uiteen in $(p-1)$ polyedrale conf. $\left(\binom{p+1}{3}_{p-1}, \binom{p+1}{3}_3\right)$.

En ten slotte nog algemeener. De configuratie

$$\left(\binom{m}{n-1}_{m-n+1}, \binom{m}{n}_n\right)$$

kan door $(n-1)$ volledige $(m-n+1)$-hoeken bepaald worden, die in een $(m-n+1)$-straal beschreven worden. Zoodra $m-n$ even en $\binom{m}{n-1}$ door $m-n$ deelbaar is, levert zij, na afscheiding van eene hoofd-$\left[\binom{n+2}{n-1}:n\right]$-zijde, eene conf. $\left(\binom{m}{n-1}_{m-n}, \frac{m-n}{n}\binom{m}{n-1}_n\right)$.

Wanneer $m-n$ oneven is, en $\binom{m}{n-2}$ door m en $n-1$ deelbaar is, bezit zij neven-veel-hoeken; wordt er zulk eene afgescheiden, dan wordt zij gesplitst in de twee configuratiën

$$\left(\frac{m-n+1}{m-1}\binom{m}{n-2}\right)_{n-1}$$

en

$$\left(\frac{m-n+1}{m-n+2}\binom{m}{n-1}_{m-2n+1}, \frac{m-2n+2}{m-n+2}\binom{m}{n}_n\right)$$

Voor elke even waarde van $m-n$ levert zij configuratiën van den vorm

$$\left(n\binom{\frac{1}{2}(m+n-2)}{n-1}_{\frac{1}{2}(m-n+2)}, \frac{m-n+2}{2}\binom{\frac{1}{2}(m+n-2)}{n-1}_m\right):$$

elke daarvan valt na afscheiding van $\binom{\frac{1}{2}(m+n-2)}{n-1}$ mid-

delpunten der daarbij voorkomende $\frac{1}{2}(m - n + 2)$-stralen, uiteen in $\frac{1}{2}(m - n + 2)$ configuratiën

$$\left(\binom{\frac{1}{2}(m+n-2)}{n-2}_{\frac{1}{2}(m-n+2)}, \binom{\frac{1}{2}(m+n-2)}{n-1}_{n-1}\right);$$

deze zijn gelijksoortig met de oorspronkelijke configuratie

$$\left(\binom{m}{n-1}_{m-n+1}, \binom{m}{n}_{n}\right).$$

Ook de plaatsing van deze verhandeling in uwe werken durven uwe Rapporteurs, wegens hare belangrijkheid, zoowel wat uitkomsten als wat methode aangaat, gerustelijk aanraden.

Leiden en Hilversum.
November 1888.

D. BIERENS DE HAAN.
F. J. VAN DEN BERG.

OVER EENE GROEP VAN REGELMATIGE VLAKKE CONFIGURATIES,

DOOR

JAN DE VRIES.



In een kort opstel „Ueber eine Gattung von Configurationen"*) toonde KANTOR aan, dat p paarsgewijze ten opzichte van een zelfde punt perspectief gelegen volledige q-hoeken aanleiding geven tot eene cf. $\left(\binom{p+q}{q}_q, \binom{p+q}{q-1}_{p+1}\right)$.

Onlangs heeft Prof. VAN DEN BERG †) bewezen, dat de graphische oplossing van een stelsel van lineaire vergelijkingen tot configuraties leidt, die tot de door KANTOR ontdekte groep behooren.

In de volgende bladzijden zal ik aantoonen, dat KANTOR's cf. regelmatig zijn en eigenschappen bezitten overeenkomende met die der vlakke polyedrale cf. §), welke mede tot de bedoelde groep moeten gerekend worden.

1. Drie driehoeken met de hoekpunten (124, 125, 126), (134, 135, 136), (234, 235, 236), welke op drie in een

---

*) *Sitz. ber. d. Wiener Akad.* Bd. 80.

†) „Over de graphische oplossing van een stelsel lineaire vergelijkingen" (*Versl. en Med.* 3de reeks, Deel IV, bl. 196) en „De constructiefiguur voor de oplossing van een stelsel lineaire vergelijkingen, beschouwd als configuratie" (*Versl. en Med.* 3de reeks, Deel V, bl. 267).

§) Zie mijn opstel „Over vlakke polyedrale configuraties" (*Versl. en Med.* 3de reeks, Deel VI bl. 8).

punt 123 samenkomende rechten 1234, 1235, 1236 rusten, bepalen drie collineatieassen $i\,456$ ($i = 1, 2, 3$) met de snijpnnten $i\,45$, $i\,56$, $i\,46$ der paren van homologe zijden ($ik\,4$, $ik\,5$) en ($il\,4$, $il\,5$), ($ik\,5$, $ik\,6$) en ($il\,5$, $il\,6$), ($ik\,4$, $ik\,6$) en ($il\,4$, $il\,6$). Nu is 124 het snijpunt van (145, 245) met (146, 246), 234 van (245, 345) met (246, 346), 134 van (345, 145) met (346, 146): de lijn 1234, welke 124, 234 en 134 draagt, is dus de collineatieas der driehoeken (145, 245, 345) en (146, 246, 346) zoodat de lijnen 1456, 2456, 3456, die de homologe hoekpunten vereenigen, in een punt 456 samenkomen, dat de beschouwde figuur tot eene cf. (20_3, 15_4) *) aanvult.

1234	123	124	134	234	
1235	123	125	135	235	
1236	123	126	136	236	
1245	124	125	145	245	
1345	134	135	145	345	
2345	234	235	245	345	. . . (A)
1256	125	126	156	256	
1356	135	136	156	356	
2356	235	236	256	356	
1246	124	126	146	246	
1346	134	136	146	346	
2346	234	236	246	346	
1456	145	146	156	456	
2456	245	246	256	456	
3456	345	346	356	456	

*) De 20 Steinerpunten en de 15 Plückerlijnen van eenen in eene K_2 beschreven volledigen zeshoek vormen zulk eene (20_3, 15_4), terwijl de 15 Salmonpunten met de 20 Cayleylijnen tot de reciproke (15_4, 20_3) $\equiv$ π_6 vereenigd zijn.

Uit tabel A blijkt, dat de gevonden $(20_3, 15_4)$ regelmatig is, zoodat elk punt $i\,k\,l$ kan beschouwd worden als het snijpunt van de collineatieassen behoorende tot drie driehoeken, waarvan de hoekpunten op drie in het punt $j\,m\,n$ samenkomende lijnen rusten; de beide punten $i\,k\,l$ en $j\,m\,n$ zal ik „geassocieerde'' punten der eerste orde (a_1) noemen in overeenstemming met de geassociëerde lijnen der polyedrale cf. $\pi_6 \equiv (15_4, 20_3)$, *) welke met de beschouwde $(20_3, 15_4)$ reciprook verwant is.

2. Zijn in een vierstraal 1234, 1235, 1236, 1237 met middelpunt 123 drie volledige vierhoeken met de hoekpunten $i\,k\,4$, $i\,k\,5$, $i\,k\,6$, $i\,k\,7$ $(i, k = 1, 2, 3)$ beschreven, dan is 123 achtereenvolgens in 4 cf. $(20_3, 15_4)$ geassociëerd met de punten 456, 457, 467, 567. Nu gaan de zijden der driehoeken $1\,i\,7$, $2\,i\,7$, $3\,i\,7$, $(i = 4, 5, 6)$ door de met 1237 incidente punten 127, 137, 237; de 3 door die driehoeken bepaalde collineatiecentra 457, 467, 567 behooren dus met de genoemde 12 punten tot eene polyedrale $(15_4, 20_3)$ waarin de door 457, 467 en 567 getrokken lijn 4567 met 1237 is geassociëerd †). In eene tweede $(15_4, 20_3)$ is de lijn 1236 geassociëerd met eene rechte, welke de punten 456, 476 en 576 draagt: de vier punten 456, 457, 467, 567 zijn derhalve collineair.

De lijn 4567 vormt nu met de elementen der reeds voorhanden figuur eene cf. 35_4, welke uit het centrum 123, de 12 hoekpunten der 3 volledige vierhoeken, de 18 snijpunten van homologe zijden en de 4 met 123 geassociëerde punten bestaat, welke elk incident zijn met 4 der volgende 35 lijnen: de 4 stralen door 123, de 18 zijden der 4hoeken, de 12 collineatieassen, welke tot de 12 paren van driehoeken behooren, en de complementaire lijn 4567; elk hoekpunt

*) „Over vlakke polyedrale conf." en „Ueber gewisse ebene Configurationen" (*Acta Math.* 12 bl. 70).

†) Deze notatie der bedoelde $(15_4, 20_3)$ wordt uit de in mijn opstel „Over vlakke polyedrale cf." gebezigde gevonden door achter elke combinatie der 2de en 3de klasse van de cijfers 1, 2, 3, 4, 5, 6 het cijfer 7 te plaatsen.

is n.l. met een straal en 3 zijden, elk homoloog snijpunt met 2 zijden en 2 assen, elk met 123 geassociëerd punt met 3 assen en de lijn 4567 incident. Daar de elementen dezer 35_4 door de combinaties der 3[de] en 4[de] klasse van 7 cijfers worden voorgesteld, is de cf. regelmatig, en vormen hare punten en lijnen 35 paren »complementaire" elementen $i\,j\,k$ en $l\,m\,n\,p$. Dezelfde cf. ontstaat blijkbaar uit 3 volledige vierzijden, die ten opzichte van 4 collineaire punten in lineale *) ligging verkeeren. †) Het complementaire element (der eerste orde) van een punt of lijn der 35_4 zal steeds door c_1 worden aangeduid.

3. Worden drie volledige vijfhoeken met de hoekpunten $i\,k\,4$, $i\,k\,5$, $i\,k\,6$, $i\,k\,7$, $i\,k\,8$ ($i, k = 1, 2, 3$) op 5 door het punt 123 getrokken lijnen $123\,i (i = 4, 5, 6, 7, 8)$ geplaatst, dan is 123 in 5 cf. 35_4 complementair tot evenzoovele lijnen 4567, 4568, 4578, 4678, 5678, welke paarsgewijze met de punten $i\,k\,l$ ($i, k, l = 4, 5, 6, 7, 8$) incident zijn, en met hen eene volledige vijfzijde vormen. Het punt 123, de 15 hoekpunten, de 30 homologe snijpunten en de 10 met 123 geassociëerde punten zijn nu elk met 5 lijnen incident, en wel elk hoekpunt met een straal en 4 zijden, elk homoloog snijpunt met 2 zijden en 3 assen, elk geassociëerd punt met 3 assen en 2 complementaire lijnen, terwijl de 5 stralen, de 30 zijden, de 30 assen en de 5 complementaire lijnen elk 4 der voornoemde punten dragen. De door deze punten en lijnen gevormde $(56_5, 70_4)$, waarvan de regelmatigheid uit hare notatie volgt, ontstaat ook uit 4 ten opzichte van 4 collineaire punten lineaal ge-

---

*) Twee n-zijden liggen »lineaal," wanneer de n snijpunten van overeenkomstige zijden op eene rechte geplaatst zijn. (Zie SCHRÖTER, Ueber das Fünfflach und Sechsflach, CRELLE C., bl. 238).

†) De 35_4, welke door de 15 Salmonpunten, de 20 Steinerpunten, de 15 Plückerlijnen en de 20 Cayleylijnen van den volledigen Pascalzeshoek wordt gevormd, is met de gevonden cf. gelijksoortig; zij kan gesplitst worden in de boven aangehaalde $(20_3, 15_4)$ der Steinerpunten en Plückerlijnen en de $(15_4, 20_3)$ der Salmonpunten en Cayleylijnen.

plaatste vierzijden. Hare lijnen kunnen in 35 paren *i k l m*, *n o p q* gerangschikt worden, welke ik geassocieërde paren der 2[de] orde zal noemen; waar het noodig is, duid ik *n o p q* aan als de a_2 van *i k l m*.

4. Draagt de vierstraal 12345, 12346, 12347, 12348 met centrum 1234 vier volledige vierhoeken met de hoekpunten *i k l* 5, *i k l* 6, *i k l* 7, *i k l* 8 (i, k, l = 1, 2, 3, 4), dan komt 1234 in 4 cf. 35_4 voor. De punten 1238, 1248, 1348, 2348 zijn resp. met de zijden 1238 *i*, 1248 *i*, 1348 *i*, 2348 *i*, (i = 5, 6, 7) van 3 volledige vierzijden incident en bepalen met deze eene in de geconstrueerde figuur begrepen 35_4, waarin de lijn 12348 complementair is tot het snijpunt 5678 der lijnen 15678, 25678, 35678, 45678 *), welke juist complementair zijn met het punt 1234 in de 4 cf. 35_4, waartoe dit punt behoort. Door samenvoeging van deze 4 cf. ontstaat dus eene figuur met 70 punten (1234, 16 hoekpunten, 36 homologe snijpunten, 16 punten a_1 en het punt 5678, dat ik, in overeenstemming met het slot van § 3, het geassocieërde punt a_2 der tweede orde van 1234 noem) en 56 lijnen (4 stralen, 24 zijden, 24 assen, 4 complementaire lijnen), dus eene (70_4, 56_5), die blijkbaar reciprook verwant is met de (56_5, 70_4) van § 3.

Vier vijfhoeken met de hoekpunten *i k l p*, waar i, k, l = 1, 2, 3, 4 en p = 5, 6, 7, 8, 9, geven aanleiding tot 5 cf. (70_4, 56_5), wanneer zij beschreven zijn in den vijfstraal 1234 *i* (i = 5, 6, 7, 8, 9); bij 1234, het middelpunt van den vijfstraal, behooren dus 5 punten a_2, nl. 5678, 5679, 5689, 5789, 6789. De punten 1239, 1249, 1349, 2349 liggen op de zijden 1239 *i*, 1249 *i*, 1349 *i*, 2349 *i* (i = 5, 6, 7, 8) van 4 tot de figuur behoorende volledige vierzijden, waarmede zij blijkbaar eene, eveneens in de geconstrueerde figuur begrepen, (56_5, 70_4) bepalen, en waarin de punten 5679, 5689, 5789, 6789 met de a_2 van 12349 incident zijn †).

*) De notatie dezer 35_4 wordt gelijk aan de in § 2 gebruikte, wanneer men het cijfer 8 weglaat.

†) Achtervoeging van eene 9 doet de schrijfwijze voor deze cf. uit die van § 3 ontstaan.

Daar in eene andere $(56_5, 70_4)$ de punten 5678, 5698, 5798. 6798 op de a_2 van 12348 liggen, zijn de 5 bij 1234 behoorende punten a_2 incident met eene rechte 56789, welke ik de complementaire lijn der tweede orde van het punt 1234 noem en door het teeken c_2 aanduid. Zij vult de door samenstelling van de 5 cf. $(70_4, 56_5)$ gevormde figuur aan tot eene 126_5 met 1 centrum, 20 hoekpunten, 60 homologe snijpunten, 40 punten a_1, 5 punten a_2, benevens 5 stralen, 40 zijden, 60 assen, 20 lijnen c_1 en 1 lijn c_2. Daar hare elementen door de combinaties der 4[de] en 5[de] klasse van 9 getallen voorgesteld worden, is zij regelmatig en kan elk punt als centrum beschouwd worden; zijn c_2 wordt dan aangeduid door de 5 cijfers, welke in de notatie van het punt ontbreken.

5. Het voorafgaande wettigt het vermoeden, dat $(p-1)$ ten opzichte van een door het teeken $1234\ldots(p-1)$ voorgesteld punt paarsgewijze perspectief gelegen p-hoeken aanleiding geven tot eene cf. $\binom{2p-1}{p}_p$ met $\binom{p-1}{i+2}\binom{p}{i+2}$ punten a_i en $\binom{p-1}{i+2}\binom{p}{i+3}$ lijnen c_i $(i = 1, 2, 3, \ldots (p-3))$, waarbij elke lijn c_i met $(i+3)$ punten a_i incident is; dit vermoeden wordt zekerheid, wanneer aangetoond wordt, dat uit de gemaakte onderstelling het bestaan eener $\binom{2p+1}{p+1}_{p+1}$ volgt, welke bepaald is door p perspectief gelegen $(p+1)$-hoeken.

Worden $(p-1)$ volledige $(p+1)$-hoeken paarsgewijze perspectief geplaatst ten opzichte van het punt $1234\ldots(p-1)$, dan is het laatste in $(p+1)$ cf. $\binom{2p-1}{p}_p$ aan evenzoovele lijnen c_{p-3} toegevoegd, die met de op hen gelegen punten a_{p-3} eene volledige $(p+1)$zijde vormen. Zoo ontstaat eene $\left(\binom{2p}{p+1}_{p+1}, \binom{2p}{p}_p\right)$, waarvan de lijnen in $\frac{1}{2}\binom{2p}{p}$ paren kunnen gerangschikt worden, zoodat de

lijnen van elk paar samen de $2p$ tot aanduiding der elementen gebezigde getallen bevatten, en als geassocieerde lijnen a_{p-2} aan elkander zijn toegevoegd. Immers de nieuwe figuur bevat $1 + (p-1)(p+1) + \binom{p-1}{2}\binom{p+1}{2} + \binom{p-1}{3}\binom{p+1}{3} + \ldots \binom{p-1}{p-1}\binom{p+1}{p-1} = \binom{2p}{p-1} = \binom{2p}{p+1}$ punten *) en $(p+1) + (p-1)\binom{p+1}{2} + \binom{p-1}{2}\binom{p+1}{3} + \ldots \binom{p-1}{p-1}\binom{p+1}{p} = \binom{2p}{p}$ lijnen, die elk p der genoemde punten dragen en in $(p+1)$-tallen in hen samenkomen.

Elke lijn dezer cf. kan met de p volledige p-zijden, welke ten opzichte van haar in lineale ligging verkeeren, tot bepaling der cf. dienen; de bij haar behoorende lijn a_{p-2} bevat de p punten c_{p-3}, welke in evenzoovele $\binom{2p-1}{p}_p$ aan haar zijn toegevoegd.

Is verder $123 \ldots p$ het gemeenschappelijke collineatiecentrum van p volledige p-hoeken met de hoekpunten

$$\left.\begin{matrix} i_1\, i_2\, i_3 \ldots i_{p-1}\ (p+1) \\ i_1\, i_2\, i_3 \ldots i_{p-1}\ (p+2) \\ i_1\, i_2\, i_3 \ldots i_{p-1}\ (p+3) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ i_1\, i_2\, i_3 \ldots i_{p-1}\ 2p \end{matrix}\right\} (i_1, i_2 \ldots i_{p-1} = 1, 2, 3, \ldots p)$$

dan geeft de constructie der punten a_i en lijnen c_i eene figuur waarin $123 \ldots . p$ in p cf. $\binom{2p-1}{p}_p$ complementair is met de volgende p lijnen c_{p-3}:

*) Eene handelwijze om dergelijke sommaties te verrichten vindt men in het boven aangehaalde opstel van Prof. VAN DEN BERG („De constructiefiguur enz." bl. 278, 279).

$$\left.\begin{array}{l} 1, p+1, p+2, \ldots\ldots 2p \\ 2, p+1, p+2, \ldots\ldots 2p \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p, p+1, p+2, \ldots\ldots 2p \end{array}\right\}$$

Daar de $\binom{2p-1}{p}_p$, waarvan het bestaan ondersteld is, ook kan voortgebracht worden door $(p-1)$ ten opzichte van p collineaire punten lineaal geplaatste volledige p-zijden, en de zooeven genoemde lijnen c_{p-3} b. v. tot de $\binom{2p-1}{p}_p$ behooren, welke door de p collineaire punten $(i_1\, i_2\, i_3 \ldots. 2p)$ en de met hen incidente lijnen bepaald is, komen die p lijnen c_{p-3} samen in een punt $(p+1, p+2, \ldots. 2p)$, dat als c_{p-2} aan de lijn $(123\ldots.., p, 2p)$ is toegevoegd, en het met $(123\ldots.\, p)$ geassociëerde punt a_{p-2} kan genoemd worden. De figuur bevat nu

$$1 + p^2 + \binom{p}{2}^2 + \ldots. + \binom{p}{i}^2 + \ldots. + p^2 + 1 = \binom{2p}{p}$$

punten en

$$p + p\binom{p}{2} + \binom{p}{2}\binom{p}{3} + \ldots + \binom{p}{i}\binom{p}{i+1} + \ldots + p = \binom{2p}{p-1}$$

lijnen, en daar elk dezer punten met p der lijnen, elke lijn met $(p+1)$ punten incident is, vormen zij eene

$$\left(\binom{2p}{p}_p, \binom{2p}{p-1}_{p+1}\right).$$

Rusten eindelijk de hoekpunten

$$\left.\begin{array}{ll} i_1\, i_2\, i_3 \ldots i_{p-1} & p+1 \\ i_1\, i_2\, i_3 \ldots i_{p-1} & p+2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ i_1\, i_2\, i_3 \ldots i_{p-1} & 2p+1 \end{array}\right\} (i_1\, i_2 \ldots i_{p-1} = 1, 2, 3 \ldots p)$$

van p perspectief geplaatste $(p+1)$-hoeken op den $(p+1)$-straal $123 \ldots . p\, i$ $(i = p+1,\ p+2, \ldots\ 2p+1)$, dan is het centrum $123 \ldots p$ in $(p+1)$ cf. $\left(\binom{2p}{p}_p, \binom{2p}{p-1}_{p+1}\right)$ toegevoegd aan $(p+1)$ punten a_{p-2}. n.l. $k_1, k_2, k_3 \ldots k_p$ $(k_i = p, p+1, \ldots 2p+1)$. Nu gaan de zijden van p volledige tot de figuur behoorende p-zijden door de punten $(i_1\, i_2 \ldots . i_{p-1}\ 2p+1)$ der rechte $(123 \ldots p,\ 2p+1)$ en bepalen met deze eene mede in de figuur begrepen $\left(\binom{2p}{p-1}_{p+1}, \binom{2p}{p}_p\right)$, waarin de punten $(i_1\, i_2 \ldots . i_{p-1}, 2p+1)$, $(i_k = p+1, p+2, \ldots . 2p)$, op de aan $(123 \ldots . p, 2p+1)$ toegevoegde lijn a_{p-2} liggen. Hieruit volgt dat de $(p+1)$ bovengenoemde punten a_{p-2} in p-tallen collineair, dus allen op eene rechte $(p+1, p+2, \ldots . 2p+1)$ geplaatst zijn, welke als c_{p-2} bij $123 \ldots . p$ behoort. Het aantal punten der figuur bedraagt nu $1 + p(p+1) + \binom{p}{2}\binom{p+1}{2} + , \ldots = \binom{2p+1}{p}$, het aantal lijnen $(p+1) + p\binom{p+1}{2} + \binom{p}{2}\binom{p+1}{3} + \ldots . = \binom{2p+1}{p+1} = \binom{2p+1}{p}$, en daar elk dezer elementen met $(p+1)$ elementen incident is, vormen zij eene $\binom{2p+1}{p}_{p+1}$.

Op dergelijke wijze als in § 3 is gehandeld kan nu met behulp van het voorafgaande bewezen worden, dat p volledige in een q-straal beschreven q-hoeken tot eene $\left(\binom{p+q}{q}_q, \binom{p+q}{q-1}_{p+1}\right)$ aanleiding geven, welke regelmatig is, en waarvan de punten en lijnen door de combinaties der p^{de} en $(p+1)^{ste}$ klasse van $(p+q)$ getallen kunnen voorgesteld worden.

6. Daar elk der cijfers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 met 3 paren tot drietallen kan samengevoegd worden, welke onderling gescheiden punten aanduiden, bezit de boven gevonden 35_4 groepen van 7 gescheiden punten, welke ik »nevenzeven-

hoeken" noem, in tegenstelling met een hoofdveelhoek, waarvan de punten samen met alle cf. lijnen incident zijn *). Uit de volgende tabel blijkt, dat de complementaire lijnen van 7 onderling gescheiden punten der 35_4 eene »nevenzevenzijde" vormen.

Nevenzevenhoek.	Nevenzevenzijde.	
123	4567	
145	2367	
167	2345	. . . . (B)
246	1357	
257	1346	
347	1256	
356	1247	

De 28 met een nevenzevenhoek incidente lijnen der 35_4 dragen elk, behalve het punt der gescheiden groep, nog 3 cf.punten; zij gaan dus 3 aan 3 door de 28 overige cf.punten, die in 4tallen op de lijnen der nevenzevenzijde gelegen zijn. Door afzondering der elementen van (*B*) ontstaat uit 35_4 eene 28_3, waarin het punt 124 op de lijnen 1234, 1245, 1246 met de paren 134, 234; 125, 245; 126, 146 collineair is; van deze 6 punten zijn in de 35_4 de paren 234, 245; 134, 146; 125, 126 resp. door de niet in 28_3 voorkomende lijnen 2345, 1346, 1256 verbonden; van de beide andere lijnen, waarmede elk dezer 6 punten in 35_4 incident is, gaat eene naar een punt der afgezonderde lijn 1247 en eene naar een der afgescheiden punten 123, 145,

*) Nevenveelhoeken en hoofdveelzijden komen ook voor bij vlakke polyedrale cf. (Vgl. het aangehaalde opstel over dit onderwerp, § 2 en § 3).

246. De 28_3 is dus atrigonisch, d. w. z. zij bevat geen cf. driehoeken.

Tabel (C) bevat de 6 in 28_3 met 1234 verbonden lijnen met de op hen gelegen punten; de punten tusschen boogjes behooren niet tot de 28_3.

1245	124	125	245	(145)	
1345	134	135	345	(145)	
1246	124	126	146	(246)	
2346	234	236	346	(246)	. . . (C)
1347	134	137	147	(347)	
2347	234	237	247	(347)	

Van de 12 punten, welke behalve 124, 234, 134 op deze 6 lijnen gelegen zijn, worden er geen drie door eene lijn der 28_3 vereenigd: de cf. bevat dus geen uit 2 drietallen van onderling gescheiden lijnen samengestelde $(9_2, 6_3)$, *) waaraan ik den naam van »bitripel" geef, die ook voor de reciproke $(6_3, 9_2)$ past; de bedoelde 12 punten rusten paarsgewijze op 6 lijnen der 28_3, welke elk een derde, niet in (C) voorkomend, punt dragen.

»Door afscheiding van een nevenzevenhoek en de com»plementaire nevenzevenzijde ontstaat uit de regelmatige 35_4 »eene atrigonische regelmatige 28_3 zonder bitripels."

---

*) Deze, na de cf. n_3, eenvoudigste atrigonische cf. wordt door MARTINETTI aangeduid door het teeken (△). („Sopra alcune cf. piane" (*Ann. di Mat.*, Serie IIa, Deel XIV, bl. 164). Dezelfde $(9_2, 6_3)$ heb ik in mijn opstel „Over vlakke cf." (bl. 118) door het teeken A onderscheiden van de tweede mogelijke $(9_2, 6_3)$, welke twee cf. driehoeken bezit en o. a. uit de polyedrale 10_3 door afscheiding van het punt *ik* en de lijnen *ikl*, *ikm*, *ikn* en *lmn* ontstaat.

7. De lijnen der regelmatige $\left(\binom{m}{3}_{m-3}, \binom{m}{4}_4\right)$, welke met x onderling gescheiden punten incident zijn, komen drie aan drie in de overige $\binom{m}{3} - x$ punten samen, zoodra $x\,(m-3) = \binom{m}{3} - x$, dus $x = \frac{1}{6}\,m\,(m-1)$ is. Deze waarde kan x evenwel slechts voor oneven waarden van m verkrijgen, omdat dan in de tabel voor den neven—x—hoek elk der m getallen, waarvan de combinaties der 3[de] en 4[de] klasse de elementen der cf. voorstellen, met $\frac{1}{2}\,(m-1)$ uit de overige getallen gevormde paren tot de notatie voor evenveel onderling gescheiden punten kan verbonden worden, terwijl voor even waarde van m slechts $\frac{1}{2}\,(m-2)$ drietallen een bepaald getal kunnen gemeen hebben, waardoor het maximum van x dan $\frac{1}{6}\,m\,(m-2)$ wordt. Daar $\frac{1}{6}\,m\,(m-1)$ voor $m = 3\,k + 2$ geen geheel getal voorstelt, en m oneven moet zijn, vormen alleen voor $m = 6\,k + 1$ of $m = 6\,k + 3$ de lijnen der $\left(\binom{m}{3}_{m-3}, \binom{m}{4}_4\right)$, welke in $\frac{1}{6}\,m\,(m-1)$ onderling gescheiden punten samenkomen, met de overige cf. punten eene cf. $\left(\frac{1}{6}\,m\,(m-1)\,(m-3)\right)_3$, terwijl de overige lijnen der oorspronkelijke cf. met diezelfde overige punten eene cf.

$$\left(\frac{1}{6}\,m\,(m-1)\,(m-3)_{m-6}, \frac{1}{24}\,m\,(m-1)\,(m-3)\,(m-6)_4\right)$$

bepalen.

Om de hierna volgende tabel (D) voor een neventwaalfhoek der $(84_6, 126_4)$ te verkrijgen, kan men de 4 drietallen, welke het cijfer 1 gemeen hebben, willekeurig aannemen, b.v. 123, 145, 168, 179; daarna kiest men de

3 paren, welke behalve 13 met het cijfer 2 tot drietallen moeten vereenigd worden, zoo, dat de nieuwe groepen met geen der eerst aangenomen drietallen meer dan een cijfer gemeen hebben; nu is er reeds een drietal dat het cijfer 3 bevat: er moeten dus nog 3 aan toegevoegd worden, enz. Op overeenkomstige wijze is de tabel (*E*) samengesteld; daarbij blijkt, dat het niet mogelijk is te bewerken, dat de tabellen (*D*) en (*E*) meer dan de 4 drietallen 123, 145, 246, 347 met tabel (*B*) gemeen hebben.

Neventwaalfhoek der (84_6, 126_4).

123	246	347	
145	259	358	. . . (D)
168	278	369	
179	489	567	

Neven-zes-en-twintig-hoek der (286_{10}, 715_4).

123	246	347	4 8 (12)	
145	259	35 (12)	4 9 (10)	
168	27 (11)	36 (13)	4 (11) (13)	
179	28 (13)	3 8 9	5 6 (10)	. . . . (E)
1 (10) (13)	2 (10) (12)	3 (10) (11)	5 7 (13)	
1 (11) (12)	6 7 (12)	7 8 (10)	5 8 (11)	
	6 9 (11)	9 (12) (13)		

Wordt de notatie voor den nevenveelhoek steeds zoo gekozen, dat hij de punten 123, 145, 246, 347 bevat, zooals in de tabellen (*B*), (*D*) en (*E*) het geval is, dan is in de

cf. $\left(\frac{1}{6}\, m\,(m-1)\,(m-3)\right)_3$ het punt 124 collineair met de paren 134, 234; 125, 245; 126, 146. Geen der lijnen 1256, 1346, 2345, die in de oorspronkelijke cf. de paren 125, 126; 134, 146; 234, 245 vereenigen, bevat een punt van den nevenveelhoek, daar geen der punten 156, 256; 136, 346; 235, 345, welke die lijnen achtereenvolgens nog bevatten, van de punten 123, 145, 246 gescheiden is: de genoemde drie lijnen behooren niet tot de $\left(\frac{1}{6}\, m\,(m-1)(m-3)\right)_3$, zoodat deze atrigonisch is. Verder blijkt uit tabel (*C*), die ook hier van kracht is, dat de nieuwe cf. evenmin als de 28_3 $(m = 7)$ lijnen bevat, welke drie der twaalf met 124, 134, 234 verbonden punten dragen: zij heeft dus geen bitripels.

»Worden van eene $\left(\binom{6k+1}{3}_{6k-2}, \binom{6k+1}{4}_4\right)$ de punten »van een neven-$(6k^2+k)$-hoek afgezonderd, dan valt de »cf. uiteen in eene atrigonische $\left((6k^2+k)(6k-2)_3\right)$ en »eene $\left((6k^2+k)(6k-2)_{6k-5}, \frac{1}{4}(6k^2+k)(6k-2)(6k-5)_4\right)$ »Voor eene $\left(\binom{6k+3}{3}_{3k}, \binom{6k+3}{4}_1\right)$ levert evenzoo de »afscheiding der punten van een neven-$(2k+1)(3k+1)$-»hoek eene $((6k^2+3k)(6k+2))_3$ zonder cf. driehoeken »benevens eene

$$\left((6k^2+3k)(6k+2)_{3k-3}, \frac{1}{4}(6k^2+3k)(6k+2)(6k-3)_4\right).'$$

De afscheiding van de punten der tabel (*D*) geeft eene atrigonische 72_3 en eene $(72_3, 54_4)$ met 72 cf. driehoeken; in de laatste cf. is n.l. het punt 124 verbonden met de drietallen 127, 147, 247; 128, 148, 248; 129, 149, 249; van de zijden der 3 driehoeken, welke in de oorspronkelijke cf. door deze 9 punten gevormd worden, behooren er 6 tot

de 72_3, omdat zij elk met een der punten 179, 278, 489 van (D) incident zijn; de overige drie lijnen, n.l. 1289, 1478, 2479 komen in de $(72_3, 54_4)$ voor: hare punten zijn dus tritrigonisch, hare lijnen tetratrigonisch.

8. Zal eene $\left(\binom{m}{3}_{m-3}, \binom{m}{4}_4\right)$ hoofdveelzijden bezitten, dan moet het aantal punten $\binom{m}{3}$ door 4 deelbaar zijn, dus $m = 2k$ of $m = 8k + 1$. Het laatste moet verworpen worden, omdat voor m oneven elk paar der getallen van 1 tot m slechts met $\frac{1}{2}(m - 3)$ paren tot viertallen kan vereenigd worden, waardoor het aantal onderling gescheiden cf. lijnen $\frac{1}{24}\, m\,(m - 1)\,(m - 3)$ zou worden, terwijl eene hoofdveelzijde er $\frac{1}{24}\, m\,(m - 1)\,(m - 2)$ moet bevatten. Voor $m = 2k$ kunnen uit de m getallen $\frac{1}{24}\, m\,(m - 1)\,(m - 2)$ viertallen gevormd worden, als $\frac{1}{6}\, m\,(m - 1)\,(m - 2)$ door m, dus $(m - 1)\,(m - 2)$ door 6 deelbaar is; immers in de tabel der hoofdveelzijde moeten wegens de regelmatigheid der cf., alle getallen even vaak voorkomen; alleen voor $m \equiv 2$ of $m \equiv 4$ (mod. 6) kunnen de bedoelde cf. hoofdveelzijden bezitten.

De samenstelling der tabel voor eene hoofdveelzijde kan aldus geschieden: men vormt uit de getallen $2, 3, 4 \ldots . m$ op de wijze, in § 7 omschreven, eene tabel van $\frac{1}{6}(m-1)(m-2)$ drietallen, waarin deze getallen alle even vaak voorkomen, en twee drietallen niet meer dan een getal gemeen hebben; uit de groepen dezer tabel welke elk door het cijfer 1 tot viertallen worden aangevuld, kiest men de $\frac{1}{2}(m - 2)$ groepen, die het cijfer 2 bevatten, laat dit cijfer weg en vult deze

$\frac{1}{2}(m - 2)$ drietallen tot eene uit de getallen 1, 3, 4 .... m samengestelde groep van $\frac{1}{6}(m - 1)(m - 2)$ drietallen aan, daarbij zorg dragende, dat geen der viertallen, welke door toevoeging van het cijfer 2 uit deze drietallen ontstaan, met een viertal der eerste groep meer dan twee elementen gemeen heeft. Zoo voortgaande vult men de gevonden groepen aan met de viertallen, welke nog het cijfer 3, 4, ... moeten bevatten, totdat er $\frac{1}{24} m (m - 1)(m - 2)$ lijnen verkregen zijn. De beide volgende hoofdveertienzijden der $(56_5, 70_4)$ zijn op deze wijze bepaald:

1234	5678	
1256	3478	
1278	3456	
1357	2468	. . . (F)
1368	2457	
1458	2367	
1467	2358	

1235	4678	
1247	3568	
1268	3457	
1348	2567	. . . (G)
1367	2458	
1456	2378	
1578	2346	

(F) en (G) bestaan elk uit 7 paren geassociëerde lijnen a_2, en hebben geen lijn gemeen; het is niet moeielijk om na te gaan, dat uit de 42 niet tot (F) of (G) behoorende cf. lijnen geen derde hoofdveertienzijde kan gevormd worden.

Wordt uit de (56_5, 70_4) eene hoofd-14-zijde weggelaten, dan ontstaat eene 56_4, waarin elk punt tot 18 cf. driehoeken behoort, in tegenstelling met de (56_5, 70_4), waar dit aantal 30 bedraagt. Door afzondering van twee, evenals (F) en (G) onafhankelijke, hoofdveertienzijden komt eene (56_3, 42_4) te voorschijn met 9 cf. driehoeken in elk punt.

Voor eene regelmatige (120_7, 210_4) kunnen hoofddertigzijden aangewezen worden; de afzondering van zulk eene groep levert eene (120_6, 180_4) met 45 cf. driehoeken in elk punt, tegen 63 in de oorspronkelijke cf.

Hoofd-dertig-zijde der (120_7, 210_4).

1234	1389	2358	257(10)	378(10)	
1256	1458	236(10)	2689	456(10)	
1278	1469	2379	3457	4789	....(H)
129(10)	147(10)	2459	3468	5678	
135(10)	1579	2467	349(10)	589(10)	
1367	168(10)	248(10)	3569	679(10)	

» Eene $\left(\binom{6k+2}{3}_{6k-1}, \binom{6k+2}{4}_4\right)$ bezit hoofdveelzijden,
» bestaande uit $\frac{1}{4}\binom{6k+2}{3}$ lijnen; de afscheiding van zulk
» eene groep levert eene $\left(\binom{6k+2}{3}_{6k-2}, \frac{3k-1}{2}\binom{6k+2}{3}_4\right)$
» waarin elk punt tot $3\binom{6k-2}{2}$ cf. driehoeken behoort,
» terwijl dit aantal voor elk punt der oorspronkelijke cf.
» $3\binom{6k-1}{2}$ bedraagt.

»Evenzoo ontstaat uit eene $\left(\binom{6k+4}{3}_{6k+1}, \binom{6k+4}{4}_4\right)$ »door afzondering van eene uit $\frac{1}{4}\binom{6k+4}{3}$ lijnen gevormde »hoofdveelzijde een $\left(\binom{6k+4}{3}_{6k}, \frac{3k}{2}\binom{6k+4}{3}_4\right)$ met $3\binom{6k}{2}$ »cf. driehoeken in elk punt in plaats van $3\binom{6k+1}{2}$ in »elk punt der oorspronkelijke cf."

9. De cf. 56_4, welke in de $(56_5, 70_4)$ begrepen is, bezit nevenachthoeken. Immers door het vervallen van de lijnen 1234, 5678 der hoofdveertienzijde zijn de punten 123, 124, 134, 234, 567, 568, 578, 678 in de 56_4 onderling gescheiden; de overige 48 punten worden dubbel geteld, als elke der 32 in deze 8 punten samenkomende lijnen met 3 punten incident gerekend wordt; zij bepalen dus met die 32 lijnen eene $(48_2, 32_3)$, terwijl de overige lijnen der 56_4 met dezelfde punten eene $(48_2, 24_4)$ vormen.

Evenzoo valt de $(120_6, 180_4)$, welke door afzondering van eene hoofddertigzijde uit $(120_7, 210_4)$ ontstaat, door het weglaten van den uit de punten 123, 124, 134, 234, 157, 159, 179, 579, 168, 16(10), 18(10), 68(10) samengestelden neventwaalfhoek, uiteen in eene $(108_2, 72_3)$ en eene 108_4.

Zal de cf. $\left(\binom{m}{3}_{m-4}, \frac{m-4}{4}\binom{m}{3}_4\right)$, waartoe de cf. 56_4 en $(120_6, 180_4)$, als bizondere gevallen behooren, eene neven-x-hoek bezitten, welke tot eene splitsing der cf. aanleiding geeft, dan moet $3x(m-4) = 2\left(\binom{m}{3} - x\right)$ zijn, dus $x = m(m-1)(m-2) : 3(3m-10)$. Nu volgt uit $81x = 9m^2 + 3m + 28 + 280 : (3m - 10)$ dat $(3m-10)$ een deeler van 280 moet wezen, die $\equiv 2 \pmod 3$ is; aan deze voorwaarde voldoen de deelers 2, 5, 8, 14, 20, 35, 56, 140, waardoor $m = 4, 5, 6, 8, 10, 15, 22$ of 50 en tevens x een geheel getal wordt. Maar m moet $\equiv 2$ of $\equiv 4 \pmod 6$ zijn, en daar $m = 4$ hier vervalt, kan de bedoelde

splitsing alleen uitgevoerd worden, wanneer $m = 8, 10, 22$ of 50 is. *)

10. Eene hoofdveelzijde der cf.

$$\left(\frac{1}{6}\, m\,(m-1)(m-3)_{m-6},\ \frac{1}{24}\, m\,(m-1)(m-3)(m-6)_4\right),$$

welke, zoodra $m \equiv 1$ of $\equiv 3$ (mod. 6) is, door splitsing uit de $\left(\binom{m}{3}_{m-3}, \binom{m}{4}_4\right)$ (§ 7) ontstaat, moet uit $m\,(m-1)\,(m-3) : 24$ lijnen bestaan, die in hun notatie samen elk der getallen van 1 tot m even vaak bevatten, zoodat $\frac{1}{6}\,(m-1)(m-3)$ een geheel getal moet zijn, en dit is het geval voor de zooeven genoemde waarden van m. De mogelijkheid voor zulk eene hoofdveelzijde blijkt verder uit het feit, dat m getallen $\binom{m}{2}$ paren vormen en elk paar met $\frac{1}{2}\,(m-3)$ uit de overige getallen samengestelde paren kan verbonden worden, waardoor het aantal lijnen $\frac{1}{24} m\,(m-1)(m-3)$ wordt. Het vervaardigen der tabellen voor de hier bedoelde hoofdveelzijden, waarbij de opmerking, in § 8 gemaakt, geldig blijft, wordt daardoor eenigzins bemoeilijkt, dat de viertallen niet uit alle combinaties der 4[de] klasse van m getallen kunnen gekozen worden, daar immers een deel dezer combinaties de notatie voor de lijnen der $\left(\frac{1}{6} m\,(m-1)(m-3)\right)_3$ vormt. Bij het opmaken der volgende tabel, welke eene hoofdachttienzijde der $(72_3, 54_4)$ voorstelt, die door het weglaten van den neven-12-hoek (D) uit de $(84_6, 126_4)$ ontstaat, kwamen b v. de lijnen van de vormen $123a$, $145b$, $168c$, $179d$, $246e$,

---

*) Ten gevolge van eene rekenfout had ik de beide laatste waarden over het hoofd gezien; Prof. VAN DEN BERG had de welwillendheid mijne aandacht hierop te vestigen.

259f, 278g, 489h, 347i, 358j, 369k, 567l niet in aanmerking, omdat deze 72 lijnen de cf. 72_3 bepalen.

Hoofd-achttien-zijde der $(72_3,\ 54_4)$.

1247	1469	2679
1256	1578	3456
1289	2349	3789 . . . (I)
1348	2357	4579
1359	2368	4678
1367	2458	5689

Door verwijdering van dit achttiental ontstaat uit de bedoelde $(72_3,\ 54_4)$ eene atrigonische $(72_2,\ 36_4)$; immers van de lijnen 1289, 1489, 2489, welke de in $(84_6,\ 126_4)$ met 124 verbonden punten 128, 129; 148, 149; 248, 249 dragen, is de eerste als lijn van groep (I) vervallen, terwijl de beide overige tot de 72_3 behooren.

»Door afscheiding van $\left(\frac{1}{24} m\,(m-1)\,(m-3)\right)$ onderling »gescheiden lijnen kan uit de

»$\left(\frac{1}{6} m\,(m-1)\,(m-3)_{m-6},\ \frac{1}{24} m\,(m-1)\,(m-3)\,(m-6)_4\right)$,

»$(m = 6k+1$ of $m = 6k+3)$ eene cf.

»$\left(\frac{1}{6} m\,(m-1)\,(m-3)_{m-7},\ \frac{1}{24} m\,(m-1)\,(m-3)\,(m-7)_4\right)$

»worden afgeleid.'' *)

11. De lijnen $1\,i\,k\,l$, $2\,i\,k\,l$, $3\,i\,k\,l$, $(i, k, l = 4, 5, 6, 7, 8)$ bepalen met de op hen geplaatste punten $1\,i\,k$, $2\,i\,k$,

*) Op dergelijke wijze levert de uit de polyedrale cf. π_{2m} gevormde $\left(4\binom{m}{2}_{2m-4},\ 8\binom{m}{3}_3\right)$ (*Over vl. pol. cf.* bl. 12) door afscheiding eener hoofdveelzijde eene eenvoudigere cf., mits $m \equiv o$ of $\equiv 1$ (mod. 3) zij.

$3\,ik$, ikl eene in de $(56_5, 70_4)$ begrepen $(40_3, 30_4)$, welke geacht kan worden te bestaan uit de hoekpunten van 10 drie aan drie in 10 driestralen beschreven driehoeken $(1\,ik, 2\,ik, 3\,ik)$ met hun 10 collineatriecentra en 30 stralen. De nieuwe cf. bevat 3 polyedrale cf. $\pi_5 \equiv 10_3$, waarvan de punten door $1\,ik$ (resp. $2\,ik$, $3\,ik$), de lijnen door $1\,ikl$ (resp. $2\,ikl$, $3\,ikl$) worden voorgesteld; zij bezit dus 60 cf. driehoeken, die geen der 10 centra tot hoekpunt hebben.

Evenzoo kan uit de lijnen $1\,ikl$, $2\,ikl$, $3\,ikl$, $4\,ikl$ en de punten $1\,ik$, $2\,ik$, $3\,ik$, $4\,ik$, ikl $(i, k, l = 5, 6, 7, 8, 9, 10)$ eene 80_4 samengesteld worden, die deel uitmaakt van eene $(120_7, 210_4)$ en bepaald is door de hoekpunten, collineatiecentra en stralen van 15 drie aan drie in 20 vierstralen beschreven vierhoeken; na verwijdering van de 20 centra ontaardt zij in 4 polyedrale $\pi_6 \equiv (15_4, 20_3)$.

» De lijnen

$$\text{»} jikl \;\; (j = 1, 2, 3, \ldots, p-1 \text{ en } i, k, l = p, p+1, \ldots 2\,p)$$

» vormen met de punten jik en ikl eene in de

$$\text{»} \left(\binom{2p}{3}_{2p-3}, \binom{2p}{4}_4 \right) \text{ begrepen } \left(4 \binom{p+1}{3}_{p-1}, (p-1) \binom{p+1}{3}_4 \right)$$

» welke uit de hoekpunten van $\binom{p+1}{2}$ drie aan drie op

» $\binom{p+1}{3}$ $(p-1)$ stralen rustende $(p-1)$-hoeken met hunne

» collineatiecentra en stralen is samengesteld, en na afscheiding van $\binom{p+1}{3}$ centra in $p-1$ polyedrale $\pi_{p+1} \equiv$

$$\text{»} \left(\binom{p+1}{2}_{p-1}, \binom{p+1}{3}_3 \right) \text{ uiteen valt.''}$$

12. De beschouwingen der voorgaande §§ kunnen gemakkelijk worden uitgebreid tot alle cf. $\left(\binom{m}{n-1}_{m-n+1}, \binom{m}{n}_n \right)$, die de eigenschap bezitten, dat hunne punten en lijnen door

de combinaties der $(n-1)^{ste}$ en n^{de} klasse der getallen van 1 tot m kunnen voorgesteld worden, waarmede samenhangt dat elk punt met de hoekpunten der $(n-1)$ volledige $(m-n+1)$-hoeken, waarmede het verbonden is, de cf. volkomen bepaalt.

Zal zulk eene cf. hoofdveelzijden bezitten, dan moet in de eerste plaats $\binom{m}{n-1}$, het aantal harer punten, door n deelbaar zijn, daar elke cf. lijn n punten draagt; ten tweede moet $\binom{m}{n-1}$ ook een veelvoud van m zijn, daar immers de tabel der hoofdveelzijde $\binom{m}{n-1}$ getallen, en elk der m getallen even vaak, bevat; ten derde moet $(m-n)$ even wezen, want twee gescheiden lijnen kunnen hoogstens $(n-2)$ getallen gemeen hebben, en elke der $\binom{m}{n-2}$ groepen van $(n-2)$ getallen vormt met $\frac{m-n+2}{2}$ of $\frac{m-n+1}{2}$ uit de overige getallen samengestelde paren n-tallen, zoodat het aantal onderling gescheiden lijnen slechts voor even waarden van $(m-n+2)$ gelijk wordt aan het vereischte getal $\binom{m}{n-1}:n$.

Eene $\left(\binom{m}{n-1}_{m-n+1}, \binom{m}{n}_n\right)$ van de bedoelde soort zal door het afscheiden van x onderling gescheiden punten in twee cf. ontaarden, wanneer de in x zoodanige punten samenkomende lijnen in $(n-1)$-tallen met de overige $\binom{m}{n-1}-x$ punten incident zijn, zoodat $(m-n+1)x=\binom{m}{n-1}-x$ en $x=\binom{m}{n-1}:(m-n+2)=\binom{m}{n-2}:(n-1)$ wordt.

Daar in de tabel voor den nevenveelhoek elk der m voor de notatie der cf. gebezigde getallen even dikwijls voorkomt,

moet $\binom{m}{n-2}$ ook door m deelbaar zijn. Ten slotte kan evenals boven aangetoond worden, dat alleen voor even waarden van $(m-n+3)$ een $\left(\binom{m}{n-2} : n-1\right)$-tal punten kan gevonden worden, die niet meer dan $(n-3)$ getallen gemeen hebben.

Is $(m-n)$, dus ook $(m+n)$ even, dan vormen de $\frac{m-n+2}{2}\binom{\frac{1}{2}(m+n-2)}{n-1}$ lijnen met de notatie $i\,k_1\,k_2 \ldots k_{n-1}$, (waar $i = 1, 2, 3, \ldots \frac{1}{2}(m-n+2)$ en $k_1, k_2, \ldots k_{n-1}$ uit de getallenreeks $\frac{m-n+4}{2}, \frac{m-n+6}{2}, \ldots m$ gekozen worden), met de $\frac{1}{2}(m-n+2)\binom{\frac{1}{2}(m+n-2)}{n-2}$ punten $i\,k_1\,k_2 \ldots k_{n-2}$ en de $\binom{\frac{1}{2}(m+n-2)}{n-1}$ punten $k_1 k_2 \ldots k_{n-1}$ eene cf., die uit de hoekpunten van $\binom{\frac{1}{2}(m+n-2)}{n-2}$ in $(n-1)$-tallen op $\frac{1}{2}(m-n+2)$-stralen rustende $\frac{1}{2}(m-n+2)$-hoeken, de middelpunten dier veelstralen en de genoemde stralen bestaat. Door het wegnemen van deze middelpunten valt deze cf. uiteen in $\frac{1}{2}(m-n+2)$ cf., waarvan de punten en lijnen, na weglating van het getal i uit hunne notatie, door de combinaties der $(n-2)^{\text{de}}$ resp. $(n-1)^{\text{ste}}$ klasse van $\frac{1}{2}(m+n-2)$ getallen worden voorgesteld, zoodat zij tot de groep van cf. behooren, waarover dit opstel handelt.

De uitkomsten der beschouwingen van deze § kunnen aldus samengevat worden:

»De regelmatige $\left(\binom{m}{n-1}_{m-n+1}, \binom{m}{n}_{n}\right)$, welke door $(n-1)$ »in een $(m-n+1)$-straal beschreven volledige $(m-n+1)$-»hoeken bepaald is, levert door afzondering van eene hoofd-»veelzijde eene $\left(\binom{m}{n-1}_{m-n}, \frac{m-n}{n}\binom{m}{n-1}_{n}\right)$, zoodra $(m-n)$ »even en $\binom{m}{n-1}$ door m en door n deelbaar is.

»Zij kan na de verwijdering van een nevenveelhoek in twee »cf., nl. eene $\left(\frac{m-n+1}{n-1}\binom{m}{n-2}\right)_{n-1}$ en eene

»$\left(\frac{m-n+1}{m-n+2}\binom{m}{n-1}_{m-2n+2}, \frac{m-2n+2}{m-n+2}\binom{m}{n}_{n}\right)$

»gesplitst worden, wanneer $(m-n)$ oneven en $\binom{m}{n-2}$ door »m en $(n-1)$ deelbaar is.

»Voor elke even waarde van $(m+n)$ geeft zij aanleiding tot »cf. $\left(n\binom{\frac{1}{2}(m+n-2)}{n-1}_{\frac{1}{2}(m-n+2)}, \frac{m-n+2}{2}\binom{\frac{1}{2}(m+n-2)}{n-1}_{n}\right)$, »die elk, na afzondering van $\binom{\frac{1}{2}(m+n-2)}{n-1}$ punten, in »$\frac{1}{2}(m-n+2)$ cf. $\left(\binom{\frac{1}{2}(m+n-2)}{n-2}_{\frac{1}{2}(m-n+2)}, \binom{\frac{1}{2}(m+n-2)}{n-1}_{n-1}\right)$ »ontaarden, welke met de oorspronkelijke $\left(\binom{m}{n-1}_{m-n+1}, \binom{m}{n}_{n}\right)$ »gelijksoortig zijn.''

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 29 December 1888.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voorzitter, SCHOUTE, KAPTEYN, BIERENS DE HAAN, HOFFMANN, HOEK, ZEEMAN, ZAAIJER, BAEHR, MARTIN, VAN RIEMSDIJK, FRANCHIMONT, MAC GILLAVRY, STOKVIS, LORENTZ, ENGELMANN, PLACE, J. A. C. OUDEMANS, VAN DER WAALS, HUBRECHT, GRINWIS, MULDER, FORSTER, RAUWENHOFF, PEKELHARING, BEHRENS, KAMERLINGH ONNES en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris; van de Letterkundige Afdeeling de Heeren: BEETS, BOOT, CHANTEPIE DE LA SAUSSAYE en DE LOUTER.

— Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1°. de gedeputeerde Staten van Friesland te Leeuwarden, 29 November 1888; 2°. J. WILLEMS, te Leuven, 26 November 1888; 3°. den Secretaris der Société mathématique de France te Parijs, 22 November 1888; 4°. den Secretaris der Société philomatique te Parijs, 24 November 1888; 5°. den Secretaris der Académie des Sciences, Arts et belles-Lettres te Dyon, 24 November 1888; 6°. A. DAYREMONT, Secretaris der Société pour l'encouragement des Sciences,

des Lettres et des Arts te Duinkerken, 1888; 7⁰. J. G. Tait, Secretaris der royal Society te Edinburg, 2 November 1888; 8⁰. H. Strebel, Archivaris van het naturwissenschaftlicher Verein te Hamburg, 1888; 9⁰. C. Messer, Secretaris van het naturwissenschaftlicher Verein te Bremen, 1888; 10⁰. H. Bruns, Bibliothecaris van de astronomische Gesellschaft te Leipzig, 20 November 1888; 11⁰. I. Auwers, Blibliothecaris van de kön. bayerische Akademie der Wissenschaften te München, 22 November 1888; 12⁰. de Redactie van Petermann's geographische Mitteilungen te Gotha, 22 November 1888; 13⁰. Conwentz, Secretaris van de naturforschende Gesellschaft te Danzig, 23 November 1888; 14⁰. Ruppel, Secretaris van het Nassauischer Altertumsverein te Wiesbaden, 24 November 1888; 15⁰. Landauer, Voorzitter van het Verein für Naturwissenschaft te Brunswijk, 28 November 1888; 16⁰. W. Valentiner, Directeur van de grossherzogliche Sternwarte te Karlsruhe, 29 November 1888; 17⁰. Richter, Bibliothekaris van het Verein für Erdkunde te Dresden, 30 November 1888; 18⁰. W. Heyd, Bibliothecaris van de königliche Bibliothek te Stuttgart, 1 December 1888; 19⁰. Barack, Bibliothecaris van de kais. Universitäts- und Landes-Bibliothek te Straatsburg, 4 December 1888; 20⁰. I. E. A. Martin, Secretaris van het Verein für Thüringische Geschichte und Altertumskunde te Jena, 9 December 1888; 21⁰. J. von Sachs, Würzburg, 1888; 22⁰. Th. Nöldeke, Straatsburg, 29 November 1888; 23⁰. H. Graf, Bibliothecaris van de Schweizerische Gesellschaft für die gesammten Naturwissenschaften te Bern, 18 December 1888; 24⁰. Schiaparelli, Secretaris der regia Lyncearum Academia te Rome, 4 December 1888; 25⁰. den Secretaris van het Institut royal des Sciences et Lettres te Milaan, 1 December 1888; 26⁰. I. Bassa, Secretaris der Académie royale des Sciences te Turijn, 3 December 1888; 27⁰. D. Chiloni, Directeur van de Biblioteca nazionale centrale te Florence, 3 December 1888; 28⁰. H. Gylden, Stockholm, 28 November 1888; 29⁰. E. de Regel, Directeur van den Jardin impérial de Botanique te St. Petersburg, 29 November 1888; 30⁰. M. Barcena, Directeur van het Observatorio

meteorologico central te Mexico, 23 October 1888; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1°. het Ministerie van Binnenlandsche Zaken te 's Gravenhage, 28 December 1888; 2°. het Ministerie van Waterstaat, Handel en Nijverheid te 's Gravenhage, 15 December 1888; 3°. den Directeur van het magnetisch en meteorologisch Observatorium te Batavia, September 1888; 4°. L. F. von Eberstein, Berlijn, 24 November 1888; 5°. Forstemann, Archivaris van de kön. sächsische Gesellschaft der Wissenschaften te Leipzig, 1 September 1888; 6°. J. C. Pilling, Directeur van de U. S. geological Survey te Washington, 29 September 1888; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— De Heeren Schols en van Diesen hebben zich schriftelijk over hunne afwezigheid verontschuldigd.

— Is ingekomen een opstel van den Heer Dr. Jan de Vries: »Over de desmische configuratie 9_3," ter opneming in de werken der Akademie. — Op verzoek van den Voorzitter, zullen daarover in de Januari-vergadering rapport uitbrengen de Heeren Bierens de Haan en van den Berg.

— Wordt gelezen een concept-antwoord, op verzoek des Voorzitters buitenstijds opgesteld door de Heeren Bosscha, van der Waals en Lorentz, op een schrijven van Z. E. den Minister van Binnenlandsche Zaken, over het plaatsen van bliksemafleiders op de Abdij te Middelburg. — Het antwoord wordt goedgekeurd en zal in afschrift aan den Minister worden meêgedeeld.

— De Heeren J. A. C. Oudemans en Kamerlingh Onnes brengen verslag uit over de verhandeling van den Heer Dr. van Rijckevorsel: »Magnetic Survey of the eastern part of Brazil". — Hulde doende aan den belangloozen ijver en de

voortvarendheid van den koenen reiziger, van wien reeds tweemaal, in de jaren 1879 en 1880, magnetische waarnemingen, in een ander werelddeel verricht, in de werken der Akademie werden opgenomen, stellen Rapporteurs, aan het slot hunner kritische beschouwingen voor, ook dezen derden arbeid eene plaats in de Verhandelingen der Akademie aan te wijzen. Aldus wordt zonder discussie besloten.

— Het opstel van Dr. Jan de Vries, te Kampen: »Eene rangschikking van het puntenveld in involutorische groepen" wordt, op voorstel van de Heeren Rapporteurs Schoute en Bierens de Haan, aangenomen voor de Verslagen en Mededeelingen.

— De Heer Hubrecht leest een opstel: »Ter nagedachtenis van wijlen het lid der Akademie Pieter Harting", en biedt dit aan voor het jaarverslag 1888. — De Voorzitter brengt den Spreker den dank der Vergadering, wier applaus hem reeds had kunnen overtuigen, dat zijne rede met groote belangstelling was aangehoord.

— De Heer Bierens de Haan biedt ter plaatsing in de Verslagen en Mededeelingen eenige brieven aan van Constantijn Huygens, den vader, aan père Mersenne.

— De Heer Franchimont biedt, uit naam van den Heer Mulder, voor de Verslagen en Mededeelingen aan twee opstellen over scheikundige onderwerpen: 1^0. Dibroombarnsteenzure aethylester, monobroommaleïnzure aethyester en wijnsteenzure aethylester, in hunne verhouding tot kaliumaethylaat; 2^0. Over de verhouding van iodium, iodoform en methyleniodide tegenover natriumaethylaat, en over iodium tegenover natriumcarbaminzuur aethyl.

— De Heer J. A. C. Oudemans bespreekt de bepaling, in 1835 door Bessel verricht, van de ligging en den teruggang van het vlak van den ring van Saturnus. Hij komt tot het besluit, dat de waarnemingen van het verdwijnen en

weder verschijnen van den ring, waaruit Bessel niet alleen de ligging der knooplijnen van gezegd vlak, maar ook den teruggang afleidde, waarvoor hij 3″,848 per jaar vond, voor het laatste doel niet toereikend waren, maar dat men den teruggang liever theoretisch moet bepalen, als wanneer men dan 0″,25 vindt.

— De Heer van de Sande Bakhuyzen biedt voor de Bibliotheek der Akademie aan een exemplaar van zijn »Rapport sur les longitudes, latitudes et azimuths" opgenomen in de »Comtes Rendus de la Session de l'Association géologique internationale à Nice, 1887" en licht enkele punten dier verhandeling nader toe.

— Daar er verder niets te verhandelen is, sluit de Voorzitter de Vergadering.

RAPPORT

OVER EEN

BRIEF DES MINISTERS VAN BINNENLANDSCHE ZAKEN,

HANDELEND OVER

HET PLAATSEN VAN BLIKSEMAFLEIDERS OP DE ABDIJ TE MIDDELBURG.

(Uitgebracht in de Vergadering van 29 December 1888)



Door den Voorzitter dezer Afdeeling werd in onze handen gesteld een brief van den Heer Minister van Binnenlandsche Zaken, d.d. 28 November 1888, N^0. 2403 Afd. K. W., waarbij de Akademie verzocht wordt hare meening te doen kennen over de plaatsing van bliksemafleiders op de Abdij te Middelburg.

Uit den inhoud van den brief en de daarbij gevoegde bescheiden blijkt, dat Gedeputeerde Staten van Zeeland wenschelijk achten de Abdij, voor zooverre zij Rijksgebouwen bevat, voor het inslaan van den bliksem te beveiligen, en voorstellen daartoe *twee* bliksemafleiders te plaatsen. De Rijksbouwkundige voor de gebouwen van onderwijs, enz., acht dit aantal onvoldoende en meent dat *twaalf* opvangstangen met onderlinge verbinding langs de nokken en *vier* afzonderlijke grondleidingen noodig zijn, een en ander aan te brengen op de plaatsen, aangeduid op twee teekeningen (een grondplan en een ontwikkelden opstand). Hij gaat daarbij uit van de bekende leer, volgens welke door een afleider de ruimte beveiligd wordt, welke onder de spits begrepen is binnen een rechten cirkelvormigen kegel, waarvan de spits des afleiders de top en een rechte hoek de tophoek is.

De Minister stelt de vraag of, nu die gebouwen niet

merkbaar boven hunne omgeving uitsteken en de zeer hooge Abdijtoren van een afleider voorzien is, het aanbrengen van meerdere afleiders wel dringend noodzakelijk is.

De Ondergeteekenden achten de beantwoording der vraag, of een gebouw door bliksemafleiders moet beschermd worden, grootendeels afhankelijk van de waarde, welke de gebouwen bezitten of bevatten; van de kansen dat door het inslaan van den bliksem een brand kan ontstaan, die niet aanstonds bedwongen wordt, en van de mogelijkheid dat grootere rampen, zooals ontploffingen, daarvan het gevolg zijn. Twee hunner hadden reeds vroeger de eer, hieromtrent hunne meening te doen kennen. (Zie het Verslag over bliksemafleiders op Rijksgebouwen te Delft, uitgebracht in de Zitting van 29 November 1879. *Versl. en Meded.* Tweede Reeks, Deel XV, bladz. 33). Naardien voor grootere rampen in dit geval wel geene vrees zal zijn, hangt de beslissing van de vraag, of het aanbrengen van bliksemafleiders hier wenschelijk is, geheel en al af van de waarde, die aan het behoud der Abdij moet worden toegekend, en van de kans, dat een door bliksem ontstane brand, door onvoldoend toezicht of onvoldoenden toestand der bluschmiddelen, eenige uitbreiding erlange.

De Ondergeteekenden meenen dat zij, die met het beheer dezer gebouwen belast zijn, het best in staat zijn hierover te oordeelen. Zij moeten alleen verklaren, dat, naar hunne meening, het minder hoog uitsteken der gebouwen boven de omgeving, bij het hieromtrent te nemen besluit slechts een zeer gering gewicht in de schaal mag leggen.

Aannemende evenwel, dat het beschermen der Abdij tegen bliksemgevaar wenschelijk wordt geacht, meenen zij dat de inrichting, door den Rijksbouwkundige voorgesteld, zonder eenigszins beteekenende vermindering der veiligheid, aanmerkelijk kan worden vereenvoudigd.

Aan den hierboven genoemden bekenden regel, die op geene voldoende gegevens der ervaring berust, kan geenszins eene zoo alles beheerschende beteekenis gehecht worden, dat men dien slechts blindelings heeft toe te passen om zeker te zijn het juiste te treffen, zonder in overdrijving te vervallen.

Trouwens, reeds volgens den regel zelven kan men hier met minder volstaan dan wordt voorgesteld. Immers, de over de nokken der daken te leggen verbindingskabel moet als een met den grond verbonden geleider worden aangemerkt, die eveneens zijn beveiligingskegel heeft en, reeds daardoor alleen, eenige der voorgestelde opvangstangen overbodig maakt. Men kan toch moeilijk een grond aanwijzen, waarom de bescherming, die eenig punt van den horizontalen kabel verleent, minder zou zijn dan die van den top der vangstang.

Het schijnt ons dan ook toe, dat het aanbrengen van een koperdraadkabel over de nokken der gebouwen, zooals in de teekeningen is aangeduid, — te beginnen ongeveer waar hij, in de doorsnede over AB, door den beschermingskegel van den Abdijtoren wordt gesneden, d. i. bij de eerste der reeks van elf vangstangen, tot even voorbij de doorsnede ST —, als eene voldoende bescherming kan gelden, en dat slechts twee vangstangen en twee afleiders met grondgeleidingen noodig zijn, namelijk de beide uiterste der door den Rijksbouwkundige voor dit deel der gebouwen voorgestelde. Het torentje bij E schijnt ons toe geene bijzondere voorziening te vereischen; het behoeft niet met een afleider te worden gewapend.

J. BOSSCHA.
J. D. v. d. WAALS.
H. A. LORENTZ.

Haarlem, Amsterdam, Leiden,
20 December 1888.

RAPPORT

OVER DE

VERHANDELING VAN Dr. **E. VAN RIJCKEVORSEL,**

GETITELD:

MAGNETIC SURVEY OF THE EASTERN PART OF BRAZIL.

(Uitgebracht in de Vergadering van 29 December 1888.)

De verhandeling, of liever het verslag van den Heer Dr. E. VAN RIJCKEVORSEL, getiteld: Magnetic Survey of the Eastern part of Brazil, kan als een vervolg beschouwd worden op de drie verslagen van denzelfden geleerde, aan Zijne Exc. den Minister van Koloniën, betreffende zijne magnetische waarnemingen van den Oost-Indischen Archipel, welke in de jaren 1879 en 1880 in de Verhandelingen dezer Akademie zijn opgenomen. De rapporten over deze drie Verslagen zijn uitgebracht in de vergadering van 1 Februari 1879 door de HH. BUYS BALLOT en STAMKART, in die van 25 October 1879 door dezelfde Heeren, en in die van 27 Maart 1880 door de Heeren BUYS BALLOT en den eerst ondergeteekende van dit rapport.

Het eerste verslag bevatte alleen de inclinatie-bepalingen, het tweede die van het magnetisch moment en de horizontale intensiteit, het derde die van de magnetische declinatie.

Dr. RIJCKEVORSEL had in die verhandeling zelf vermeld, dat en waarom het werk niet tot die volmaaktheid had gebracht kunnen worden, welke hij zich zelf ten doel had

gesteld. Ook Rapporteurs konden de aandacht vestigen op enkele zaken, die door den Schrijver waren over het hoofd gezien. Zij voegden er echter uitdrukkelijk bij dat hunne opmerkingen in geenen deele afbreuk deden aan de verdiensten, die Dr. RIJCKEVORSEL zich met zooveel opoffering verworven had. Aan zijne begeerte om de wetenschap te dienen toch dankt de Afdeeling het voorrecht, dat zij eene voldoende magnetische beschrijving van onzen Indischen Archipel van de hand van een landgenoot onder hare werken telt.

Na het afdrukken van de genoemde verhandelingen besloot Dr. RIJCKEVORSEL eene 2de bijdrage tot de kennis van het aardmagnetisme te leveren, en werd hem, zoo wij ons niet bedriegen, door ons geacht medelid BUYS BALLOT eene opneming van Oost-Brazilië voorgesteld. De thans aangeboden omvangrijke verhandeling bevat al de uitkomsten van dit onderzoek, waaraan Dr. RIJCKEVORSEL, worstelende met moeilijkheden van allerlei aard, vier jaren heeft gewijd.

De heer RIJCKEVORSEL kwam in December 1880 te Rio-Janeiro aan, vergezeld van Jhr. W. VAN ALPHEN, civiel ingenieur, die zich aan de sterrewacht te Utrecht voor het uitvoeren der sterrekundige waarnemingen had voorbereid, dit toch was een der werkzaamheden, die Dr. VAN RIJCKEVORSEL aan zijn assistent wilde opdragen.

De eerste reis geschiedde met een stoomschip, dat de Braziliaansche regeering daartoe goedgunstig had afgestaan, van Rio af langs de kust tot nabij Pará. Daar strandde het stoomschip, dat reddeloos verloren was, terwijl de opvarenden en instrumenten gered werden. Hierop volgde een gedwongen verblijf te Pará, doch ongelukkig werd hier VAN ALPHEN het slachtoffer van het klimaat.

Dr. RIJCKEVORSEL ondernam nu, alleen vergezeld van een hollandschen bediende, twee reizen naar de binnenlanden, de eene langs de rivier Itapicuru, de andere van Amaracão af, langs de Parnahyba. Die rivieren werden met stoomgelegenheid opgevaren, maar in eene boot of op een vlot weder afgevaren, en bij die afvaart werden verschillende punten bezocht.

Te Pará in Mei 1882 teruggekomen, werd Dr. RIJCKEVORSEL

door malaria gedwongen, zoo spoedig mogelijk naar Europa de wijk te nemen; doch in 1883 was hij weer terug, thans vergezeld door den heer E. ENGELENBURG, eveneens Civiel Ingenieur, met wien hij zijne eerste reis naar het binnenland maakte, n.l. (2 Aug. — 6 Sept. '83) de Capim op, een zijtak van de Tocantins: hierop volgde, (9 Sep. — 19 Oct. '83) eene reis, de Tocantins half op, tot aan de watervallen.

De heer ENGELENBURG bleef in dien tijd te Pará, even als gedurende de volgende reis van Dr. RIJCKEVORSEL, ten einde een jaar achtereen op dezelfde plaats geregelde variatiewaarnemingen omtrent het magnetisme te doen; eene dergelijke reeks toch was noodig om de op verschillende dagen en dikwijls op verschillende uren, op de vele bezochte plaatsen verrichte waarnemingen tot één zelfde tijdstip te herleiden.

Dr. RIJCKEVORSEL vertrok nu, na nog een paar punten nabij Pará bezocht te hebben, naar Rio Janeiro; en van daar 9 dagen over land, in eene noordelijke richting naar Carandahy, dat aan de San Francisco rivier gelegen is. Hier liet hij eene boot bouwen en zakte de San Francisco af, op een aantal plaatsen de magnetische elementen bepalende. Daar echter Carandahy ook per spoorwagen te bereiken was, werd eerst door een snelle reis de lengte van dit punt bepaald. Deze reis heeft in het geheel zeven maanden geduurd, maar daardoor werden ook de noodige gegevens gevonden, om de isoklinen en andere magnetische lijnen van Zuid-Amerika met eenigen graad van juistheid te trekken.

Dit was de laatste groote reis die Dr. RIJCKEVORSEL in Brazilië ondernam. Van Penedo, nabij den mond der San Francisco-rivier, keerde hij over zee naar Rio terug, en van daar, in Nov. 1884, naar Nederland, den heer ENGELENBURG achterlatende, om even als hij te Pará gedaan had, ook te Nicterohy, nabij Rio, een jaar lang geregelde waarnemingen te doen.

Men lette hierbij op het breedteverschil van Pará en Nicterohy, eerstgenoemd punt ligt op slechts 2° ZB. Nicterohy op 23°; het eene nabij de noordelijke, het andere aan de zuidelijke grens van het te onderzoeken gebied, en het was dus voor de reductie der waarnemingen tot één

tijdstip van veel belang, de dagelijksche variaties voor deze beide uiterste punten te kennen.

In een tweede gedeelte noemt Dr. Rijckevorsel de gebruikte instrumenten op en beschrijft hij de gevolgde methoden van waarneming, zoowel voor de astronomische, als de magnetische bepalingen. De heer van Alphen had nog met het universaal-instrument van Bamberg geobserveerd, waarvan de mikroskopen ééne sekonde aangaven, dat dus meer dan voldoende nauwkeurig was. Op de zeereis van Rio tot Pará, werden de lengtebepalingen aangesloten aan de door de Amerikaansche marine bepaalde telegrafische lengten van Rio, Bahia, Pernambuco en Pará, en aan die van den Franschen kolonel Mouchez, thans directeur der sterrewacht te Parijs.

Maar na den dood van van Alphen werd het universaal-instrument niet meer gebruikt; de kist, waarin het geborgen was, was te groot om in de booten geborgen te worden, en Dr. Rijckevorsel deed zijne astronomische waarnemingen met een prismacirkel. Hoogten, door middel van een kwikbak, waren dus de waarnemingen, die voor het bepalen van lengte en breedte moesten dienen. Daar de lengten door middel der chronometers bepaald moesten worden, die, dit is nog niet vermeld, grootendeels door de Nederlandsche Regeering waren ter leen verstrekt, werd het verblijf op elke plaats, op weinige uitzonderingen na, zoolang gerekt, tot er een gang der chronometers kon afgeleid worden. De meerdere of mindere overeenkomst, tusschen al de gangen, gedurende die lange reis door denzelfden tijdmeter bezeten, was een maatstaf van het *gewicht*, dat aan elken tijdmeter moest worden toegekend. Met veel zorg werd voor elke waarnemingsplaats de waarschijnlijkste lengte afgeleid; het komt rapporteurs echter nog twijfelachtig voor of de onderstelling, de variaties van den gang als toevallige afwijkingen te beschouwen, wel vrij is van alle bedenkingen, daar enkele chronometers wel degelijk eene nagenoeg eenparige verandering van den gang verraden.

Ook de breedten werden met behulp van de zon genomen. In onze zomermaanden, voor Brazilië de wintermaanden, stond de zon bij den middag laag genoeg, om met behulp

van den kwikbak de dubbele middaghoogte met den prismacirkel te meten, maar bij het naderen van den Braziliaanschen zomer kwam de zon te hoog, en werden dus waarnemingen van den voor- en namiddag verbonden om de breedte te bepalen. Daardoor viel de laatste onzekerder uit, maar daar de geografische plaatsbepaling niet de hoofdzaak was, werd over dit bezwaar heengestapt.

Rapporteurs vatten niet goed, waarom in die tijden niet van sterren gebruikt gemaakt werd voor de bepaling der breedte. De sterren van de eerste en tweede grootte kunnen met een prismacirkel met het grootste gemak worden waargenomen *), en een paar zulke hoogten nabij den meridiaan

---

*) Hier zouden in aanmerking gekomen zijn:

α	Gruis	$22^u\ 1^m$	— 47°,5
α	Pegasi	22 59	+ 14 ,6
α	Andromedae	0 2	+ 28 ,5
α	Cassiopeiae	0 34	+ 55 ,9
α	Eridani	1 33	— 57 ,8 enz.

De wijze, waarop breedte en tijd werden afgeleid, ingeval beide onzeker waren, was de volgende: met eene aangenomene breedte werd, uit de waarnemingen die daarvoor het best waren, de correctie der chronometers afgeleid, en wel uit elke waarneming afzonderlijk; daarmede uit andere waarnemingen, met inachtneming van den gang des chronometers, de breedte; met de aldus gevondene breedte werd de correctie des chronometers op nieuws berekend, enz., en dit werd zoolang herhaald als noodig bleek. Voor de noordelijke plaatsen bleek deze methode, zegt de schrijver, „exceedingly tiresome" te zijn.

Men zou hier kunnen opmerken, dat dat herhalen der berekening geheel onnoodig was; mits bij beide berekeningen slechts de noodige differentiaalquotiënten, voor het gemiddelde tijdstip der waarneminggroep, er bij berekend worden. Zij namelijk φ de aangenomene breedte, x de correctie des chronometers, en men hebbe voor die correctie gevonden:

$$x = X \ldots\ldots + a\, d\varphi$$

en met deze correctie X de breedte:

$$\Phi \ldots\ldots + b\, \partial x$$

dan is, als B de ware breedte beteekent:

$$d\varphi = B - \varphi$$

de ware correctie des chronometers:

$$x = X + a\,(B - \varphi)$$

gedaan, zouden eene nauwkeuriger breedte gegeven hebben dan de zonshoogten konden opleveren in de omstandigheden waaronder dit gedeelte der reis werd volbracht; en waarschijnlijk ook dan de uit eene kaart ontleende.

Het tweede gedeelte van het Verslag is bewerkt door den Heer ENGELENBURG, en behandelt de variatiewaarnemingen, gedaan van Sept. 1882 tot November 1883 te Pará, en van 15 April 1884 tot 31 Maart 1885 te Nicterohy bij Rio de Janeiro.

Het derde gedeelte, weder van de hand van den Heer RIJCKEVORSEL, behandelt de absolute magnetische bepalingen door hem op zijne reizen verricht, waarachter nog gevoegd is eene paragraaf over de herleiding dezer waarnemingen tot ééne zelfde epoche.

Een vierde gedeelte, bevattende meteorologische waarnemingen, besluit het geheel.

De variatiewaarnemingen betroffen enkel de declinatie. Want hoewel de drie bekende toestellen van LAMONT voor

---

en de ware breedte:

$$\Phi + a\,b\,(B - \varphi) = B$$

waaruit:

$$B - \varphi = \frac{\Phi - \varphi}{1 - a\,b}$$

of

$$B = \Phi + \frac{a\,b}{1 - a\,b}\,(\Phi - \,.).$$

De bedoelde differentiaal-quotiënten zijn, voor de tijdsbepaling door de eerste ster, als δ de declinatie en t den uurhoek beteekent, en de chronometer naar sterretijd loopt:

$$\frac{\partial x}{\partial \Phi} = \frac{\partial t}{\partial \varphi} = \frac{1}{15}\left\{\frac{tg\,\delta}{sin\,t} - \frac{tg\,\varphi}{tg\,t}\right\}$$

en voor de breedtebepaling door de tweede ster, wier declinatie $= t'$, enz.:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\,15\ tg\ Azimuth\ cos\,\varphi = +\,15\,\frac{sin\,t'}{tg\,\delta' - tg\,\varphi\,cos\,t'}.$$

Loopt de chronometer naar middelbaren tijd, dan moet de eerstgenoemde waarde nog met $\frac{365,24}{366,24}$ en de laatste met $\frac{366,24}{365,24}$ vermenigvuldigd worden.

variatiewaarnemingen van declinatie, horizontale intensiteit en inclinatie aanwezig en ook opgesteld waren, slaagde men er niet in, uit de aanwijzingen der laatste de variatie af te leiden. In het variatie-instrument voor de horizontale intensiteit wordt aan de magneetnaald eene afwijking medegedeeld door een zoogenaamden deflector, bestaande uit een houten balkje, dat iets hooger dan, doch loodrecht op de richting der magneetnaald wordt aangebracht, en waaronder op gelijke hoogte als de magneetnaald twee gelijk gerichte magneten in gelijke richting als de balk zelve zijn aangebracht; van deze beide magneten heeft dus de eene de noordpool, de ander de zuidpool naar het midden der magneetnaald gericht, en zij versterken dus elkander, door beide eene afwijking der naald naar dezelfde zijde te veroorzaken.

De variaties in de afwijking van den magneet, welke op de gewone wijze met spiegel en schaal worden afgelezen, hangen niet alleen af van de variatie der horizontale intensiteit, maar ook van de verandering der declinatie en van de verandering van het magnetisme der deflectoren met de temperatuur. Ten einde den laatsten invloed gering te maken, zijn de deflectoren gecompenseerde magneten. Het bleek nu dat deze gecompenseerde deflectoren te zwak gekozen waren om geschikte afwijkingen te geven aan de waargenomen magneetnaald, en toen zij, door het opheffen der compensatie, geschikt werden om groote afwijkingen te geven, bleken de aanwijzingen van den toestel hoofdzakelijk door temperatuurveranderingen veroorzaakt te worden, en werden de waarnemingen dus gestaakt.

Rapporteurs kunnen niet anders dan dit bejammeren en voelen zich gedrongen de vraag te opperen, of misschien verzuimd was de variatietoestellen vóór het aanvaarden der reis te bestudeeren, na ze, kunstmatig onder nagenoeg dezelfde omstandigheden gebracht te hebben als waaronder men ze voor de waarnemingen zelve wenschte te gebruiken, en of men zich, zelfs in aanmerking genomen de ongunstige toestand in Brazilië, niet wat al te spoedig heeft laten ontmoedigen, daar het toch bekend is, dat ook variometers met niet gecompenseerde deflectoren zeer bruikbaar zijn. Ook

in het waarnemen van de variatie der inclinatie slaagde men niet. De inrichting van het hiertoe dienende instrument is geheel overeenkomstig het zoo even beschrevene, maar de deflecteerende horizontale magneten worden vervangen door vertikale ijzeren stangen, aan beide zijden der magneetnaald, tegenover haar midden, op ongelijke hoogte opgehangen, zoodanig dat van de eene stang het ondereind, van de andere het boveneind nagenoeg op dezelfde hoogte der magneetnaald komt. De aarde induceert in deze stangen magnetisme, en hetzelfde heeft plaats als bij het intensiteits-variatie-instrument, nl. aan de beide zijde der naald komen verschillende polen, en afwijking der naald is het gevolg. Maar ook dit instrument weigerde te Pará zijne diensten. De vertikale composante van het aardmagnetisme bleek noch aldaar, noch later te Rio, sterk genoeg te zijn om eene voldoende afwijking te weeg brengen, en ook inclinatie-variatie-waarnemingen moesten dus worden opgegeven.

Dat de vertikale ijzeren staven op sommige plaatsen in Brazilië geen voldoende geïnduceerd magnetisme zouden verkrijgen om de variatie der inclinatie aan te geven, was te voorzien, daar de magnetische equator door Brazilië loopt, en wellicht ware eene inclinatienaald op messen, voorzien van een afleesspiegeltje, (eene zoogenaamde balans van LLOYD,) te beproeven geweest. Even als bij de horizontale variatiën ligt in dit geval de vraag voor de hand, of men niet althans tijdig voor de waarnemingen in Nicterohy nog geschikte toestellen uit Europa had kunnen laten overkomen.

Maar rapporteurs willen hier niet verder over uitweiden, daar immers hun eigenlijke taak is te adviseeren omtrent het al of niet opnemen van het Verslag van Dr. RIJCKEVORSEL, in de Werken der Akademie. De variatiewaarnemingen dan, zoowel te Pará, als te Nicterohy, die, zooals gezegd is, enkel de declinatie betreffen, zijn met alle zorg herleid en de resultaten in verschillende tabellen medegedeeld. Door vergelijking van een drietal absolute declinatie-waarnemingen van Dr. RIJCKEVORSEL met de gelijktijdig gedane aflezingen van den heer ENGELENBURG werd de constante afwijking voor een bepaald schaaldeel, en door ver-

gelijking van eene reeks bepalingen van beide heeren de waarde van elk schaaldeel bepaald.

De waarnemingen werden gewoonlijk viermaal daags verricht, maar op vaste tijden ook meermalen, o. a. den 1[en] en 15[en] der maand, 24 uren achter elkander elk uur.

Den 27 Aug. 1883 des namiddags werden storingen waargenomen, die aan de uitbarsting van Krakataoe werden toegeschreven.

De gemiddelde afwijkingen voor al de uren van het etmaal en van alle maanden des jaars zijn nu voor beide plaatsen zoo goed mogelijk afgeleid.

Als eene merkwaardigheid kan nog worden medegedeeld, dat bij onweer te Pará niet, te Rio wel storing van de declinatienaald bij elken bliksemslag werd waargenomen. Te Batavia was die invloed duidelijk waarneembaar, zooals de eerst ondergeteekende zich herinnert van Bergsma vernomen te hebben.

In het volgende gedeelte, door Dr. Rijckevorsel zelf opgesteld, en gewijd aan de absolute waarnemingen, beschrijft hij eerst de volgorde der op elke plaats gedane waarnemingen. Wij stippen alleen aan, dat, om niet te afhankelijk te zijn van toevallige lokale storende invloeden, zijne gewoonte was, altijd op twee punten, die eenige tientallen meters van elkander lagen, de waarnemingen te volbrengen.

De rust, die buiten de steden heerschte, maakte dat de waarnemingen aldaar verricht, gewoonlijk beter overeenkwamen, dan die welke in de steden gedaan werden.

Bij de beschrijving zijner declinatiewaarnemingen geeft Dr. Rijckevorsel van den daarbij gebruikten *unifilar magnetometer*, *Kew pattern*, van Elliot Brothers te Londen, eene kritiek, die wel behartiging verdient.

Reeds bij de waarnemingen in den O.-I. Archipel gedaan, werden, zooals de rapporteurs over de 3[e] verhandeling opmerkten, verschillen gevonden, die niet moesten voorkomen, indien en de instrumenten, en de waarnemings-methoden goed waren. Ook hier kwamen dergelijke verschillen voor, en Dr. Rijckevorsel noemt sommige oorzaken op, die er schuld aan kunnen zijn. Men zou wenschen dat de Repsold's den unifilar eens onderhanden namen om er werkelijk een *in-*

strument de précision van te maken. Dan zou hij er zeker ook op rekenen, dat de waarnemer een hoofd heeft, en dus het instrument door een prisma zoo inrichten, dat niet gewacht behoeft te worden, totdat de zon hoog genoeg staat om boven des waarnemers hoofd in het zonnespiegeltje te schijnen.

Bij inclinatiewaarnemingen, waarbij steeds meer dan eene naald gebruikt werd, (het inclinatorium was van JOHN DOVER te Charlton,) had Dr. RIJCKEVORSEL weer de bekende ervaring, dat elke naald, al worden de waarnemingen volgens de bekende voorschriften gecombineerd, voor en na de omkeering der polen, toch hare »persoonlijke fout" bezit. Het schijnt zeer moeielijk te zijn, althans met inclinatie-naalden, eene nauwkeurlgheid te bereiken volkomen gelijk aan die der aflezing.

De bepalingen der horizontale idensiteit werden met hetzelfde unifilar-instrument verricht, dat voor de declinatie-bepalingen diende, doch hier waren de slingertijden en de afwijkingen, die de gebruikte magneetnaald, als deflector aangewend, op twee verschillende afstanden gaf, de gegevens om er het resultaat uit af te leiden.

Er volgt nu een zoo volledig mogelijk onderzoek naar de seculaire variatie der drie magnetische elementen. Hiervoor konden dienen: 1^0. waarnemingen, door Dr. RIJCKEVORSEL zelf op twee verschillende tijdstippen gedaan; 2^0. waarnemingen, vroeger door FORSTER, LIAIS, MOUCHEZ en anderen op verschillende tijdstippen, maar op dezelfde plaatsen verricht; 3^0. waarnemingen van anderen, vroeger, en van Dr. RIJCKEVORSEL, nu verricht.

Voor de declinatie werd met vrij groote nauwkeurigheid eene jaarlijksche toeneming der westelijke declinatie van 8',5 gevonden; voor de inclinatie kwam ter nauwernood eene variatie aan den dag; althans van het zuiden naar het noorden gaande, gaf Rio + 0°,03, Bahia, Pernambuco, Ceara en Maranhão zwakke negatieve waarden, en Pará weder 0°,00, zoodat voor de geheele serie *nul* werd aangenomen. Voor de horizontale intensiteit gaven eenige goed overeen stemmende verschillen — 0,0130.

Ten slotte moeten wij er nog bijvoegen, dat voor declinatie

en horizontale intensiteit ook de dagelijksche variaties werden aangewend, ten einde al de waarnemingen op een gemeenschappelijk tijdstip, nl. den 1 Januari 1883, te 10 uur des morgens te herleiden.

Dit is geschied en hiermede zijn de eindtabellen samengesteld, die weder tot grondslag gestrekt hebben van de drie kaarten, waar de isogonen, isoklinen en isodynamen op zijn aangebracht. Deze kaarten zijn dergelijke, als bij de drie verslagen van Dr. Rijckevorsel over zijne waarnemingen in den O.-I. Archipel zijn gevoegd geweest.

Rapporteurs meenen hiermede de bespreking van de methoden en uitkomsten te kunnen eindigen. Ieder, die zich met de geregelde waarnemingen van het aardmagnetisme heeft bezig gehouden, kent de groote eischen, die daardoor aan den waarnemer worden gesteld. Reeds het volbrengen der omvangrijke berekeningen, waarbij, (dit mag voorzeker met instemming van den schrijver met een woord van waardeering worden gezegd) Dr. Rijckevorsel trouw door den heer Engelenburg werd bijgestaan, eischte eene groote volharding. Evenmin behoeven wij te zeggen, hoezeer de ontbeering op prijs is te stellen, die de heer Rijckevorsel zich moest getroosten, om in een tropisch klimaat en in eene nauwe boot reizende, bij het afzakken eener rivier op geregelde afstanden wetenschappelijke waarnemingen te verrichten.

Wij zijn overtuigd dat de Afdeeling de wijze waarop Dr. van Rijckevorsel eenige zijner beste jaren aan wetenschappelijke ontdekkingsreizen vol bezwaren heeft gewijd, van ganscher harte toejuicht, en het is ons eene aangename taak, als onze meening uit te spreken, dat de door hem in Brazilië verkregen uitkomsten een belangrijk geheel vormen en een waardig tegenhanger zijn van hetgeen hij in den Indischen Archipel heeft tot stand gebracht. Volgaarne adviseeren wij dan ook tot opneming van deze Verhandeling in de werken der Academie.

Utrecht en *Leiden*.
December 1888.

J. A. C. OUDEMANS.
H. KAMERLINGH ONNES.

VERSLAG

OMTRENT DE

VERHANDELING VAN Dr. **J. DE VRIES.**

EEN RANGSCHIKKING VAN HET PUNTENVELD IN INVOLUTORISCHE GROEPEN.

(Uitgebragt in de Vergadering van 29 December 1888.)



Een kromme K_n van den n^{den} graad is bepaald door $\frac{1}{2} n (n + 3)$ punten. Denkt men zich ter bepaling van zulk een kromme echter niet $\frac{1}{2} n (n + 3)$, maar één punt minder gegeven, dan gaan er door deze $\frac{1}{2} n (n + 3) - 1$ gegeven punten een oneindig aantal krommen K_n, die behalve de gegeven punten nog $\frac{1}{2} (n - 1) (n - 2)$ andere punten met elkaar gemeen hebben. Deze verzameling (K_n) van krommen K_n noemt men een bundel; de $\frac{1}{2} n (n - 3) - 1$ gegeven punten en de $\frac{1}{2} (n - 1) n - 2)$ verder nog aan alle krommen gemeenschappelijke punten, die door deze worden bepaald, vormen samen de n^2 basispunten van den bundel. Stelt men zich nu verder voor, dat de $\frac{1}{2} n (n + 3) - 1$ gegeven basispunten op één na een vaste ligging hebben en deze vaste punten $b_1, b_2, b_3, .. b_{\frac{1}{2} n (n + 3) - 2}$ door een bewegelijk punt β tot $\frac{1}{2} n (n + 3) - 1$ gegeven punten worden aangevuld, dan zal men bij elken stand van β een nieuw stel van $\frac{1}{2} (n - 1) (n - 2)$ bijkomende basispunten vinden; terwijl dan bovendien de groepen, telkens gevormd

door het willekeurig aangenomen punt β en de door dit punt bepaalde $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ basispunten, de eigenschappen bezitten van involutorische groepen, nl. dat een punt van het vlak slechts tot één bepaalde groep behoort en deze groep door elk harer punten bepaald is. Het onderzoek dezer involutorische groepen (β) maakt het onderwerp uit van de verhandeling, over welke wij thans verslag uitbrengen.

In de eerste plaats wijst Dr. DE VRIES — in het voetspoor tredende van Dr. EMIL WEYR — aan, wat men onder *coïncidentiepunten* γ, onder *coïncidentiegroepen* (γ), onder *vertakkingspunten* φ te verstaan heeft. Daarbij komt hij met behulp van zijn onderzoekingen omtrent involuties op kromme lijnen (*Verslagen en Mededeelingen*, reeks 3, deel 4, blz. 332) tot het besluit, dat de meetkundige plaats der coïncidentiepunten van het stelsel een kromme $C_{3(n-1)}$ van den graad $3(n-1)$ is. Deze uitkomst is niet nieuw. Want de bedoelde kromme is de kromme van JACOBI voor het net $((K_n))$ der krommen K_n, die door de $\frac{1}{2}n(n+3)-2$ vaste punten b gaan.

Wanneer een der punten β van een groep (β) een rechte lijn L doorloopt, beschrijven de overige punten dier groep een zekere kromme M; de bepaling van den aard dezer kromme vormt een der belangrijkste deelen van schrijver's onderzoek. Deze kromme M blijkt van den n^2-1sten graad te zijn en in elk der punten b een n-voudig punt te hebben. Gaat L door een der punten b, dan scheidt de kromme uit het net, die in dit punt b een dubbelpunt heeft, zich van de kromme M af; is L de vereenigingslijn van twee punten b, dan herhaalt zich dit nog eens. De eigenlijke kromme M is dus in het eerste geval van den n^2-n-1sten, in het tweede geval van den n^2-2n-1sten graad, Hieruit nu is in het algemeen af te leiden, wat de overige punten β eener groep (β) doen, als men een der punten β een kromme beschrijven laat. Als β een kromme van den m^{den} graad doorloopt, die achtereenvolgens h_i-maal door b_i gaat, dan beschrijven de overige punten β een kromme van den graad $m(n^2-1)-n\sum h_i$, die $mn-\sum h_i-h_i$-

maal door b_i gaat. Van deze meer algemeene uitkomst, die onmiddellijk uit schrijvers resultaten volgt, wordt alleen het geval beschouwd, dat β de kromme van JACOBI doorloopt, in welk geval er dan rekening mee te houden is, dat deze kromme zelf tot de bedoelde meetkundige plaats behoort. Maar de Heer DE VRIES leidt den graad dezer »*vertakkings-kromme*" V langs anderen weg af.

Een tweede hoofdpunt in de beschouwingen van Dr. DE VRIES betreft de involutie van de groepen der $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ punten β, die bij de punten eener rechte lijn behooren. Deze involutie, gelegen op de bij de lijn L behoorende kromme M, blijkt $2(n^2-1)(n-3)$ dubbelpunten te hebben; de verbindingslijnen der tot een zelfde groep behoorende punten β omhullen een kromme, waarvan de klasse $\frac{1}{2}(n^2-1)(n-2)(n-3)$ is. Deze uitkomsten worden door den schrijver afgeleid met behulp van een nieuwe meetkundige plaats, nl. die der tot een zelfde groep behoorende paren van punten β, die collineair zijn met een gegeven punt a. Deze meetkundige plaats is een kromme N van den graad $\frac{3}{2}(n-1)(n-2)$, die a tot $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$-voudig punt en de gegeven punten b tot $n-2$-voudige punten heeft. Op haar beurt wordt de graad dezer hulpkromme gevonden met behulp van het aantal $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ der neutrale paren van de involutie $I^2{}_n$ door het net $((K))$ op elke rechte lijn L bepaald, die de $3(n-1)$ snijpunten dezer lijn met de kromme van JACOBI tot haar n^2-1 snijpunten met haar kromme M aanvullen.

Ook als we ons tot het aanstippen der hoofdzaken bepalen, moet nog worden vermeld, dat de Heer DE VRIES twee bijzondere gevallen nader onderzoekt. In het eerste wordt ondersteld, dat n van de gegeven punten b op een rechte lijn — en meer algemeen, dat $np-\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ dier punten op een kromme K_p van den p^{den} graad — gelegen zijn. En in het tweede bijzondere geval wordt aangenomen, dat eenige der gegeven punten b zich tot aan alle krommen van het net gemeenschappelijke veelvoudige punten vereenigd hebben.

Voor zoover ons bekend is, zijn de door den Heer DE

Vries verkregen uitkomsten voor het meerendeel nieuw; naar ons oordeel verdient zijn verhandeling ten volle in de werken der Akademie te worden opgenomen.

Groningen en Leiden,
December 1888.

P. H. SCHOUTE.
D. BIERENS DE HAAN.

EENE RANGSCHIKKING

VAN HET

PUNTENVELD IN INVOLUTORISCHE GROEPEN,

DOOR

JAN DE VRIES.

In eene verhandeling: *Sur la transformation conjuguée* *) heeft Dr. P. H. Schoute de involutorisch birationeele transformatie onderzocht, welke bij een bundel krommen van den derden graad met zeven vaste basispunten door de beide overige veranderlijke basispunten wordt bepaald, en verder aangetoond, dat deze overeenkomst ook bij krommenbundels van hooger graad kan ontstaan, wanneer in de vaste basis veelvoudige punten worden aangenomen. De volgende bladzijden bevatten beschouwingen over de groepen van basispunten der bundels van vlakke krommen, welke begrepen zijn in een net met $\frac{1}{2} n (n + 3) - 2$ vaste punten.

1. Alle krommen K_n, die $\frac{1}{2} n (n + 3) - 2$ punten b gemeen hebben, vormen een net $((K_n))$; de krommen van dit net, die bovendien een punt β gemeen hebben, behooren tot een bundel (K_n), waarvan de basis uit de punten b, het punt β en $\frac{1}{2} (n - 1) (n - 2)$ punten β' bestaat, die met β eene involutorische groep (β) vormen. Hebben de door

*) Association française pour l'avancement des sciences, *Congrès de Montpellier*, 1879.

een punt γ bepaalde krommen K_n in dat punt eene gemeenschappelijke raaklijn, dan zijn daar twee punten β, β' tot een »coincidentiepunt" vereenigd: zulk eene »coincidentiegroep" (γ) bezit dan nog $\frac{1}{2}$ n $(n - 3)$ »vertakkingspunten" φ.

De kromme B_1 van het net, welke in het punt b_1 een dubbelpunt bezit, behoort tot alle (K_n) waarvoor β in eene bepaalde richting met b_1 is samengevallen; zij bevat dus de punten β', die b_1 tot groepen (β) aanvullen. Door de dubbelpuntsraaklijnen van b_1 worden twee coincidentiegroepen bepaald: de meetkundige plaats C der coincidentiepunten γ gaat dus twee maal door b_1 en heeft met B_1 de raaklijnen in het dubbelpunt gemeen. Op elke K_n van het net vormen de groepen (β) eene involutie I_s, waar $s = \frac{1}{2} n (n-3) + 2$, welke door elken bundel van $((K_n))$ wordt ingesneden en $2 (g + s - 1)$ coincidentiepunten bezit *). Behalve deze $2 (n - 1)(n - 2)$ punten heeft de »coincidentiekromme" C in elk punt b twee punten met de bedoelde K_n gemeen; zij is dus van den graad $[2 (n - 1)(n - 2) + (n - 1)(n + 4)] : n = 3 (n - 1)$.

2. Bestaat tusschen de bundels $(K_n)'$ en $(K_n)''$, die in $((K_n))$ door $(\beta)'$ en $(\beta)''$ zijn aangewezen, eene (p, q) overeenkomst, dan snijden zij de willekeurige lijn L volgens twee reeksen in (np, nq) overeenkomst, waarvan de $n (p + q)$ coincidentiepunten snijpunten van toegevoegde krommen zijn. Daar de overeenkomst op eene door b_1 getrokken lijn in eene $((n - 1) p, (n - 1) q)$ ontaardt, gaat de kromme van den graad $n (p + q)$, die door de bundels wordt voortgebracht, $(p + q)$ maal door elk punt b. Evenzoo blijkt, dat zij q resp. p maal gaat door de punten $(\beta)'$ resp. $(\beta)''$. Door de transformatie, welke aan een punt β de overige punten der groep (β) toevoegt, gaat deze kromme in zich zelve over.

Komt voor het geval $q = p$ de K_n, welke de beide bun-

---

*) J. de Vries, Over kwadrupelinvoluties op bikwadratische krommen. (*Versl. en Med.* 3de reeks, deel IV, bl. 322). g stelt hier het geslacht van den drager voor.

dels gemeen hebben, p maal met zich zelve overeen, dan ontaardt de voortgebrachte kromme in eene K_{np}, die p maal door de punten b gaat en de groepen $(\beta)'$ en $(\beta)''$ niet meer bevat.

3. Wordt de overeenkomst van $(K_n)'$ en $(K_n)''$ zoo geregeld, dat toegevoegde krommen elkander op de kromme C snijden, dan is $q = p = 2(n-1)(n-2)$, daar C door elke K_n buiten de vaste basis in $2(n-1)(n-2)$ punten gesneden wordt. Van de voortgebrachte kromme scheiden zich af de aan beide bundels gemeenschappelijke $2(n-1)(n-2)$ maal te tellen K_n en de dubbel te tellen C, en er blijft over eene kromme V van den graad $4n(n-1)(n-2) - 2n(n-1)(n-2) - 6(n-1) = 2(n^2-1)(n-3)$, die ik »vertakkingskromme'' noem, daar zij de punten bevat, welke de punten γ tot groepen aanvullen. Omdat de drie krommen samen $4(n-1)(n-2)$ maal door b_1 gaan en C en K_n samen $4 + 2(n-1)(n-2)$ doorgangen opleveren, heeft V in de vaste basispunten $2n(n-3)$voudige punten.

De $2n(n-3)$ in b_1 vereenigde punten φ behooren tot even zoovele doorsneden van B_1 met C; daar deze beide krommen in elk der overige $\frac{1}{2}n(n+3) - 3$ punten b $(n^2 + 3n - 6)$ punten gemeen hebben, liggen er 6 in b_1, waaruit op nieuw blijkt, dat B_1 en C de dubbelpuntsraaklijnen gemeen hebben.

4. Voegt men twee krommen K_n' en K_n'', welke elkander op de lijn L snijden, aan elkander toe, dan vormen de bundels eene (n, n) overeenkomst, waarin hunne gemeenschappelijke kromme n maal met zich zelve overeenkomt. De punten van L worden dus tot groepen (β) aangevuld door de punten eener kromme M van den graad (n^2-1), die n maal door de punten b gaat, en behalve met L nog $\frac{1}{2}n(n-3)$ maal met zich zelve overeenkomt.

Van de snijpunten van M en L liggen er $3(n-1)$ op C; de overige $(n-1)(n-2)$ komen paarsgewijze met elkander overeen en zijn de neutrale paren der involutie van den n^{den} graad en 2^{den} rang, welke door $((K_n))$ op L wordt ingesneden.

Gaat L door b_1, dan zijn $(K_n)'$ en $(K_n)''$ in eene $(n-1, n-1)$, terwijl hunne gemeenschappelijke K_n $(n-1)$ maal deel uitmaakt van de door hen voortgebrachte kromme van den graad $2n(n-1)$; L wordt dan vervormd in eene kromme van den graad (n^2-n-1), die $(n-2)$ maal door b_1, $(n-1)$ maal door elk der overige punten b gaat. Deze verlaging van den graad der kromme M is toe te schrijven aan het feit, dat met b_1 overeenkomt de kromme B_1 als meetkundige plaats der punten β', welke met b_1 groepen (β) vormen.

Op dezelfde wijze blijkt, dat de M, waarin de door b_1 en b_2 getrokken L vervormd wordt, in B_1, B_2 en eene kromme van den graad (n^2-2n-1) ontaardt, die $(n-3)$ maal door b_1 en door b_2, $(n-2)$ maal door elk der overige b gaat.

5. Van de $(n^2-1)^2$ snijpunten van M_1 en M_2, waarin L_1 en L_2 door de groepen (β) vervormd worden, liggen er n^2 in elk der $\frac{1}{2}(n-1)(n+4)$ vaste basispunten, terwijl er $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ met het snijpunt van L_1 en L_2 eene groep (β) vormen. De overige $\frac{1}{2}n(n-3)(n^2-1)$ kunnen gebracht worden tot (n^2-1) groepen, die elk door een snijpunt van L_1 met M_2 en een snijpunt van L_2 met M_1 tot eene (β) worden aangevuld. Een stralenbundel wordt dus niet in een krommenbundel getransformeerd; dit is een gevolg van het feit, dat M_1 met M_1+L_1, M_2 met M_2+L_2 overeenkomt.

Door twee punten α en β gaan $\frac{1}{4}(n-1)^2(n-2)^2$ krommen M; deze ontstaan door vervorming uit de lijnen L, die de punten der door α bepaalde groep met de punten van (β) verbinden. Behooren de twee punten, tot eene groep (β), dan bepaalt elke lijn door 2 punten van (β) eene M, die de gegeven punten bevat; het aantal krommen is dan $\binom{\frac{1}{2}(n^2-3n+4)}{2}$.

6. De krommen van $((K_n))$, welke door het punt o gaan, bepalen op de lijn L eene involutie van den n^{den} graad met

$2 (n - 1)$ coincidentiepunten; de meetkundige plaats (o, L) der $(n - 1)$-tallen van punten, in welke de kromme K_n, die L in p aanraakt, den straal $\overline{op}$ bovendien snijdt, gaat dus $2 (n - 1)$ maal door o, en is van den graad $3 (n - 1)$. Elke van hare doorsneden met L is blijkbaar dubbelpunt op eene K_n van het net. De involutie I_n ontaardt op eene door b_1 getrokken lijn in eene I_{n-1}, waardoor de graad van (o, L) met twee verlaagd wordt: de meetkundige plaats der dubbelpunten van $((K_n))$ gaat dus tweemaal door elk punt b en is van den graad $3 (n - 1)$. Daar elke K_n met dubbelpunt d een bundel bepaalt, waarvan de krommen in d twee punten gemeen hebben, is d een der punten γ: de meetkundige plaats der dubbelpunten is dus identiek met de coincidentiekromme.

7. Samenvattende heeft men dus: »Doorloopt een basis- »punt van een bundel algemeene vlakke krommen van den »n^{den} graad met $\frac{1}{2} (n - 1) (n + 4)$ vaste basispunten eene »rechte, dan beschrijven de overige veranderlijke basispunten »eene kromme van den graad $(n^2 - 1)$ met n voudige punten »in de vaste basis; gaat de bedoelde rechte door een der »vaste basispunten, dan maakt de kromme K_n, welke in dat »punt een dubbelpunt bezit, deel uit van de overeenkomstige »kromme. Doorloopt een basispunt de kromme van den graad »$3 (n - 1)$, die de dubbelpunten van krommen K_n bevat, en »tweemaal door de vaste basis gaat, dan beschrijven de ove- »rige basispunten eene kromme van den graad $2 (n^2 - 1) (n - 3)$ »met $2n (n - 3)$voudige punten in de vaste basis."

8. Liggen n punten b in eene rechte K_1, dan vormen de overige $\frac{1}{2} (n - 1) (n + 2) - 1$ met $\frac{1}{2} (n - 2) (n - 3)$ andere punten c de basis van een (K_{n-1}). Elk op K_1 gekozen punt β bepaalt dan een (K_n), die uit K_1 en (K_{n-1}) is samengesteld, zoodat de door β aangewezen groep (β) uit de $\frac{1}{2} (n - 2) (n - 3)$ punten c en $(n - 2)$ willekeurige punten van K_1 bestaat. Met elk punt c komt dus de geheele lijn K_1 overeen, met elk punt van K_1 de punten c benevens de lijn K_1 zelve. De kromme C ontaardt dan in K_1 en

eene kromme C' van den graad $(3n - 4)$, terwijl M, na afscheiding van de lijn K_1, eene kromme van den graad $(n^2 - 2)$ blijkt te zijn, die $(n - 1)$ maal door de op K_1 gelegen punten b, n maal door de overige b en een maal door de punten c gaat. Wordt L door een op K_1 geplaatst basispunt b_1 getrokken, dan is M van den graad $(n^2 - n - 2)$, (daar de kromme B_1 deel uitmaakt van de met L overeenkomende kromme), en heeft in het punt b_1 een $(n - 3)$voudig, in de overige op K_1 gelegen b een $(n - 2)$voudig, in de buiten K_1 geplaatste b een $(n - 1)$voudig punt. Gaat L daarentegen door een niet op K_1 gelegen punt b, dan is dit laatste, evenals de basispunten op K_1, een $(n - 2)$voudig punt der kromme M van den graad $(n^2 - n - 2)$, terwijl de overige punten b $(n - 1)$voudige punten zijn.

Kunnen $np - \frac{1}{2}(p - 1)(p - 2)$ basispunten van $((K_n))$ door eene K_p verbonden worden, dan bepalen de overige $\frac{1}{2}(n - p)(n - p + 3) - 1$ een (K_{n-p}), tot welks basis nog $\frac{1}{2}(n - p - 2)(n - p - 1)$ punten c behooren. Een punt β op K_p wordt dan door de punten c en $\frac{1}{2}p(2n - p - 3)$ willekeurige punten van K_p tot eene (β) aangevuld; met elk punt c komt de kromme K_p overeen. De willekeurige lijn L wordt dan vervormd tot eene kromme van den graad $(n^2 - p^2 - 1)$, daar de met elk snijpunt van L en K_p overeenkomende K_p p-maal tot M behoort.

»Zijn $np - \frac{1}{2}(p - 1)(p - 2)$ punten der basis van »een $((K_n))$ met eene K_p incident, dan wordt eene lijn L »door de groepen (β) in eene kromme van den graad »$(n^2 - p^2 - 1)$ getransformeerd, die $(n - p)$-maal door de »op K_p gelegen basispunten, n-maal door de overige en p-»maal door de punten c gaat, die de buiten K_p geplaatste »basispunten tot de basis van een (K_{n-p}) aanvullen. Bevat »L een punt b, dan ontaardt de overeenkomstige kromme in de K_n met dubbelpunt b en eene kromme van den graad $(n^2 - p^2 - n - 1)$; gaat L door een punt c, dan maakt »K_p deel uit van de door vervorming verkregen kromme."

9. De meetkundige plaats N der met een punt o collineair gelegen punten β, β' wordt in o aangeraakt door de

lijnen, welke dit punt verbinden met de $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ punten der groep (β), waartoe o behoort, en bevat op elken straal uit dit punt de neutrale paren der door $((K_n))$ ingesneden I^2_n, zoodat N van den graad $\frac{3}{2}(n-1)(n-2)$ is. De straal $o\,b_1$ wordt door N behalve in o en de $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ neutrale paren der door $((K_n))$ bepaalde I^2_{n-1} nog gesneden in de $(n-2)$ punten, welke hij met B_1 gemeen heeft, en die elk met b_1 een der ontbrekende puntenparen vervangen; N gaat dus $(n-2)$ maal door elk der $\frac{1}{2}(n+4)(n-1)$ basispunten van het net.

Doorloopt o eene rechte R, dan hebben de verschillende krommen N de $(n-2)$voudige punten benevens de neutrale paren der op R ingesneden I^2_n, dus

$$\tfrac{1}{2}(n+4)(n-1)(n-2)^2 + (n-1)(n-2) = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)(n^2+2n-6)$$

punten gemeen. Zij vormen een stelsel, waarvan er door het willekeurige punt β $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ gaan, n. l. de krommen, behoorende bij de snijpunten van R met de lijnen, welke β met de punten van (β) verbinden. Alle t. o. v. $((K_n))$ bepaalde krommen N vormen een stelsel, waarvan twee willekeurige punten α en β er $\binom{\frac{1}{2}(n^2-3n+2)}{2}^2$ bepalen; zij komen overeen met de punten o, die met een paar verbindingslijnen van α resp. β met een punt van (α) resp. (β) incident zijn.

10. Op eene kromme Q van den graad $n(p+q)$, welke door eene (p, q) overeenkomst van twee tot het net behoorende bundels ontstaat, dus door de groepen (β) in zich zelve vervormd wordt, bepalen deze groepen eene involutie I_s, (waar $s = \frac{1}{2}(n^2-3n+4)$) waarvan p resp. q groepen door eene K_n van een der bundels worden ingesneden; deze involutie is dus niet gelijksoortig met de involuties, welke ik l. c. heb beschouwd. Q wordt door de coincidentiekromme C buiten de basis van $((K_n))$ nog in $3(n-1)n(p+q) - (n+4)(n-1)(p+q) = 2(n-1)(n-2)(p+q)$ punten gesneden, die de coincidentiepunten der I_s zijn.

Met eene N heeft Q, behalve de punten b,

$$\tfrac{3}{2}(n-1)(n-2)\,n\,(p+q) - \tfrac{1}{2}(n+4)(n-1)(n-2)(p+q) =$$

$(n-1)(n-2)^2(p+q)$ punten gemeen, die $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)^2(p+q)$ met het punt o collineair gelegen paren der I_s vormen; de involutiekromme $\mathfrak{K}$ is dus van de klasse $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)^2(p+q)$.

Komt in twee door eene (p, p) verbonden bundels de gemeenschappelijke K_n $p$maal met zich zelve overeen, dan brengen zij eene kromme P van den graad np met p-voudige punten b voort, die door C in hare $2p(n-1)(n-2)$ coincidentiepunten, door eene N in $\frac{1}{2}p(n-1)(n-2)^2$ paren der I_s gesneden wordt, welke de door o getrokken raaklijnen van $\mathfrak{K}$ leveren.

Voor $p = 1$ gaat P over in eene K_n van het net, en kan I_s door elken tot $((K_n))$ behoorenden bundel worden ingesneden; de boven gevonden aantallen geven dan ook voor $p = 1$ de l. c. (bl. 322) afgeleide waarden.

Eene lijn L en de kromme M, waarin zij door (β) vervormd wordt, kunnen samen als eene ontaarde kromme P van den graad n^2 beschouwd worden; de op haar ingesneden involutie is dan samengesteld uit eene puntenreeks en eene I_t $(t = \frac{1}{2}(n-1)(n-2))$. Van de

$$3(n-1)(n^2-1) - n(n+4)(n-1) = (n-1)(2n^2-4n-3)$$

doorsneden van M met C zijn de $3(n-1)$ tevens op L gelegen coincidentiepunten van (β) geen coincidentiepunten van de I_t; voor deze is het aantal coincidenties dus $2(n^2-1)(n-3)$.

Met N heeft M

$$\tfrac{3}{2}(n^2-1)(n-1)(n-2) - \tfrac{1}{2}(n+4)(n-1)\,n\,(n-2) =$$
$$= \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)(2n^2-4n-3)$$

punten gemeen; daaronder bevinden zich $\frac{3}{2}(n-1)(n-2)$ punten, die de snijpunten van L en N tot neutrale paren aanvullen; de overige vormen de met o collineair gelegen paren der I_t: de involutiekromme is dus van de klasse $\frac{1}{2}(n^2-1)(n-2)(n-3)$.

»De involutie der groepen (β) op de kromme, in welke »zij eene rechte lijn vervormen, heeft $2(n^2-1)(n-3)$

»coincidentiepunten, terwijl de zijden der door hen bepaalde »veelhoeken een kromme van de klasse $\frac{1}{2}(n^2-1)(n-2)(n-3)$ »omhullen."

11. Hebben de krommen van een $((K_n))$ in λ een $l$voudig punt, dan kan de graad der kromme Λ, welke de punten β bevat, die λ tot (β) aanvullen, door de volgende overweging bepaald worden. Voegt men aan elke kromme van een tot het net behoorenden $(K_n)'$ de l krommen van $(K_n)'$ toe, welke in λ met haar eene raaklijn gemeen hebben, dan brengen deze bundels in (l, l) eene kromme van den graad $2nl$ voort, die $2kl$ maal door elk k-voudig basispunt, maar $(2l^2+1)$ maal door λ gaat; immers onder de coincidenties der puntenreeksen, welke de bundels op een straal uit λ insnijden komt λ zelf als raakpunt van twee gekoppelde krommen voor. Daar nu de gemeenschappelijke kromme der bundels l maal tot het voortbrengsel behoort, is Λ van den graad $n\,l$, gaat zij kl maal door een k-voudig basispunt en (l^2+1) maal door λ.

Eene door (p, q) overeenkomst van 2 bundels voortgebrachte Q gaat $k(p+q)$ maal door een k-voudig basispunt; dit blijkt uit het ontaarden der (np, nq) van twee collocale puntenreeksen in eene $((n-k)\,p, (n-k)\,q)$, zoodra de drager het k-voudige punt bevat. De kromme M, in welke eene rechte L door de groepen (β) getransformeerd wordt, heeft dus een $n\,k$-voudig punt in elk k-voudig basispunt. Is L met het l-voudig basispunt λ incident, dan wordt $p-q=n-l$ en de graad van M daalt tot (n^2-nl-1); de kromme gaat $(n\,l-l^2-1)$ maal door λ, en $(n-l)\,k$ maal door een k-voudig punt b. De verlaging van graad is natuurlijk weêr het gevolg van de afscheiding der kromme Λ, die met λ overeenkomt; hier blijkt op nieuw, dat deze kromme van den graad nl is met (l^2+1)-voudig punt λ.

12. De I^2_{n-1}, welke $((K_n))$ op eene door λ getrokken L bepaalt, bezit $\frac{1}{2}(n-l-1)(n-l-2)$ neutrale paren, welke ook op M liggen; de overige punten, die

L en M buiten λ gemeen hebben (hun aantal bedraagt $(n^2 - nl - 1) - (nl - l^2 - 1) - (n - l - 1)(n - l - 2) = 3(n - l) - 2)$ worden door de coincidentiekromme ingesneden; daar C van den graad $(3n - 3)$ is, heeft zij dus in λ een $(3l - 1)$-voudig punt.

Bestaat de basis van het net uit i_1 enkelvoudige, i_2 dubbel-, ... i_m m-voudige punten, dan heeft C met elke K_n buiten de basis om $p = 3\,n\,(n - 1) - \sum_1^m k\,(3\,k - 1)\,i_k$ punten gemeen. Wordt de overeenkomst van 2 in $((K_n))$ begrepen bundels zoo geregeld, dat toegevoegde krommen hetzelfde punt van C projecteeren, dan is door hen voortgebrachte kromme van den graad $2\,n\,p$ samengesteld uit de p-maal getelde tot beide bundels te rekenen K_n, de dubbel getelde C en de vertakkingskromme V; deze is dus van den graad $3\,(n - 1)\,(n^2 - 2) - n \sum_1^m k\,(3\,k - 1)\,i_k$, en gaat $k\,p - 2\,(3\,k - 1)$ maal door een k-voudig punt b.

13. Bezit de basis van $((K_n))$ een k-voudig punt $\varkappa$ en een l-voudig punt λ, dan zal de (K_n), die door een punt van $\varkappa\lambda$ bepaald wordt, in die rechte benevens een (K_{n-1}) ontaarden met $(k - 1)$ en $(l - 1)$-voudige punten in $\varkappa$ en λ, zoodra $\frac{1}{2}(n^2 + 3\,n - 4) - (k + l) = \frac{1}{2}(n - 1)(n + 2) - 1$ of $k + l = n$. Dan wordt elk punt β van $\varkappa\lambda$ door eenige willekeurig te kiezen punten dier lijn in verband met de van de punten b verschillende basispunten van (K_{n-1}) tot eene groep (β) aangevuld, zoodat $\varkappa\lambda$ deel uitmaakt van de kromme M. Daar het geslacht der K_n is

$$g = \tfrac{1}{2}(n - 1)(n - 2) - \sum_2^m \tfrac{1}{2}\,k\,(k - 1)\,i_k$$

en dat der K_{n-1}

$$g' = \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3) - \left\{ \sum_2^m \tfrac{1}{2}\,k\,(k-1)\,i_k - (k-1) - (l-1) \right\} =$$

$$= \tfrac{1}{2}(n - 1)(n - 2) - \sum_2^m \tfrac{1}{2}\,k\,(k - 1)\,i_k\,,$$

is dit kenmerkende getal voor beide hetzelfde.

Door uitbreiding van deze beschouwing komt men tot deze algemeene uitkomst:

»Behooren tot de basis van $((K_n))$ $h = \frac{1}{2}p(p+3)$ »veelvoudige punten van de graden $l_1, l_2 \ldots . l_h$, terwijl »$\sum\limits_1^h l_j = np - \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$, dan is de K_p, welke deze »h punten vereenigt, p-maal begrepen in de krommen, waarin »de lijn L vervormd wordt, zoodat de eigenlijke kromme M »dan van den graad $(n^2 - p^2 - 1)$ is.''

Immers de bedoelde h punten vervangen als $(l_j - 1)$ voudige punten $\frac{1}{2}l_j(l_j-1)$ basispunten van (K_{n-p}), dus l_j minder dan wanneer zij l_j-voudige punten van $((K_n))$ zijn. Is nu

$$\sum_1^h l_j = np - \tfrac{1}{2}(p-1)(p-2),$$

dus

$$\tfrac{1}{2}(n^2 + 3n - 4) - \sum_1^h l_j = \tfrac{1}{2}(n-p)(n-p+3) - 1,$$

dan bepalen de punten b een bundel krommen van den graad $(n-p)$, die een keer minder door de h punten gaan dan de krommen K_r. Het geslacht der K_{n-p} is

$$\tfrac{1}{2}(n-p-1)(n-p-2) - \left\{ \sum_2^m \tfrac{1}{2}k(k-1)i_k - \sum_1^h (l_j - 1) \right\} =$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - \sum_2^m \tfrac{1}{2}k(k-1)i_k \right] - \tfrac{1}{2}(p-1)(p-2),$$

dus $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ eenheden lager dan het geslacht der krommen K_n.

BOUWSTOFFEN VOOR DE GESCHIEDENIS

DER

WIS- EN NATUURKUNDIGE WETENSCHAPPEN

IN DE NEDERLANDEN.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.



N^0^. XXXI. Eenige brieven van Constantyn Huygens, den vader, aan pater Marin Mersenne.

Toen bij den verkoop der Bibliotheek van den Lord Ashburnham verschillende gedeelten der Bibliotheek van den vermaarden G. Libri naar Frankrijk terugkeerden, werd mijne aandacht gevestigd op eenige brieven aan M. Mersenne, geteekend door C. Huygens. Het bleek, dat deze verzameling meerendeels brieven van Constantyn Huygens, den vader, bevatten: slechts enkele brieven waren van Christiaan Huygens.

Van de laatste zijn onder de stukken van Christiaan Huygens, die thans door ons bewerkt worden, geene afschriften of minuten gevonden: en evenmin zijn van de eerste brieven afschriften opgenomen in de *Lettres Françaises* van Constantyn Huygens, die in de Bibliotheek van de Kon. Akademie van Wetenschappen berusten.

Voor een groot gedeelte worden de vermelde brieven opgenomen in het »Supplément" van het tweede deel der *Oeuvres et Correspondance de Christiaan Huygens.* De overigen, die voor dit

laatste doel minder geschikt schenen, zijn toch in menig opzicht belangrijk. Zij worden in dit opstel aangeboden aan hen, die belang stellen in geschiedkundige en biographische studiën.

I. Constantyn Huygens aan M. Mersenne. 15 December 1641.

Le bon Veglinus *a*) commence a prendre racine ou je l'ay planté, et son maistre (qui est seigneur de grand mérite) m'en sçait autant de gré que luy, dont je suis très ayse; car comme disent nos Pseaumes Rimes, mon vouloir est d'ayder aux vertueux, qui de bien vivre ont acquis la louange etc. et je commence à m'asseurer que ce garçon sera trouvé tel intus et in cute.

Les petits traictés que M. Grotius *b*) a publiés depuis quelque temps en çà, tant sur les passages de Antichro [1]) que sur la Consulte de Cassander [2]) (lequel je n'ay encor veu) font courrir des bruicts desesperés de sa personne, plusieurs le tenants à la veille de la Revolte, quelques asseurant qu'il auroit esté veu à la messe. C'est ce que pour moy je croy aussi peu de luy que de moy mesme; mais cependant vous prie m'advertir un peu de ce que vous sçavez de ses intentions. C'est un rare personnage, et jamais n'aurions nous faict perte plus sensible depuis la Reformation, mais j'espere que dieu ne l'abandonnera pas.

Si vous avez de la familiarité aveq le S[r] de la Miltiere *c*) je vous prie de luy demander la veue d'une lettre [2]) que

---

a) Het is mij niet mogen gelukken om uit te maken, wie deze Veglinus (toch niet een Vegelin?) of zijn „maistre" is.

b) Hugo Grotius, die toen reeds in Paris woonde.

c) Théophile Brachet de la Milletière, geboren omstreeks 1596, en overleden in Mei 1665, was protestant, studeerde in Heidelberg, en zette zich te Paris neder, eerst als advocaat, later als godgeleerde. In hoog aanzien bij de Protestanten, trachtte hij tusschen deze en de Roomsch-katholieken eene toenadering te bewerken. Dit had echter ten gevolge, dat hij in 1642 in den ban werd gedaan. In 1645 ging hij toen bepaaldelijk tot de Roomsche kerk over, en schreef sedert heftig tegen de Protestanten.

M. Riuet *d*) luy a escrit dernierement sur le subject de ses derniers livres [4]) dont il luy avait demandé son advis. Jamais brouillon presomptueux ne fut mené de meilleure sorte. Je l'appelle toujours ainsi, et si vous en jugez autrement, je vous diray que vous ne le cognoissez pas.

Pardonnez à la franchise dont je vous entretiens, je changeray de style quand vous le voudrez, mais si vous me permettez d'en user ainsi, je vous anonce mesme liberté, caedimus inq; vicem e.q.n. *e*), et il me semble que cela osté, il n'y a point d'amitié qui ne cloche. En tout cas la miene vous demeure acquise aveq tout le service dont je suis capable, et je suis pour toujours

Monsieur,

Vostre très-humble serviteur
C. Huygens.

A la Haye, où il faict
un hyver desesperé,
15 Decemb. 1641.

II. Constantyn Huygens aan M. Mersenne.
7 April 1642.

Monsieur,

Voyant par la copie du petit sicle qu'il vous à plu de m'envoyer que c'est la mesme chose que nous avons icy

---

d) Andreas Rivet, waarschijnlijk den 2den Juli 1572 te Saint-Maxent geboren en op 1 Januari 1651 te Breda overleden, was de zoon van een aanzienlijk handelaar Jean Rivet en Catharine Cardel. Als protestantsch geestelijke te Thouars, had hij grooten invloed bij de Protestanten in Frankrijk. Den 14de October 1620 werd hij Professor in de godgeleerdheid te Leiden. In dat jaar overleed zijn eerste vrouw Susanne Oiseau, die hij in 1596 gehuwd had. In Augustus 1621 hertrouwde hij met Maria du Moulin te Oxford, alwaar hij fellow der Universiteit werd. Naar Frankrijk teruggekeerd om zijn zaken te regelen, wilde men hem daar behouden, doch hij verkoos in ons land te blijven. In 1632 werd hij Gouverneur van Prins Willem II, en in 1646 benoemde Frederik Hendrik hem tot Curator der nieuwe Universiteit te Breda. Hij was een geleerd theologant van veel belezenheid, en schreef veel, ook bij de theologische twisten van dien tijd.

e) Een aanhaling uit Persii Satira IV, vers 42.

je ne vous envoye qu'une estampe du grand, aveq le poids de l'un et de l'autre. Ce grand donq pese (icy bas je vous interpreteray nostre poids) dix Engelsche et dix grains. Le petit semblable au vostre, huict Engelsche et trente grains; le tout examiné très exactement. Ces Engelsche sont subdivisions de l'once, que vous partissez en gros et deniers et voyci comme nous la distribuons.

Le marq à 8 onces comme aussi 5 francs et quasi partout ailleurs.

L'once 20 Engelsche.

L'Engelsche 32 grains.

de ces Engelsche je vous adjoints icy $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2 et 3, marques d'encre et puis 1, 2, 3 et 4 grains, de sorte que ne sçauriez plus manquer de sçavoir très justement le poids de notre grand sicle qui est piece antique aussi entiere que j'en ay jamais veu portant très distinctement le Jeruschalaim-Hakkedoschah — ירושלים הקדושה et de l'autre coté le Schekel-Israel שקל ישראל. Si la piece etoit à moy, comme je ne la sçauray avoir, je seroy bien ayse de vous en accommoder.

On m'a trouvé du drap d'eslite, qu'aujourd'hui je mets entre les mains de l'Agent de Glarges *a*) qui m'a promis de vous la faire tenir par les rouliers de Calais. Le personnage en pourra porter le deuil de son impudence, et du reste, en ce qui me regarde et ses compositions que j'estime tant, en usera à sa fantaisie: je suis assez resolu de ne luy en demander plus, de peur qu'il n'en pretende encor quelque pieces de drap blanq.

Par de mes dernieres vous avez receu la deffense [5]) de M. Descartes, sous le nom de Regius *b*) contre Voe-

---

a) De Glargues was de Hollandsche consul te Calais en komt ook in de *Correspondence* de Chr. Huygens voor; hij was bekend wegens zijne hulpvaardigheid jegens de Hollanders.

b) Henricus de Roy (= Regius), geboren te Utrecht den 29sten Juli 1598 en aldaar overleden den 21sten Januari 1684, werd in 1624 te Franeker Artium Liberalium Magister en Medicinae Doctor, en vestigde zich toen te Utrecht, waar hij een vurig aanhanger van Descartes werd. In 1638 werd hij aldaar Professor in de medicijnen en kruidkunde. Spoedig geraakte hij met Senguerdius en Voetius in twist, die, in 1640 en 1641

tius *c*). un petit moine supposé *a*) faict imprimer de la replique [6]) la dessus, que je vous envoyeray des qu'elle verra le jour. En attendant vous trouverez icy la censure de l'Academie d'Utrecht [7]) en grosse lettre marquant la faiblesse du dict Voetius et ensemble son pouvoir parmi les collegues, induits par sa seule autorité de publier une censure si impertinente. Sic sententiam de sententia.

Voyci d'ailleurs la moitié de M. Rivet contra Grotium [8]). Tout le livre estoit trop gros pour un ordinaire. Entre icy et la sepmaine qui vient vous l'aurez leu jusques la. Le reste suivra. Beaucoup d'affres me font lever manum de tabula, disposez de moi et croyez que je suis

Monsieur

A la Haye, le 7me de April 1642.

Vostre très humble servitr
C. Huygens.

III. Constantyn Huygens à M. Mersenne.
11 Januari 1644.

Lettre touchant les proprietez, et qualites et differences du Ha ou Cha, et du Té.

Monsieur,

Voyci le jeunn'homme, le Sr Elzevir *a*) fils de nostre

---

met afwisselend gevolg gestreden, eindigde met de overwinning van Voetius, die toen als Rector Magnificus van zijn macht gebruik maakte. Later echter, toen Descartes met Regius in strijd geraakte, werd deze zijn tegenstander.

c) Gijsbert Voet, geboren te Heusden den 3den Maart 1588 en overleden te Utrecht den 1sten November 1676, studeerde te Leiden in de godgeleerdheid, en werd in 1617 predikant te Heusden; in 1634 vertrok hij naar Utrecht als Hoogleeraar in de theologie. Hij was een heftig Gomarist, en vurig bestrijder van de Roomschen en van de Remonstranten. Ook ijverde hij hevig tegen Descartes.

a) Jean Elzevier, oudste zoon van Abraham Elzevier en Catharina van Waesberghe, werd einde Februari 1622 geboren te Leiden en is aldaar den 8sten Juni 1661 overleden; hij volgde zijn vader op in de drukkerij te Leiden. Hij huwde Eva van Alphen, geboren te Leiden 29 Maart 1620 en aldaar overleden 18 Maart 1695, die de zaak na zijn dood nog eenigen tijd voortzette. Zij hadden 2 zoons en 2 dochter .

Imprim^r^ *b*) à Leiden, qui m'a toujours promis d'estre le porteur de ces pacquets de Té, et s'est trouvé arresté icy par la contrarieté des vents jusques a psent. La saison toutefois se disposant à la gelée je l'en charge de bonn'heure, de peur qu'il ne m'eschappe soudainemt.

Faictes bien recognoistre par les friands la difference qu'il y a entre le Ha ou Cha et le Té commun. Le premier est Té aussi, mais la fleur de l'herbe et de bien plus grande vertu qui a la verité, n'est *pas pour m'y affriander: car desja l'ordin^r^. m'est trop fort, et m'empesche si absolument de dormir*, que, malgré moy, il fault que je m'en abstiene, l'estimant d'ailleurs comme une herbe merveilleuse et saincte, tant je l'ay trouvé capable de raffiner et subtiliser l'esprit, à qui a besoin de l'employer en affaire soit serieuse ou de plaisir. mon eloge en est cognu icy, c'est qu'un homme qui a prins du Té vault doublemt sa valeur ordinaire en gaignant la conception prompte, fertile, aysée, et, qui plus est, infatigable: c'est un grand point en occasion de necessité urgente. J'en laisse le reste à l'experience et m'offre à vous en faire encor avoir davantage, si le desirez. au moins du commun, qui seul est de ma cognoissance, n'en ayant jamais prins, n'y tasché de prendre d'autre.

Je vous baise les mains et au bonhomme qui vous doibst servir d'essayeur, et suis Monsieur,

A la Haye le 11e de Janvier 1644.

Vostre très humble serv.
C. HUYGENS.

Après vous avoir escrit par l'ordr.

---

b) ABRAHAM ELZEVIER, oudste zoon van MATTHIEU ELZEVIER en BARBARA LOPES, werd den 14^den^ April 1592 te Leiden geboren en stierf aldaar den 14^den^ Augustus 1652. Hij studeerde te Leiden (ingeschreven 11 Februari 1604) in de letteren, huwde den 21sten Mei 1621 CATHARINA VAN WAESBERGHE, de dochter van den Rotterdamschen drukker. In September 1622 trok zijn vader zich uit de firma terug, en hij, hoewel vooral boekdrukker, kwam in zijne plaats; zoo ontstond de firma BONAVENTURA EN ABRAHAM ELZEVIER, die 30 jaren duurde, eigenlijk de bloeitijd van de ELZEVIERS. Bij zijn dood liet de Leidsche Universiteit eene medaille voor hem slaan. Hij kreeg 5 kinderen, waarvan de oudste zoon JEAN hem opvolgde, en de beide andere zoons een anderen loopbaan kozen.

IV. Constantyn Huygens aan M. Mersenne. 21 Augustus 1646.

Monsieur.

Pendant que vous avez pensé vous esloigner *a*) le plus de moy, j'ay eu le bien de vous veoir de près à la Haye, dans un portraict, assez mediocre qu'avait porté le S[r] Sorbière *b*) de Paris. A cest heure icy je donne la bienvenue à l'original, et vous remercie de la faveur que m'avez voulu faire de m'adresser de vostre retour. Ce que vous avez apprins au voyage de l'inventeur des nouvelles Lunettes d'approche par des machines si aysées me plaist fort, mais j'ay de la peine à imaginer qu'à la longueur de 3 pieds elles fassent l'effect de celles de 6 ou 7. Celà semble repugner aux principes optiques. Mais en tout cas usque quo abutimini patientia nostra? Quand est ce que les français produiront les grandes choses qu'ils promettent tous les jours? Ayons une de ces Lunettes par vostre moyen, et je suis content de la payer au triple ou quadruple. J'attendray cela de vos soings, ou jamais ne feray plus compte de ces grands hiatus de vos prometteurs.

Je n'ay pas encor veu le Simplicius [9]) de M[r] De Saumaise *c*),

---

a) Mersenne was zijn laatste reis naar Italië gaan doen en daarvan nu teruggekomen.

b) Samuel Sorbière, geboren te Saint-Ambroise (Gard) den 17den September 1615, vergiftigde zich 9 April 1670 te Paris; hij werd als wees opgevoed ten huize van zijn oom Samuel Petit. Bestemd tot protestantsch predikant, gaf hij de voorkeur aan de geneeskunde: daarin te Paris gepromoveerd, ging hij nog in 1646 naar den Haag. In 1650 werd hij directeur van het College te Orange; hij ging in 1653 tot de roomsche godsdienst over en in 1660 werd hij Historiographe du Roi; sedert 1667 dwaalde hij overal rond. Hij was een lastige intrigant, dan eens vleiend, dan weder hekelend; stelde fortuin boven roem; een geleerde, maar van oppervlakkige kennis, met een geest zonder orde.

c) Claude Saumaise (= Salmasius), zoon van Benigne Saumaise Seigneur de Tailly, Bouze, St. Loup, en Elisabeth Priot, werd den 13den April 1588 te Sémur-en-Auxois geboren en stierf te Spa den 3den September 1653. Hij reisde veel, werd protestant en huwde in 1623 Anne Mercier, die hem 6 kinderen schonk. In 1632 werd hij Hoogleeraar te Leiden,

estant absent de la Haye depuis quelques mois *d*), et non a loysir pour ces entretiens là, mais selon ce que m'en mande Mr Rivet, je comprends que c'est là le traicté mesme de Transubstantiation contre Grotius [10]) et au jugement de cestuy notre amy, la plus achevée pièce qu'il ayt encor veu en ceste matiere de laquelle souffrez qu'un Laïe vous die qu'à son advis, c'est la moins difficile de tout ce que nous disputons à ceux qui entendent le stile de l'Ecriture, ou qui veulent entendre, comme dit le satyrique non parant insanire ratione modoque, mais pour tout celà je n'espere pas que jamais nous nous entendions la dessus.

Il importe trop à l'Eglise de Rome que l'erreur (j'allay dire la fourbe) ne paroisse. Voyci bien le langage d'un franc Huguenot à un homme de vostre profession, mais à un homme de vostre distinction il n'est pas insupportable.

Il y a longtemps que j'ay eu du jeusne Vossius *e*) son Epistre de St Ignace [11]) et vault bien la peine de la veoir mais bien plus le vaudra ce que M. Saumaise voudra produire sur les notes de Cicéron et Tiron *f*) dont j' avouë n'avoir jamais bien pu comprendre le vray usage. à sçavoir comment il a esté possible qu'ils s'en soient servi aveq facilité et promptitude; conditions fort requises aux chiffres des gens d'affaires.

Pour chose nouvelle je vous annonce que le Profr Regius

---

hoewel hij andere aanzoeken van de Universiteiten te Padua, Bologna en in Engeland had afgeslagen. Later verbleef hij geruimen tijd aan het hof van koningin CHRISTINA van Zweden. Hij gaf vele werken uit.

d) HUYGENS was sedert den 30sten Mei met Prins FREDERIK HENDRIK op reis, om zich bij het leger te voegen [Dagboek].

e) ISAAC VOSSIUS, de zesde zoon van den Hoogleeraar GERARDUS JOHANNES VOSSIUS en ELISABETH JUNIUS, werd in 1618 te Leiden geboren en stierf te Londen den 21sten Februari 1689. Hij reisde van 1641 tot 1646 in Frankrijk en Italië, vertrok in 1648 naar koningin CHRISTINA van Zweden, maar keerde in 1654 naar Holland terug, vertoefde in 1663 in Frankrijk, en vertrok in 1670 naar Engeland, waar hij Canon of Windsor werd. Zijne rijke bibliotheek werd later voor *f* 33000 voor de Leidsche bibliotheek aangekocht.

f) Deze commentaren hebben, zoo verre mij bekend is, nimmer het licht gezien.

à Utrecht, qu'a souffert martyre pour la cause de Mr Descartes contre Voetius, produict toute ceste Philosophie naturelle, en un beau livre in 4⁰ qu'il nomme Fundamenta Physica [12]), qui enfin sera un corps achevé aveq beaucoup de bonnes figures, on dit que M. Descartes n'est pas satisfaict, car en quelques points audet a dictatore discrepare.

La chose se conduisant à son desceu, mais par une preface il aura soin de protester amplement que tout ce qu'il y aura de bon à son oeuure ne provient que de ce grand personnage duquel il établira et le mérite au plus haut point; comme il est bien raisonnable, jamais à mon advis les sciecles n'ayant rien produict de tel. J'en ay desjà jusques a 296 pages, et l'imprimé tire vers la fin et vous en aurez un explaire à la premiere commodité.

Vous faictes trop d'honneur à mes Pseaumes [13]) de vous informer de ce qu'ils sont devenus. Le Sr Gobert *g*) les a tous en mains aveq quelques Airs Italiens *h*) que je pretens d'y joindre et peu de françois *i*) qui vont venir. Quand tout sera ensemble je vous recommanderay une partie du soing de ceste impression, si tant est. Le dernier Psaume *k*) a esté un de profundis, que je souffre bien que vous examiniez, un plus recent que j'envoye encor présentment à M. Gobert, est sur les paroles du 142e memor fui dierum antiquorum cet. Par dessus la basse j'ay adjousté la Tablature du Luth. parce que le subject m'a convié a le jouer dans un ton fort bizarre, et duquel toute main ordinaire ne viendroit pas a bout, sans me faire tort, qui suis fort chatouilleux du choix

---

g) Thomas Gobert, uit Picardië, werd in 1630 kanunnik te St. Quentin. Hij was een goed musicus, en daardoor zeer bevriend met Constantyn Huygens; hij bezorgde de uitgave van zijne Pathodia Sacra door den uitgever Robert Ballard, unicus Regiae Musicae Typographus te Paris.

h) Zie in het werk, „Musique et Musiciens au XVIIe siècle, Correspondance et Oeuvre musicales de Constantin Huygens, publiées par W. J. A. Jonckbloet et J. P. N. Land. Leyde E.J.Brill. 1882. 4⁰ de „*Pathodia sacra et Profana occupati*" de Nos. XXI—XXXII.

i) Zie in hetzelfde werk de Nos. XXXIII—XXXIX.

k) Zie in hetzelfde werk het Nr. XX.

des Chordes, pour animer le chant y trouvant des differences merveilleuses et mysterieuses.

M. le Premier *l*) m'escrit d'un jeusn'homme *m*) que le Sr Gobert auroit trouvé pr moy. Je vous prie d'en prendre et de m'en donner cognoissance à ce que je puisse sçavoir combien il me seroit propice. Mais l'absence de la cour retardera tout cecy — le Sr Gobert ayant à la suivre. J'attendray donq en patience, mais en impatience de vos lunettes, sans lesquelles il n'y a plus d'amitié? Sia, sia, car je suis et serai toujours

Monsieur,

Vostre très humble et très affné serviteur
C. Huygens.

Au camp de St. Gilles païs de Waes en
Flandre 21 Août 1646.

V. Constantyn Huygens aan M. Mersenne.
13 Januari 1648.

Monsieur.

Je voy bien que vous ne lisez pas mes lettres qu'en passant et aliud agens. Voicy je pense la 3 ou 4e fois que je vous rememore les questions que je vous avoy proposées, touchant la conformation et bonté des Luths, et vous n'avez jamais daigné m'en dire un seul mot. Cepen-

---

l) Hier is bedoeld de „premier Escuyer du Roy:"

Henri de Beringhen, geboren in 1603 te Paris, en aldaar overleden den 30sten Maart 1692; hij was de kleinzoon van Pierre de Beringhen, van Nederlandschen oorsprong. Deze, zoowel als zijn zoon, waren hofbedienden bij Henri IV en Louis XIII: ook de kleinzoon bekleedde die betrekking, maar werd in 1630 verbannen. Hij trok toen naar Zweden en kwam in 1634 in dienst van Stadhouder Frederik Hendrik; later keerde hij terug aan het Fransche hof. Hij was een groot vriend van Constantyn Huygens.

m) Mr. Avril, door Gobert aanbevolen als „jeune, de bonnes moeurs et garçon de coeur, excellent musicien" (in diens brieven van 17 Juli en 25 November 1646, in het werk van noot *h*), page CCXV, CCXVII). Hij kwam in den Haag omstreeks half December 1646.

dant je persiste dans le dessin de vous satisfaire par mes propres experiences sur la plus part de vos questions touchant le Canon *a*), mais comme cela doibt se faire au rivage de la mer, où il ne faict pas bon se promener par la rudesse de ceste saison, je croy que vous me donnerez le loysir de veoir un peu remonter plus le soleil devant que d'y hasarder ma santé, qui s'ebransle aysement, et est subjecte aux defluxions. Ainsi, je vous pourray envoyer des experiences mechaniques, et moy mesme m'embarasser aux medicinales, et comme dit un cavalier Romain, entendant lire, teste nue, dans salle ouverte, où il faisait grand froid, certaine Bulle d'indulgence pour autant de mil ans, *et un Catarrho di piu* en mettant son chapeau et sortant de là de peur de se morfondre, et que le pape ne fust capable de le guerir. Vous ne seriez pas bien ayse de me veoir dans ce predicament là. Par ainsi, nous attendrons quelque temps à vous régaler de ces experiences et cependant je demeure

Monsieur,

A la Haye, le 13 Janv. 1648.

Vostre très humble et affec[né] serviteur
C. HUYGENS.

Hastez-vous de nous produire vostre phie *b*) de Vacuo *c*) mais cependant voyez ce que m'en mande M. Descartes.

VI. CONSTANTYN HUYGENS AAN M. MERSENNE. 14 AUGUSTUS 1648.

Monsieur.

J'ai veu aveq desplaisir et non sans apprehension la main

---

a) Omtrent deze proeven met het kanon, waaraan ook CHRISTIAAN HUYGENS deelnam, raadplege men onderscheidene brieven in het 1e Deel en in het Supplement van het 2e deel van de *Correspondance de* CHR. HUYGENS.

b) Dat is: philosophie.

c) Dit werk van MERSENNE is nimmer verschenen, denkelijk in verband met zijn spoedig gevolgden dood.

empruntée *a*) qui m'a escrit vostre derniere lettre-dieu j'espere, vous aura encor remis de ce mal, qui est de acutis, et ne peut estre negligé. Mon Archimede *b*) est à la Haye *c*), et je suis dehors *d*) depuis 15 jours, desquels une partie a esté employée aux solennités du Baptesme *e*) de nostre jeusne Electeur de Brandebourg à Cleve. Ce que j'ay à vous rapporter de ce voyage là, c'est que j'y ay eu tout mon saoul de très excellente musique instrumentale, que possede cet Electeur de toutes façons, et nommement de Violes de Gambe incomparables, de Harpes d'yslande et autres, de dolcians, Cornets Positifs et autres pieces de tres bon concert, toutes manieres en grande perfection; pensez si je m'y suis trouvé simia inter nuces.

---

a) MERSENNE was toen zwaar ziek. In Maart 1647 toch werd hij bij eene ziekte door een onkundig chirurg gelaten, die hem, in plaats van een ader, een slagader opende. Hoewel deze fout spoedig hersteld werd, had toch het bloedverlies een ongunstigen invloed op zijne gezondheid. Half Juli 1648 riep hij de hulp van GASSENDI in, maar deze vermocht hem niet te redden: hij overleed den 1sten September 1648, bijna 60 jaren oud.

Hij was den 8sten September 1588 in la Soultière (Maine) geboren uit een landbouwer JULIEN MERSENNE en JEANNE MOULIÈRE. Eerst bij de Pères de l'Oratoire opgevoed, ging hij bij de oprichting van het Jezuiten-college la Fleche daarheen, en werd daar boezemvriend van RÉNÉ DES CARTES. Deze laatste werd militair. MERSENNE werd den 17den Juli 1611 frère Minime in het klooster van Nigeon, bij Paris. Van 1614—1620 onderwees hij de philosophie aan het klooster van St. François de Paula te Nevers. Te Paris teruggekeerd in het klooster de l'Annonciata, trad hij heftig op tegen de Sceptici. Later ging hij over tot wis- en natuurkundige studiën, en was in die richting een groote steun voor DESCARTES. Bij herhaald reizen in de Nederlanden en Italië, maakte hij vele kennissen, en onderhield een zeer uitgebreide briefwisseling: hij stelde gaarne allerlei wetenschappelijke vraagstukken aan de orde, om die door anderen te doen oplossen.

b) Zoo noemt CONSTANTYN gewoonlijk zijn zoon CHRISTIAAN HUYGENS.

c) CHRISTIAAN HUYGENS was dus uit de Universiteit te Breda, naar 's Gravenhage teruggekeerd.

d) CONSTANTYN HUYGENS vertrok uit den Haag den 30sten Juli 1648, om er den 27sten October eerst terug te keeren [Dagboek].

e) De doop van WILHELM HENDRIK, Prins van Brandenburg, had plaats den 2den Augustus 1648 [Dagboek].

Au moins j'ày bien excité ces musiciens, qui sont tous gens de bonne sorte non mechanique, et nous sommes devenus grands amis, quand je les ay faict taster de quelques mienes compositions, qui ne sont jamais parvenues à vostre cognoissance, n'y ne la meritent pas. Le S[r] de la Barre *f*) me tesmoigne de l'inclination à dedier le service de sa fille *g*) et fils *h*) a nos Altesses, si une consideration ne me retenait, je travailleray à ce marché, et verray pourtant ce qu'il y aura moyen d'y faire à la Haye, que nous sommes laissez de ne reveoir pas de 5 ou 6 sepmaines, ayant à roder encor par d'autres Provinces esloignées plus que celle-cy. Led. S[r]. la Barre m'escrit d'un certain clavier d'espinette mouvant, qu'il a inventé, à faire changer de ton. Si vous sçavez comment celà se prattique, je vous en demande la science, mais soyez bien gueri et de loysir, avant que de vous y amuser et me croyez passionnement

Monsieur

A Nimmeghe, quod est verum Taciti oppidum Batavorum en despit de plus pedans qui s'y sont mespris. 14 Août 1648.

Vostre très-humble serviteur
C. Huygens.

---

f) Seigneur de la Barre was „Epinette et Organiste du Roy et de la Reyne", een groot musicus, zeer bevriend met Constantyn Huygens.

g) Deze dochter heette Anne de la Barre; zij was een groote schoonheid en eene beroemde zangeres. Het plan om haar naar Holland te zenden, schijnt toen te zijn afgesprongen, want Christina van Zweden had haar naar haar hof geroepen op zeer voordeelige en eervolle voorwaarden. Doch ook die reis werd uitgesteld, en eerst den 3[den] Februari 1653 kwam zij toch te 's Gravenhage, en bleef toen eenigen tijd in de Nederlanden.

h) De zoon de la Barre was evenzeer een goed musicus in theorie en in praktijk.

AANTEEKENINGEN.

[1]) *H. Grotii* Commentatio ad loca quaedam Novi Testamenti quae de Antichristo agunt, aut agere putantur, expendenda eruditis. Amstelodami apud *Joh. & Cornelivm Blaev.* CIƆIƆCXL. 8°.

Herdrukken: ib. *id.* 1641. 8°. Oxoniae. 1675. 8°.

Hiertegen schreven Maresius en Jac. Laurentius.

[2]) Via ad pacem ecclesiasticam in qua continentur: Confessio fidei, secundum Conc. Trid. Confessio fidei Avgvstana. Consvltatio Cassandri. Annotata *H. Grotii* in Consultationem Cassandri. H. Grotii Poema de Baptismate. Poema de Eucharistia. Disquisitio Pelagiana. Anno M.DC.XLII. in 8°.

Herdruk: Amsterdami, apud *Johannem Blaev.* MDC.XLII. in 8°.

[3]) Responce à trois Lettres du Sieur la Milletière sur les moyens de réunion en la religion; avec la defence de *Rivet* contre les calomnies du Sieur la Milletière en son pretendu Catholique reformé, plus une lettre d'un docte personnage sur le mesme traicté. Quevilly. 1642. in 8°.

[4]) *a*) *Th. Br. de la Milletière.* Lettre à un de ses Amis, où sont resolves les difficultéz formées par le mal-entendu des Evangeliques contre la doctrine Catholique de la présence réelle: la nécessité de la puissance du Pape en l'Église pour remede contre le schisme, pour une legitime reformation.

De predikant D. Blondel schreef hier tegen, en werd beantwoord door zijn:

b) Reponse à la Lettre d'un de ses Amis sur la necessité de la puissance du Pape en l'Eglise sur la doctrine du purgatoire; prière Chrestienne et Catholique: jugement sur le livre de l'Eucharistie de M. Blondel; la vérité du Saint Sacrement de l'Eucharistie; le catholique reformé défense de la méthode nouvelle introduite pour soutenir l'autorité de la foi catholique. Par *Th. Br. de la Milletière.*

[5]) Regius had geschreven

a) *H. Regius* Theses pro circulatione sanguinis. Ultr. 1640.

Waartegen het werk verscheen

b) *Jacobi Primerosii* Animadversiones, quas pro circulatione sanguinis in Academia Ultrajectinâ Regius disputandas posuerat. Leidae. 1641.

En hierop had Regius geantwoord in zijn:

c) Spongia, qua ejiciuntur sordes animadversionum quas Jacobus Primerosius, Lector medicus, adversus theses pro circulatione sanguinis in Academia Ultrajectina disputatas nuper edidit. Auct. *H. Regio* Leidae 1641. in 4°.

[6]) *J. Primerosii*, Antidotum adversus Regii venenatam Spongiam sive vindicias animadversionum Regii Spongiae reposuit. Leidae 1642.

[7]) De vroetschap der stadt Utrecht aan R. Descartes 13 Juni 1643.

[8]) Dit strijdschrift was gericht tegen het werk van Aanteekening 2.

a) *A. Riveti*, Animadversiones in Hugonis Grotii Annotata in G. Cassandri consultationem. Accessit Tractatus de Christianae pacificationis et ecclesiae reformanda verâ ratione ante 80 annos editus. Lugd. Bat. 1642. 8°.

Daarop volgden later:

b) *Hugonis Grotii*, Animadversiones in Animadversiones Andreae Riveti. Lutetiae Parisiorum. CIƆ.IƆCXLII. in 8°.; ook te Heidelberg in hetzelfde jaar.

c) *A. Riveti*, Examen Animadversionum H. Grotii pro suis notis ad consultationem Cassandri. Accessit Prodromus adv. Calumnias Th. Bractati Milleterii. Lugd. Bat. 1641. 8°.

d) *Hugonis Grotii*, Votvm pro pace ecclesiastica, contra Examen Andreae Riveti et alios irreconciabiles. Ecce quam bonum & quam jucundum habitare fratres in unum. MDCXLII. in 8°.

e) *A. Riveti*, Apologeticus pro suo de verae et sincerae pacis Ecclesiasticae proposita, contra Grotii votum. Lugd. Bat. 1643. in 8°.

f) [*H. Grotius*], Rivetiani Apologetici, pro schismate contra votvm pacis facti, discussio. Monopolis apud Hesychium Candidum. CIƆIƆCXLV. in 8°.

g) *A. Riveti* Grotianae discussionis διαλυσις. Roterod. 1648. 8°.

[9]) Simplicii || Commentarius || *In* || Enchiridion Epicteti || *Ex Libris veteribus emendatus* || Cum Versione || *Hieronymi* Wolffii || Et || Cl. Salmasii || Animadversionibus || et notis || Quibus Philosophia Stoica passim explicatur || & illustratur. || *Quae accesserunt, sequens pagina indicabit* || vignette: de landbouwer met het motto fac et spera || Lugduni Batavorum || Typis Johannis Maire, || CIƆIƆCXL. in 4°.

Verso van titel bevat de inhoud (5 stuks), dan „Cl. Salmasivs" philosophiae Stoicae || studiosis (13 blz.). In verso volgt:

Epistola || danielis || heinsii || *Ad* || Theodorum Graswinckelium || dedicatoria (1 blz.), daarop Typographus (1 blz.), 2 grieksche verzen (1 blz.), „epicteti vita" (1 blz.).

A—Tt (blz. 1—332), het werk zelf in 2 kolommen, links het grieksch, rechts het latijn: Index rerum et variorum (12 blz.). Nieuwe titel.

Cl. salmasii || notae || *et* || animadversiones || *in* || epictetum || *et* || simplicium. || Vignette even als boven.

A—XX (blz. 1—329). Index Graecus (25 blz.). Index Latinus (8 blz.): Nieuwe titel.

Tabula cebetis || Graece, Arabice, Latine || *Item* || aurea carmina || pythigorae || Cum paraphrasi Arabica, || Auctore || Johanne elichmanno || M. D. || *Cum Praefatione* || Cl. Salmasii. Vignette even als boven.

Verso van titel wit: dan CL. SALMASII || PRAEFATIO || *IN* || TABULAM CEBETIS || ARABICAM (32 blz.) dan plaat en daarop:

A—I, blz. 1—88. De verso bevat het arabisch, de recto bevat in twee kolommen: links het latijn, rechts het grieksch. Evenzoo is ingericht:

A—D, blz. 1—15, het werk:

PYTHAGORAE || AVREORVM CARMINVM || Arabica paraphrasis || *CVM* || LATINA VERSIONE. || *Auctore* || JOH. ELICHMANNO. || M. D.

10) Hugonis Grotii. De coenae administratione ubi Pastores non sunt. Item an semper communicandum per symbola? Dissertatio, Anno Domini MDCXLVI. 31 bldz. in 8°.

In het Engelsch vertaald. London 1685 en 1708. in 8°.

11) EPISTOLAE GENVINAE || S. IGNATII || MARTYRIS, || quae nunc primum lucem vident ex || bibliotheca Florentina, || *Adduntur* || S. IGNATII EPISTOLAE, || quales vulgo circumferuntur. || *Adhaec* || S. BARNABAE EPISTOLA. || Accessit universis translatio vetus. || *Edidit* & NOTAS *addidit,* || ISAACVS VOSSIVS. || Vignette: de sphaera armillaria, met het motto INDEFESSUS AGENDO || AMSTELODAMI. || Apud IOANNEM BLAEV, || CIƆIƆCXLVI. in 4°.

Verso van titel wit, dan opdracht "ILLVSTRIBVS VIRIS, GERBRANDO PANCRATIO, IOANNII CORNELIO GEELVINK, GERARDO SCHAEP IC., CORNELIO BICKERO, REIP. AMSTELODAMENSIS CONSVLIBVS" (6 blz.). Dan BENEVOLO LECTORI S. P. (3 blz.).

A—Rr bevat:

Blz. 1—254. De epistolae in twee kolommen, de buitenste grieksch, de binnenste latijn.

Blz. 259—318. De noten van VOSSIUS.

12) HENRICI REGII || ULTRAJECTINI || FUNDAMENTA || PHYSICES || vignette: Minerva onder den laurierboom, met het devies "NE EXTRA OLEAS" || *AMSTELODAMI,* || Apud LUDOVICUM ELSEVIRIUM. || ANNO || CIƆIƆCXLVI. in 4°.

a, b. In verso van den titel de grieksche spreuk: "*πάντα δοκιμάζετε, τὸ* || *καλὸν κατέχετε*". Dan opdracht aan "Frederico Henrico" gedateerd 10 Augusti, Anni 1646, stylo Jul. (4 blz.); daarop INDEX || CAPITUM || RERUMQUE PRINCIPVARUM, QUAE IN IIS || FVNDAMENTIS PHYSICIS || EXPLICANTUR (10 blz.).

A—Qq. Blz. 1—306.

Daarop 1 blz. Errata.

13) PATHODIA || SACRA, || ET || PROFANA || OCCVPATI, || een fraaie samengestelde vignette met muzieknoten en instrumenten en het motto VIRTVTI FORTVNA CEDIT. || PARISIIS. || Ex Officina ROBERTI BALLARD, vnici Regiae Musicae || Typographi. || M.DC.CXLVII. in 4°.

In verso van den titel eene plaat, voorstellende een muziekpartij aan het hof. Dan opdracht aan "UTRICIAE OGLE NUPER SUANNIAE". Daarachter "CAUTIO".

46 blz. met muziek van psalmen; dan een "AD LECTOREM" en daarop 39 blz. met muziek van wereldlijke liederen in het italiaansch en fransch.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 26 Januari 1889.



Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voorzitter, DE VRIES, ZAAIJER, FRANCHIMONT, VAN DORP, A. C. OUDEMANS JR., KORTEWEG, MAC GILLAVRY, SCHOUTE, BEIJERINCK, HOFFMANN, BAEHR, ZEEMAN, FORSTER, J. A. C. OUDEMANS, PLACE, STOKVIS, BIERENS DE HAAN, MICHAËLIS, DIBBITS, HUBRECHT, PEKELHARING, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, ENGELMANN, RAUWENHOFF, KAPTEIJN, BUYS BALLOT, MARTIN, HOEK, SURINGAR en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige Vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:
1⁰. R. M. VAN LIJNDEN, Secretaris van het provinciaal Utrechtsch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen te Utrecht, Januari 1889; 2⁰. J. F. L. SCHNEIDER, Bibliothecaris der Polytechnische School te Delft, 14 Januari 1889; 3⁰. den Secretaris van het Sanitary Institute te Londen, 21 Januari 1889; 4⁰. den Directeur van het Institut royal géologique te Budapest, 2 Januari 1889; 5⁰. H. BOESCH, Secretaris van het germanisches Nationalmuseum te Neurenberg, 17 Januari 1889; 6⁰. R. HILDEBRAND, Leipzig, 20 Januari 1889; 7⁰. G. BIZIO, Secretaris van het real Istituto

di Scienze, Lettere ed Arti te Venetië, 28 December 1888; 8°. J. M. Latinho-Coelho, Secretaris der Académie royale des Sciences te Lissabon, Januari 1889; 9°. S. Müller, Secretaris der Société royale des Antiquaires du Nord te Kopenhagen, 1889; 10°. F. Malmberg. Directeur van het nautisk-meteorologiska Byran te Stockholm, 10 Januari 1889; 11°. R. Thalen, Bibliothecaris der Société royale des Sciences te Upsala, 2 Januari 1889; 12°. den Directeur van het Comité géologique de la Russie te St. Petersburg, 5 Januari 1889; 13°. den Bibliothecaris der Académie impériale des Sciences te St. Petersburg, 21 Januari 1889; 14°. F. Kurtz, Bibliothecaris der Academia nacional de Ciencias te Cordoba, 17 December 1888. — Aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1°. het Ministerie van Binnenlandsche Zaken te 's Gravenhage, 2 Januari 1889; 2°. J. T. Buijs, Leiden, 21 Januari 1889; 3°. J. F. L. Schneider, Bibliothecaris der Polytechnische School te Delft, 22 Januari 1889; 4°. R. M. van Lijnden, Secretaris van het provinciaal Utrechtsch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen te Utrecht, Januari 1889; 5°. J. Ritzema Bos, Wageningen, 7 Januari 1889; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— De Heeren van Diesen, Schols en Behrens hebben zich schriftelijk over hunne afwezigheid verontschuldigd.

— De Heer Buys Ballot vergeleek de uitkomsten der waarnemingsreeks te Utrecht, nu gedurende veertig jaren voortgezet, met de normalen, die hij voor temperatuur en barometerstand in 1876 in de Marche annuelle gegeven had, en toonde aan, dat de verschillen daarvan met de normalen niet grooter waren dan een paar jaren zouden kunnen verdubbelen of te niet maken.

Hij gaf voorts, als eveneens hoog noodig voor de kennis van het klimaat, ook de uiterste afwijkingen van de ge-

middelden, in verschillende jaren voor elke maand waargenomen; daarbij de gemiddelde sommen der dagelijksche waarnemingen in elke der maanden Januari, Februari, enz.; ook nog hoe lang de afwijkingen in denzelfden zin soms voortduurden, en tot welk bedrag, en vergeleek de daaruit af te leiden afwisselingen met die op andere plaatsen in het noorder Halfrond, verwijzende naar het Jaarboek 1879 II, dat weldra van de pers zal komen.

Eindelijk toonde hij de tabellen voor de hoeveelheden regen, voor zoover Zwanenburg betreft, van 1743 af, en tabellen die de overmaat aanwijzen van temperatuur, luchtdrukking en regenhoeveelheden, op sommige tijden te Utrecht gebleken, en hoe lang het soms duurde eer compensatie plaats vond. De spreker hoopt over dit onderwerp later een opstel voor de Verslagen en Mededeelingen aan te bieden.

De Heer Forster doet opmerken dat, uit een hygiënisch oogpunt, naast het klimaat en de temperatuurverschillen in de open lucht, ook die van afgesloten ruimten — kamers, enz. — en die welke door verschil in kleeding veroorzaakt worden, van belang zijn. In afgesloten ruimten is de temperatuur steeds hooger dan in de buitenlucht, zooals den spreker o. a. uit opzettelijk daartoe genomen proeven gebleken was, toen hij eenige jaren geleden den warmtegraad binnen de muren van den Zuiderkerkstoren met die der buitenlucht vergeleken had.

De Voorzitter vraagt in hoeverre, bij meteorologische berekeningen als de medegedeelde, van periodieke formules gebruik gemaakt zou kunnen worden. De Heer Buys Ballot meent, dat die formules daar van geen nut kunnen wezen, daar noch de verschillen in temperatuur, noch die der luchtdrukking, aan eenige periodiciteit schijnen te gehoorzamen.

— De Heer Beijerinck spreekt »Over een middel om de werking van verschillende stoffen op den groei en enkele andere levensverrichtingen van microörganismen vast te stellen" en heldert zijne voordracht door praeparaten op. Het middel bestaat hierin, dat men op gelatineplaten, zuiver of meer of minder toebereid, en met de eene of andere soort van

gist of bacteriën besmet, kleine hoeveelheden van verschillende stoffen overbrengt, en dan nagaat of de microörganismen in de diffusiecentra dier stoffen, hetzij deze zuiver bleven of elkander op hun weg ontmoetten, zich al of niet, of wel in meerdere of mindere mate vermenigvuldigen. — Een opstel over het onderwerp wordt aangeboden voor de Verslagen en Mededeelingen.

De Heer Mac Gillavry vraagt of niet de reactie van de gelatine bij de kultuur van microörganismen eene voorname rol speelt, en verkrijgt ten antwoord, dat zulks zeer zeker het geval is, zoodra proeven genomen worden met bacteriën, doch dat de gistcellen, waarmede de spreker zich trouwens meer uitsluitend had bezig gehouden, lang zoo gevoelig niet zijn.

— De Heer Franchimont biedt, uit naam der Redactie, voor de boekerij der Akademie aan een exemplaar van den 7[den] Jaargang van het »Recueil des travaux chimiques dans les Pays-Bas".

— Daar er verder niets te verhandelen is, wordt de Vergadering gesloten.

OVER EEN MIDDEL OM DE WERKING

VAN

VERSCHILLENDE STOFFEN OP DEN GROEI

EN ENKELE ANDERE

LEVENSVERRICHTINGEN VAN MICROÖRGANISMEN VAST TE STELLEN *).

DOOR

M. W. BEIJERINCK.

Bij het onderzoek van de levensverschijnselen der microörganismen *), is het zonder twijfel in de allereerste plaats van belang, zekerheid te verkrijgen aangaande de stoffen, welke tot hun groei en vermenigvuldiging aanleiding kunnen geven. Wel is waar is het bij het vinden van nieuwe vormen meestal gemakkelijk uit te maken, welk mengsel van voedingsstoffen de ontdekking daarvan in het gegeven geval heeft mogelijk gemaakt, zoodat het aanleggen van blijvende culturen in overeenkomstige mengsels niet moeielijk is. Maar wenscht men voor bepaalde soorten een ruimer overzicht over de assimileerbare stoffen te verkrijgen, dan stuit men

---

*) In overeenstemming met het tegenwoordige spraakgebruik versta ik onder microörganismen die vormen, welke in voedingsgelatine, kunnen gekweekt worden.

op allerlei bezwaren. Tot nu toe pleegt men de vraag te beantwoorden door in vloeistofculturen of in de voedingsgelatine de te onderzoeken stoffen te brengen, en dan door weging of door telling van de cellen, of door schatting van de grootte der koloniën of entstrepen, de hoeveelheid nieuw gevormde levende stof te bepalen. De toestand van de literatuur bewijst, hoe weinig talrijk de vaststaande feiten zijn, op deze wijze verkregen. Hoe gering is bijvoorbeeld de oogst bij de studie van de talrijke verhandelingen, welke over de voedingsverschijnselen van de bier- en de wijngist geschreven zijn! Met uitzondering van de klassieke ontdekkingen van Pasteur en Cohn aangaande de noodzakelijke aschbestanddeelen en de natuur der assimileerbare stikstofverbindingen voor eenige bepaalde gistsoorten, bacteriën en bacteriënmengsels, geven de vele verspreide waarnemingen van latere schrijvers, die zich met dit onderwerp hebben bezig gehouden, slechts bij uitzondering volle bevrediging. Vaak was de proefneming te omslachtig om gemakkelijk herhaald te kunnen worden, of de controle op het rein blijven der culturen niet overtuigend, of twijfelde men aan de juistheid der keus van de gebruikte concentratie der onderzochte stoffen, of waren de conditiën, waarbij de vergelijking van verschillende stoffen plaats had, niet in alle verdere opzichten identiek. Door de toepassing van de volgende handelwijze, welke op de erkentenis van twee eenvoudige eigenschappen der zoogenaamde »vaste cultuurgronden" voor microörganismen berust, is het mogelijk, eenige dezer storende invloeden te vermijden. De beide bedoelde eigenschappen zijn de volgende. *Ten eerste*: de gelatine en de gelose (gezuiverde agar-agar) zijn geene voedingsmaterialen voor de meeste microben; *ten tweede*: door de vaste, gestolde gelatine- en geloselagen heeft de hydrodiffusie van opgeloste stoffen op bijna dezelfde wijze plaats als in water. Van deze beide beginselen laat zich nu als volgt gebruik maken.

Aan alle bacteriologen is het bekend, dat zuivere gelatine en gelose, of oplossingen daarvan in gedistilleerd water, een uiterst slechte voedingsbodem voor bacteriën, gist en zelfs schimmels zijn. Dit berust niet alleen daarop, dat de ge-

latine als zoodanig voor de meeste soorten niet assimileerbaar en bijna volkomen vrij is van andere assimileerbare stikstofverbindingen, zooals amiden en peptonen, maar tevens op het daarin meer of minder volledig ontbreken van de noodzakelijke aschbestanddeelen, in het bijzonder van het kaliumphosphaat, en van het niet stikstofhoudend voedsel, zooals lactaten en koolhydraten. Gelatine of gelose, opgelost in gedistilleerd water, bezit dus de volgende drievoudige eigenschap. Daarin komen voor: een ontoereikende hoeveelheid aschbestanddeelen, een ontoereikende hoeveelheid assimileerbare stikstof en een ontoereikende hoeveelheid stikstofvrije verbindingen, om den groei van de meeste microörganismen, meer dan tot een onmerkbaar klein bedrag, mogelijk te maken. Elk dezer groepen van verbindingen, of twee daarvan gezamenlijk, zijn eveneens ontoereikend voor de ontwikkeling der in de gelatine verspreide microben. Zal er groei plaats hebben, dan moeten noodzakelijk de drie groepen van voedingsstoffen gezamenlijk vertegenwoordigd zijn.

Gesteld dus men zaait eene bepaalde gist- of bacteriënsoort uit in een gelatine, waaraan de aschbestanddeelen ontbreken, dan zullen zelfs de gunstigste aschvrije voedingsmengsels werkeloos blijven. Plaatst men nu echter op de oppervlakte van een zoodanige gelatinelaag een weinig van de als noodzakelijk erkende zouten, dan begint, na korten tijd, elk der in het diffusieveld dezer zouten verspreide kiemen zich tot een kolonie te ontwikkelen, en zoodoende ontstaat er een cirkelrond, scherp omschreven, ondoorschijnend veld op den doorschijnenden gelatinegrond.

Dat men aan deze proef door kleine wijzigingen een zeer algemeen karakter kan geven, is uit het bovenstaande duidelijk; intusschen wensch ik dit nog door een bepaald voorbeeld nader toe te lichten.

De gewone wijngist groeit niet dan bij de aanwezigheid van belangrijke hoeveelheden kaliumphosphaat, gemengd met het organische voedsel. Lost men dus zuivere gelatine in water op en mengt daarin een matig groot aantal gistcellen, waardoor de gelatine haar volkomen doorzichtigheid volstrekt niet

behoeft te verliezen, dan verkrijgt men na stolling een grond, die aan den bovengenoemden eisch van den groei te verhinderen, zonder den dood der gistcellen te veroorzaken, voldoet *). Plaatst men nu op de oppervlakte dezer gelatine een droppel eener oplossing, die glucose en asparagine bevat, en op zekeren afstand daarvan verwijderd een droppel kaliumphosphaat, en laat het geheel enkele dagen aan zich zelf over, dan neemt men ongeveer het volgende waar. Noch het organische voedsel alleen, noch het phosphaat op zich zelf, is in staat geweest de cellen tot koloniën te doen uitgroeien, maar voor zoover het diffusieveld van het kaliumphosphaat samenvalt met dat van de glucose en de asparagine, waren alle voorwaarden voor den groei verwezenlijkt en ontstaat er daar ter plaatse een geelachtige, ondoorschijnende, lensvormige figuur op den doorzichtigen gelatinegrond Deze figuur bestaat uit de nu duidelijk zichtbaar geworden gistkoloniën.

Brengt men op de oppervlakte van een als boven toebereide gelatine, waaraan echter vooraf een genoegzame hoeveelheid kaliumphosphaat is toegevoegd, op zekeren afstand van elkander, afzonderlijke druppels glucose en asparagine dan vormt zich, na zekeren tijd, een ondoorzichtige figuur in het gemeenschappelijke diffusieveld dezer beide stoffen, welke elk voor zich onwerkzaam zijn.

Plaatst men eindelijk op den grond, die behalve het phosphaat ook nog een koolhydraat bevat, stikstofhoudende stoffen, welke men op hare assimileerbaarheid wenscht te onderzoeken, dan ontstaat: hetzij een ondoorzichtig cirkelvormig veld, of wel een ringfiguur van gistkoloniën in den doorzichtigen grond.

Is daarentegen de toegediende stof niet assimileerbaar, dan blijft het diffusieveld daarvan geheel helder. Omgekeerd, kan men, door aan den grond vooraf de noodige stikstofhoudende stoffen toe te voegen, op overeenkomstige wijze vaststellen

*) Langdurig met gedistilleerd water uitgeloogde gelatine is, evenals gedistilleerd water zelf, voor zeer vele microörganismen doodelijk of nadeelig, maar wijngist is daartegen bestand.

welke stikstofvrije stoffen voor het tot stand komen van den groei dienstig zijn. Ook hierbij ziet men dan in het diffusieveld de koloniën gelijkmatig, of in een ring geplaatst, te voorschijn komen, wanneer de betrokken stof assimileerbaar is.

De ringvormige plaatsing der groeiende koloniën is het bewijs, dat de concentratie van de onderzochte stoffen in het midden der diffusievelden te hoog was, waardoor de groei belemmerd of de kiemen gedood werden. In deze ringen bemerkt men echter nog klimming en daling van het aantal koloniën in de richting der stralen, welke op bijzondere inwerkingen van de diffundeerende stoffen moeten berusten.

Bij het gebruik maken van een gelatinegrond, waarin, behalve het organisme, alle noodzakelijke voedselstoffen voorkomen, zoodat zich de koloniën daarin overal gelijkmatig zouden kunnen ontwikkelen, is het gemakkelijk, door het opleggen van vergiftige of antiseptische stoffen, heldere diffusievelden dezer stoffen op den troebel wordenden grond te verkrijgen.

Behandelt men den grond, na afloop der proefneming, met de een of andere anilinekleurstof, die wel de cellen, maar niet de gelatine kleurt, dan ontstaan, na indroging, preparaten van blijvende waarde. Zijn de onderzochte soorten niet al te doorzichtig, dan is eenvoudig indrogen voor het verkrijgen van duurzame preparaten voldoende. Door bevochtiging keeren zij in den oorspronkelijken toestand terug.

Ten slotte wil ik er nog op wijzen, dat het, in de bovenstaande regels beschreven, beginsel nog voor een andere, hoewel minder omvangrijke toepassing vatbaar is. Ik heb hierbij die gevallen op het oog, waarbij eenig organisme, alleen onder den invloed van bepaalde stoffen, zekere zichtbare of gemakkelijk langs chemischen weg aan te toonen functie verricht, bijv. een zuur of een enzym afscheidt, een pigment vormt of licht geeft, alzoo werkingen, die volstrekt niet noodzakelijk met den groei behoeven verbonden te zijn. In zoodanige gevallen kan men, eveneens met behulp van gelatinegronden, waarin het organisme in groote hoeveelheid voorkomt, zonder daarin de bewuste werking

te veroorzaken, door het opleggen van de te onderzoeken stoffen, het al of niet optreden dezer werking vaststellen.

Op deze wijze onderzocht ik, niet zonder vrucht, den invloed van een aantal stoffen op het lichtend en zuurafscheidend vermogen van *Photobacterium phosphorescens*: en op de pigment-afscheiding van *Vibrio cyanogenus*: het organisme van de blauwe melk. Later hoop ik daarop nog nader terug te komen.

Zooals men ziet, geeft de beschreven methode een eenvoudig middel aan de hand om de werking van verschillende stoffen op de levensuitingen der microben te onderzoeken, zonder dat men daarbij bekend behoeft te zijn met de gunstigste concentratieverhoudingen dezer stoffen, welke kennis voor het welslagen van vloeistofculturen zeer moeielijk gemist kan worden. Heeft men bij mijne proef de concentratie locaal te hoog doen worden, dan is de diffusie in de gelatine steeds werkzaam om die concentratie te verminderen en ergens een ringveld met de meest voordeelige hoeveelheid voort te brengen, waardoor, zooals boven reeds is opgemerkt, een vlek van gedoode of in hun groei of andere verrichtingen teruggehouden cellen ontstaat, ingesloten door een ring van werkzame koloniën. Tevens geeft de reinheid der culturen bij de diffusie-methode in een vasten bodem weinig reden tot onzekerheid, en, bij het gebruik van gelatineplaten van groote uitgebreidheid, kunnen verscheidene stoffen gelijktijdig op denzelfden grond worden gebracht, waardoor de overige invloeden, zooals temperatuur-schommelingen, afwisseling van licht en duister, van zuurstof-toetreding en verdamping van koolzuur en water, voor alle onderzochte stoffen uit den aard der zaak volkomen dezelfde zijn.

UITKOMSTEN

VAN DE

REEKS VAN METEOROLOGISCHE WAARNEMINGEN GEDURENDE 40 JAREN TE UTRECHT.

DOOR

C. H. D. BUYS BALLOT.



Nu de meteorologische waarnemingen te Utrecht 40 jaren lang op dezelfde wijze zijn voortgezet, meen ik aan de Akademie daarvan omtrent temperatuur, barometerstand en regen verslag te moeten doen, en tevens daaromtrent eenige beschouwingen en berekeningen te moeten mededeelen.

Voorloopig neem ik daarin alleen op de gemiddelde temperatuur, de regenhoeveelheden van den dag, en de barometerstanden van des morgens acht uren. De verschillen van andere uren daarmede zijn zeer overeenkomstig met die, welke in de »Marche annuelle du thermomètre et du baromètre en Neerlande 1876," voorkomen en uitvoeriger in de Nederlandsche meteorologische jaarboeken van 1858, 68, 78.

Voor luchtdrukking en temperatuur zijn alle afwijkingen en ook de overmaat berekend naar deze normalen, maar de regenafwijkingen naar de gemiddelden van de 39 jaren 1849—1887. De regenhoeveelheden toch zijn gemiddeld al te ongelijk in verschillende maanden en jaren, dan dat ik daarvoor een eigenlijk gezegde normaal meende te kunnen vaststellen. Ook zijn er geen lang genoeg voortgezette waarnemingen van regenhoeveelheden op naburige plaatsen

bekend, zoodat de gang daarvan niet scherper kon worden bepaald uit de verloopen 39 jaren, waarin het veertigste jaar geen merkbare verandering bracht.

Ter vergelijking herhaal ik hieronder ook nog de normaal voor temperatuur, zooals die medegedeeld is in de werken der Akademie 1861, toen uit twaalf jaren verkregen, welke slechts weinig gewijzigd behoefde te worden in 1875. De laatste normaal voldoet al zeer goed, daar een verschil van een tiende graad voor een maand zeer licht door een paar volgende jaren kan uitgewischt worden.

Zoo is het verschil van den barometerstand in Februari sedert 1876 de helft afgenomen, dat voor Januari sedert 1873 geheel omgeslagen. In 1873 scheen de barometerstand een millimeter te hoog geschat te zijn, nu een halven millimeter te laag, September tot December wisselden in de laatste jaren het teeken van het verschil. En wat de temperatuur betreft zoo verminderde het verschil reeds weder in de drie eerste maanden van 1889, terwijl in de drie laatste jaren het teeken van het verschil omsloeg.

Alleen Mei is bijna een halven graad te hoog aangeslagen. Hieromtrent valt op te merken, dat wij werkelijk in den laatsten tijd veel koude Meimaanden hebben gehad.

De twintig eerste jaren 1849—1868 geven 13^0.40.
» » laatste » 1869—1888 » 12^0.73.

Wij mogen dus weldra eenige meerdere warmte in de Meimaanden wachten, hoewel bezwaarlijk het gemiddelde 13.^{0}38, in de werken der Akademie opgegeven, zal bereikt worden.

VERGELIJKING VAN DE WAARNEMINGEN MET DE NORMALE TEMPERATUUR.

	Norm. 1861.	Norm. 1875.	Waarn. 40 jaar.	Norm. 1859.	1875.	1876.	Waarn. 40 jaren.	Gemiddeld in jaren 1839.	40 jaren.
Januari	1.18	1.47	1.65	760.4	60 66	60.19	60.97	49.5	48.9
Februari	2 40	2 90	2.96	60,1	60.40	60.65	61.13	44.8	44.4
Maart	4.56	4.85	4 91	60.7	61.04	59.63	59.33	43.4	44.5
April	9.37	9.36	9.27	59.4	59 16	59.66	59.39	38.3	37.4
Mei	13.39	13.60	13.70	60.6	60 11	60.11	60.30	50.0	49.4
Juni	17.28	16.89	16.80	61.1	60.85	60.80	60.75	53.6	54.8
Juli	18.69	18.39	18.40	60.5	60.38	60.63	60.23	74.1	75.4
Augustus	18.42	18.00	17,83	60.6	60.67	60.43	60 07	81.4	81.1
September	14.99	15.14	14.97	61.0	61.07	60.73	60.69	67.0	66.0
October	10.41	10.36	10.14	60.1	59.89	59.04	59.11	73.1	73.0
November	5.04	5.18	5.07	50.9	59.28	59.33	59.18	59.9	59.4
December	2.08	2.61	2.71	59.6	59 46	60.37	60.15	62.1	61.9
Jaar	9.82	9.90	9.82	60.25	60.25	60.13	60.11	697.4	696.2

Maar het is voor de kennis van het klimaat niet voldoende den gemiddelden toestand aan te geven, men wil ook de grenzen der afwijkingen bepaald zien. Daarom geven wij de grootste en de kleinste afwijkingen van temperatuur en barometerstand en de grootste en kleinste regenhoeveelheden telkens met de jaren, waarin die voorkwamen, en daarachter den afstand van de grenzen der afwijkingen, zooals zij tot nu toe gebleken zijn, als verschillen.

	Temperatuur.				Barometerstand.				Regen.				Verschillen der grootste afwijkingen.		
Maand.	Grootste Afwijking positief.		Grootste Afwijking negatief.		Grootste Afwijking positief.		Grootste Afwijking negatief.		Grootste Afwijking positief.		Grootste Afwijking negatief.		Temperat.	Luchtdr.	Réaumer.
	°		°		m.		m.		m.		m.		°	m.	m
Jan.	4.08	1866	4.97	1850	10.43	1882	9.64	1885	51.6	1877	39.4	1861	9.05	20.07	91
Febr.	3.45	67	8.21	55	7.79	63	9.61	79	54.1	50	38.4	57	11.66	17.40	92
Maart	3.27	62	4.28	53	9.99	54	9.88	76	61.1	59	30.6	54	7.55	19.87	91
April	3.04	65	2.34	52	5.63	70	6.38	79	68.8	53	35.7	83	5.38	12.01	104
Mei	5.81	68	2.82	76	3.66	81	3.90	56	83.7	69	43.6	57	6.63	7.56	127
Juni	3.50	58	2.65	69	5.16	65	5.29	52	79.4	61	38.3	68	6.15	10.45	117.
Juli	3.43	52	2.66	88	4.77	85	5.49	88	109.4	65	68.9	85	6.09	10.26	178.
Aug.	3.06	57	3.47	81	3.47	69	5.62	60	92,4	70	61.2	71	6.53	9.09	153.
Sept.	2.77	65	2.46	77	7.10	65	5.06	76	76.3	76	58.5	65	5.23	12.16	134.
Oct.	1.76	57	3.49	81	7.35	56	6.06	85	142.4	52	70.5	61	5.25	13.41	212.
Nov.	3.47	52	3.94	58	7.71	67	6.67	82	55.6	66	55.5	53	7.41	14.38	111.
Dec.	4.45	52	5.90	79	9.98	57	9.27	76	88.7	54	52.6	64	10.35	19.25	141.

Wij zien, hoe voor temperatuur en luchtdrukking de grenzen in den winter verder uiteen liggen dan in den zomer, voor de regenhoeveelheden bijna omgekeerd. De tegenverschillen zijn althans na April grooter. Voor Januari hebben wij ten opzichte der temperatuur nog eens een grootere negatieve afwijking te wachten, daar voor deze maand het

verschil der uitersten nog kleiner is dan voor December en Februari. In de overige maanden zullen de opgegeven grenzen wel niet of slechts weinig overschreden worden.

Uit de grootte der gemiddelde afwijkingen der maanden kunnen wij wel afleiden, dat dan de dagelijksche afwijkingen ook niet gering kunnen zijn.

Om dat in het oog te doen vallen geven wij ook de gemiddelde sommen der dagelijksche afwijkingen in elke maand, maar zonder op het teeken te letten, omdat wij toch anders twee ongeveer gelijke getallen verkrijgen.

Voor Utrecht volgen hier die sommen: haar gemiddelde van 1867—1888, benevens de grootste en kleinste in ieder der maanden bereikt.

Sommen der temperatuurafwijkingen in graden Celsius.

	Jan.	Febr.	Mrt.	Apr.	Mei	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.
Grootste	140	152	125	117	158	116	122	101	93	111	128	198
Gem.	99	98	82	75	94	81	76	72	57	67	78	103
Kleinste	42	63	26	39	67	47	45	49	36	41	47	52

Sommen der barometerafwijkingen in millimeters.

Grootste	390	396	305	228	231	173	134	177	247	305	319	358
Gem.	251	216	214	175	156	119	129	129	162	204	228	249
Kleinste	159	101	133	86	119	64	77	82	105	127	151	171

Door deze afwijkingssommen voornamelijk wordt in verband met de heerschende windrichting en de vochtigheid de mindere of meerdere gunstige eigenschappen van het klimaat voor de gezondheid bepaald. Uit eene vergelijking van deze sommen met die, welke voor 154 plaatsen in het noorderhalfrond in 1879 II opgenomen zijn, kunnen wij dus de veranderlijkheid van Utrecht met die van de overige vergelijken.

Voor de temperatuur nemen deze sommen zeer af, naar mate de plaatsen meer in of aan zee zijn gelegen, toe, naar mate zij verder van zee zich bevinden. De westkusten der continenten hebben nog een voordeel boven de oostkusten, maar de breedte heeft er slechts geringen invloed op, terwijl integendeel de sommen van de barometer-afwijkingen geregeld met de breedte toenemen en slechts in geringe mate

van de lengte, liever van de ligging van de zee afhankelijk zijn.

Voor de maandelijksche, dagelijksche en uurlijksche veranderingen der temperatuur zelve geldt ook deze wet in haar geheel, voor den barometerstand gedeeltelijk, ten opzichte van de beide eerste omstandigheden.

De dagelijksche verandering der temperatuur wordt hieronder voor iedere Nederlandsche plaats aangevoerd, waar het minimum en maximum wordt aangeteekend. Het verschil van die twee kan als maat van den dagelijkschen gang gelden. Niet op alle plaatsen is men gelijktijdig daarmede aangevangen. Voor Utrecht, Maastricht en Helder vervolg ik hier de reeks medegedeeld in de Verslagen en Mededeelingen, tweede reeks, deel IX, Tabel. IV, over de later verloopen jaren, door de gemiddelde som dier verschillen te geven.

Dagelijksche gang in Celsiusgraden te

	Januari.	Februari.	Maart.	April.	Mei.	Juni.	Juli.	Augustus.	September.	October.	November.	December.
Helder	30	31	36	44	40	50	49	45	40	34	32	39
Utrecht.....	41	46	67	80	87	84	83	79	91	57	45	36
Tilburg.....	60	69	78	92	97	93	88	87	81	76	66	63
Vlissingen ..	38	37	58	69	69	67	66	61	58	46	38	35
Maastricht ..	51	54	76	92	103	102	99	95	86	69	53	50

Bijzonder groot was de dagelijksche gang te Utrecht, te Tilburg en Maastricht; welke twee plaatsen steeds Utrecht overtreffen, terwijl zij onderling wedijveren om het verschil tusschen maximum en minimum groot te maken. In den zomer, April tot Augustus, wint Maastricht het.

Aan de zeeplaatsen is het verschil aanmerkelijk kleiner, de helderheid is er geringer en daardoor ook de oogenblikkelijke invloed der zon en de uitstraling des nachts, waardoor het minimum niet zoo laag daalt.

Zijn de afwijkingen op zichzelve niet groot, en dit heeft insgelijks een punt van onderzoek uitgemaakt, zoo kunnen zij

toch meer of minder afwisselend zijn en daardoor bij zwakke gezondheid nadeelig werken, nadeeliger dan wanneer zij lang achtereen een zelfde teeken behouden, waardoor de lijder er zich aan gewent en alleen op te passen heeft, als een afwijking in tegengestelden zin aanvangt.

Om te laten zien hoe dit in Utrecht plaats heeft, heb ik de sommen gevormd uitsluitend van afwijkingen elkander in denzelfden zin zonder afbreking opvolgende. Die sommen zijn in elk jaarboek voor zoodanig jaar medegedeeld. Hier kon ik er mee volstaan enkele der grootste op die wijze verkregen sommen daaruit over te nemen.

Voor den thermometer van 4 December 1852—24 Januari 1853, **259°** — van 13 November 1853—4 Januari 1854, 261° — van 16 Januari—24 Mei 1855, 667°, — van 19 December 1858—29 Maart 1859, **260°**.

Voor den barometer van 6—28 December 1865, **294** mm. — van 9 Januari tot 5 Februari 1865, 366 mm. — van 10 November—21 December 1872, 364 mm. — van 11 Januari—11 Maart 1387, **535** mm.

Wij zien, althans na vergelijking met de uitvoerige tabellen in de Jaarboeken, dat de afwijkingen in denzelfden zin de grootste som bereiken in de maanden November, December, Januari, Februari en Maart.

Terwijl de afwisseling der positieve en negatieve afwijkingen van temperatuur en barometerstand en insgelijks groote en geringe regenhoeveelheden, het begrip reeds van normalen zelf, ons aan compensatie doen denken, is het niet vreemd, dat men telkens, als hooge temperatuur of luchtdrukking of omgekeerd eenigen tijd lang geheerscht heeft, vraagt: Wanneer krijgen wij nu compensatie, hetzij dan ten halve of geheel, of wel overcompensatie? Bij regenhoeveelheden is dit vooral voor waterschappen en waterreservoirs ten dienste van de waterleidingen naar de groote steden van belang. Valt er op het daartoe gebruikte terrein water genoeg, om de stad, waarheen het water gevoerd moet worden, geregeld en voortdurend van water te voorzien, hoe staan de gevallen regenhoeveelheden in verband met de hoogte van het grondwater? Dergelijke vragen meer rijzen bij ons op.

Ter beantwoording nu dier vragen dienen de zes hierachter volgende getallen van overmaat. berekend naar de *Marche annuelle* 1876: twee voor de temperatuur, twee voor de luchtdrukking, twee voor de regenhoeveelheden.

De eerste, derde en vijfde tabel geven voor iedere maand afzonderlijk, hoeveel in elk jaar de som der afwijkingen bedroeg, tot die maand sedert Januari 1849 voorgekomen.

De tabellen zijn op de volgende wijze berekend:

De afwijkingen in Januari	1849	bedroegen	+ 0.06	overmaat	achtereenvolgende sommen der afwijkingen.
	1850	"	— 4.97	— 4.91	
	1851	"	+ 2.25	— 2.66	
	1852	"	+ 2.65	— 0.01	
	1853	"	+ 3.49	+ 3.48	

dus vindt men de sommen in de derde hierbovenstaande kolom als overmaat der temperatuur, die wij in ieder dier jaren genoten hadden. Zoo is voor elke maand voor temperatuur in tabel 1, voor barometer in tabel 3, voor regen in tabel 5 gehandeld, en de uitkomst leert ons, dat in Januari voortdurend een positieve overmaat aanwezig was en dat zelfs, als de normaaltemperatuur een tiende van een graad hooger werd aangenomen, alleen 1862, 1863, 1864, 1865, 1871 een negatieve overmaat zouden hebben aangetoond. In April was daarentegen de. overmaat bijna altijd negatief. In Mei en September insgelijks. In Mei kan dit aan de normaal liggen, maar September is goed bepaald. Een verlaging van de normaal met 0.1 zou 1868—1872, 1876 positief gemaakt hebben.

Dus blijkt, ook zelfs bij een verandering der normaal, de gemiddelde temperatuur eener maand vele jaren achtereen boven of wel beneden die normaal te blijven, de slingeringen zijn langdurig, de compensatie laat zich menigmaal lang wachten.

De tabellen 2, 4 en 6 wijzen datzelfde op andere wijze aan. De daarin geplaatste getallen zijn de sommen der afwijkingen, nu niet van een zelfde maand in opvolgende jaren, maar van alle opvolgende aaneensluitende maanden. Aan het einde van 1849 was de som der twaalf maandelijksche

barometerafwijkingen in dat jaar + 2.91, Januari 1850 bracht hierbij + 1.56 mm.; dus aan het einde van die Januari was die som geklommen tot 4.70 mm. Zoo bedroeg tot overschot aan het einde van April 1852 + 23.99 mm. Hierop volgde nu spoedig compensatie, want in October 1853 kwam er reeds 18.77 mm. te kort. Tot 1858 bleef de overmaat naar beide zijden gering. Lang duurde het daarentegen van November 1858 tot December 1866, eer de beurtelings zich verheffende en dalende positieve overmaat weer uitgeput was. De ruime luchtaanvoer tusschen 1867 en 1872 voldeed weder gedurende de vijf jaren meer dan aan de behoefte, maar in 1874 Mei kwam er 14.73 mm. te kort, en voorts heerschte, na een kortstondigen overvloed in 1874—1876, een voortdurend gebrek, den 31sten December 1888 eindigende met 25.78 mm. Dat te kort is evenwel in Augustus 1879, 55.73 mm. geweest en na dien tijd tot op de helft afgenomen.

En om nog een voorbeeld uit tabel 6, de tabel voor de regenhoeveelheden te nemen, zoo merk ik op, dat tusschen Juni 1863 en Augustus 1877 de overmaat negatief is geweest, ook tusschen Februari en October 1880, overigens tot Augustus 1888 steeds positief.

Wil men weten, hoeveel er in een zeker tijdsverloop minder of meer dan gewoonlijk gevallen is, zoo hebben wij slechts het verschil te zoeken van de getallen, die de overmaat aangeven aan het begin en het einde van dat tijdsverloop: tusschen Mei 1856 en Juli 1870 vielen er 634.2 + 339.4, d. i. bijna duizend m.M. minder dan gewoonlijk; dus kwam er in dien tusschentijd voor anderhalf jaar te kort; want de jaarlijksche gemiddelde hoeveelheid is te Utrecht 697 m.M.

De jaren 1887 en 1888 gaven samen 252 m.M. te weinig.

De overmaat van den regen heb ik ook wegens de lange reeks van waarnemingen voortgezet voor Zwanenburg op bladz. 138, maar nu slechts van vijf tot vijf jaren om al te groote uitvoerigheid te vermijden. De gelijktijdige jaren van 1849—1856 komen wel in het algemeen, maar niet voor elk jaar in het bijzonder met die van Utrecht overeen, gelijk men zien kan door vergelijking van tabel 5.

ZWANENBURG.

Overmaat van regen in iedere maand.

Telkens voor vijf jaren.

	Januari.	Februari.	Maart.	April.	Mei.	Juni.	Juli.	Augustus.	September.	October.	November.	December.
1743-45	4.2	9.3	**2.1**	**2.7**	3.4	2.0	28.6	9.6	**7.0**	**12.3**	13.4	13.
46-50	5.5	4.6	8.0	**11.4**	12.3	**28.8**	48.0	28.0	**21.2**	3.6	39.3	**11.**
51-55	13.0	12.0	**5.4**	**14.4**	17.5	**30.6**	11.7	13.8	**23.1**	22.8	8.8	**31.**
56-60	15.9	19.3	**17.4**	**22.0**	17.9	**37.9**	6.4	4.3	5.8	10.3	3.6	**24**
61-65	**12.4**	4.4	**17.6**	**16.6**	20.5	**56.4**	4.2	**19.4**	**22.9**	**37.6**	**7.5**	**42**
66-70	**2.7**	**10.1**	**18.9**	**7.4**	10.1	**83.7**	3.1	**15.1**	**32.3**	**39.1**	**10.0**	**19**
71-75	**12.3**	**9.6**	**19.9**	1.8	12.4	**68.5**	17.9	**19.4**	**39.0**	**12.8**	**4.8**	**23**
76-80	6.4	0.8	**3.8**	0.6	4.4	**56.6**	**12.2**	17.9	**49.0**	**41.9**	**18.3**	**21**
81-85	**1.5**	8.7	**1.5**	11.7	**44.0**	**42.1**	13.4	**8.8**	**84.5**	**46.0**	**25.4**	1
86-90	**3.0**	26.1	**6.5**	14.5	**43.6**	**46.3**	**8.6**	**14.6**	**103.3**	**26.8**	**5.2**	18
91-95	4.7	25.2	**4.2**	3.4	**36.7**	**45.9**	10.6	**5.2**	**96.6**	**12.0**	3.1	11
96-1800	15.5	28.0	21.6	12.1	**38.1**	**38.7**	10.2	8.6	**100.0**	**17.0**	0.8	18
1801-5	28.7	35.1	36.8	16.4	**36.9**	**29.0**	12.0	46.1	**69.5**	**4.4**	10.0	24
6-10	31.6	34.5	48.3	28.2	**33.2**	**52.7**	34.0	57.9	**87.9**	15.9	3.3	17
11-15	40.7	42.0	52.5	32.3	**24.7**	**62.4**	61.1	59.1	**66.7**	7.6	0.4	19
16-20	21.2	33.4	34.5	34.0	**28.5**	**55.4**	64.0	69.8	**71.2**	17.5	20.6	**7**
21-25	16.6	29.0	5.3	39.2	**41.6**	**24.0**	70.0	71.3	**50.6**	13.0	11.1	**22**
26-30	32.3	37.4	3.4	17.8	**29.8**	**31.9**	55.3	48.4	**50.7**	21.0	8.9	**26**
31-35	20.9	42.9	**8.0**	28.9	**19.1**	**46.0**	59.1	47.2	**12.5**	21.9	8.6	**29**
36-40	17.0	52.8	10.0	38.1	**19.6**	**41.4**	67.7	68.9	**24.3**	33.0	**8.2**	**22**
41-45	15.3	2.0	**2.0**	53.4	**19.2**	**10.8**	46.8	37.5	**7.9**	**8.3**	**10.5**	**17**
46-50	15.3	**11.2**	**1.3**	40.1	**1.7**	**33.1**	44.0	17.0	1.4	**7.4**	**1.8**	**16**
51-55	12.5	**3.0**	**1.0**	33.4	5.3	**26.5**	25.2	12.1	9.2	**34.4**	4.7	**20**
56-60	3.7	10.2	**2.7**	**3.4**	1.7	0.8	27.9	9.6	**7.9**	**11.5**	14.1	

Met deze uitkomst der tabellen, die eerst na een langen duur merkbare compensatie aanduiden, schijnt slechts ten deele overeen te komen wat wij vroeger mededeelden: dat een volgende dag, en maand zelfs, meer kans heeft weder dezelfde weersgesteldheid te vertoonen; want dat blijvend karakter toont geen neiging tot compensatie, terwijl nog na jaren de kans tot verandering grooter blijkt. Wij zullen dus hebben te zoeken na welk tijdsverloop de kansen gelijk staan.

Ad. Quetelet, die ook als statisticus zoo gunstig bekend is, en door zijne meteorologische onderzoekingen tot statisticus gevormd was, daar juist in de meteorologie elk voorbarig besluit door getallen wordt gewraakt en binnen de rechte grenzen teruggebracht, maakte het eerst de volgende hier te pas komende opmerking met betrekking tot den regen. Er is meer kans dat het morgen weer regenen zal, zeide hij, als het heden geregend heeft, dan als het heden droog is gebleven. Die stelling vond ik bewaarheid en reeds vroeg heb ik daarop niet alleen voor den regen, maar ook voor temperatuur en barometerstand, die kansen van blijven en afwisselen uit de steeds langer wordende reeks van waarnemingen voor Utrecht en andere plaatsen trachten te bepalen.

Nu en dan werden daaromtrent in de meteorologische jaarboeken mededeelingen gedaan, het uitvoerigst in die van 1887 p. 241 en 1880 p. 225, waaruit ik de volgende tabellen samentrek aangevuld tot December 1888.

Er bleken bij het nazien een paar minder beteekenende vergissingen in het jaarboek 1880 voor te komen. De hoogere getallen zijn alle op nieuw nagezien en bepaaldelijk de uitkomst van de laatste dertien jaren herhaaldelijk geverifieerd.

Er blijkt zoowel uit die reeks als uit de vroegere jaren tot het einde van 1880, dat de kansen voor het voortduren van positieve en negatieve afwijkingen in die twee reeksen denzelfden gang hebben. Daarom mocht ik de getallen voor die kansen samenvoegen in de op de volgende bladzijde voorkomende tabel.

Voortduring van dezelfde soort van afwijkingen gedurende *n*-dagen.

	Thermometer.				Barometer.				Regen.	
n	+	—	Som.	Aantal.	+	—	Som.	Aantal.	Nat.	Droog.
1				4745				4727	176	260
2	74	75	149	3628	104	80	184	3523	145	107
3	42	47	89	3022	62	60	122	2948	101	84
4	40	37	77	2513	32	37	69	2366	68	48
5	28	42	70	2085	27	41	68	1948	45	41
6	29	19	48	1759	28	27	55	1609	44	25
7	21	30	51	1473	18	14	32	1358	34	29
8	14	21	35	1253	12	14	26	1125	12	24
9	11	9	20	1085	11	15	26	928	17	7
10	9	11	20	936	15	15	30	753	12	9
11	9	6	15	813	10	12	22	616	11	14
12	10	7	17	701	6	7	13	510	11	6
13	4	3	7	617	12	10	22	418	7	5
14	3	11	14	533	7	3	10	340	6	5
15	2	3	5	472	5	5	10	282	5	8
16	3	3	6	415	5	5	10	234	2	5
17	1	2	3	367	3	5	8	198	2	4
18	2	1	3	322	1	0	1	177		1
19	0	3	3	280	0	2	2	156		2
20	2	5	7	237	2	1	3	136	1	1
21	2	2	4	204	1	0	1	121	2	1
22	1	2	3	176	1	0	1	107		
23	1	0	1	153	2	1	3	92		
24	1	2	3	129	1	1	2	81	1	
25	4	1	5	106	1	1	2	72		
26	0	2	2	91	0	0	0	67		2
27	1	2	3	77	0	0	0	62		
28	1	1	2	67	0	0	0	57	Twijfelachtig 657	
29	0	0	0	61	0	0	0	52		1
30	0	0	0	55	2	0	2	45		1
31	0	1	1	48	0	0	0	42		
32	0	0	0	43	0	0	0	39		
33	0	0	0	38	0	0	0	36		
34	0	0	0	33	0	0	0	33		Twijfelachtig 286
35	1	0	1	27	1	0	1	29		
36	0	0	0	23		1	1	27		
37	0	0	0	19			1	24		
38	1	0	1	14				23		
39	0	0	0	11				22		
40	0	1	1	7						
41	0	1	1	4						
42	0	0	0	3						
43	0	0	0	2						
44	0	1	1	1						

Tot 28 dagen toe is de kans van voortduring voor negatieve afwijkingen iets grooter dan voor positieve wat de temperatuur aangaat, even groot wat den barometer betreft, terwijl de kans van nog langere voortduring voor beide soorten van afwijkingen gelijk is ten opzichte der temperatuur, maar van den barometer een voortduring van de positieve afwijkingen grooter is.

Wij kunnen dus ook wel de sommen nemen van de beide soorten en zien dan dat de kans van voortduring, wel verre van steeds af te nemen, eer toeneemt tot minstens 25 dagen toe. Wij noemen dit getal om ergens een grens te stellen boven welke geen waarnemingen genoeg in deze reeks voorharden zijn om er over te beslissen. Terwijl de getallen onder hoofdsom geplaatst aangeven, hoeveel malen de voortduring juist n dagen geduurd heeft, meldt de vierde kolom (aantal) hoe dikwerf minstens n dagen achtereen de afwijking dezelfde was, namelijk als men opmerkt, dat, indien zekere toestand n dagen duurt, hij ook 2 malen $n-1$, 3 malen $n-2$ dagen geduurd heeft, enz.

Stonden de kansen gelijk dan zou elk volgend getal in deze rij half zoo groot zijn als het onmiddellijk voorgaande getal. Die getallen nemen lang zoo snel niet af. Dit onderzoek is nu tot 1888 voortgezet. Voor thermometer en barometer ziet men het nog ten overvloede voor elk jaar afzonderlijk bevestigd uit de tabellen D en E der meteorologische jaarboeken, die telkens den duur aangeven, zeer dikwijls tot over de 20 klimmende; wat anders niet voor zou komen in een veertigjarig tijdperk. De getallen van een opvolging van n dagen zouden wezen:

$$n + (n-1)\,r + (n-2)r^2 + \ldots = \sum_{0}^{n-1} (n-p)r^{p} =$$

$$\frac{n\,(r^n - 1)}{r-1} + \sum_{1}^{n-1} p\,r^{p} = \frac{1}{(r-1)^2}\left\{ r^{n+1} - n\,(r-1) - r \right\}.$$

Dus zouden, voor $r = 2$, $2^{n+1} - (n+2)$ dagen noodig zijn, dat is bijv. 57 om de voortduring 8 keeren twee, 4 keeren drie, 2 keeren vier, 1 maal vijf dagen te doen duren.

Het aantal malen dat deze toestanden eenmaal voorgekomen zijn is natuurlijk, van 1 Januari 1876—31 December 1888, gelijk 4749. Voor den thermometer en barometer liep het aantal dagen slechts tot 30 December, omdat toen weder een nieuwe reeks volgde; voor den barometer zou ik nog een voortduring van 26 dagen hebben kunnen toevoegen, die op 17 Januari 1876 eindigde.

Men ziet dat in alle kolommen de getallen veel langzamer dan met de helft afnemen, vooral als een toestand reeds eenigen tijd heeft voortgeduurd en men kan veilig vijf tegen een wedden dat den volgenden dag weer even als op den tegenwoordigen te veel of te weinig warmte, te hooge of te lage drukking zal worden waargenomen. Dat komt ook overeen met het aantal afwisselingen dat volgens *D* en *E* in een jaar gemiddeld slechts ruim 60 bedraagt, terwijl 300 malen een toestand dezelfde blijft als die van den vorigen dag.

Voor den regen hebben wij een soortgelijke tabel ontworpen en wel voor elke maand des jaars afzonderlijk als vervolg op de tabel in het jaarboek 1873 p. 284; maar bovendien hebben wij nu nog aangegeven de dagen waarop minder dan 0.5 m.m. water gevallen is. Uit de tabel uitvoerig in het jaarboek 1888 p. 283 voorkomende, ziet men dat het aantal dier dagen betrekkelijk gering is en men zal wel niet meenen dat wij verkeerd handelden door wegens zulk een dag noch de reeks der regendagen noch die der droge dagen af te breken.

Daar de verschillende maanden bijna gelijke uitkomst geven achtten wij het hier genoegzaam de algemeene uitkomst te vermelden. Een uitvoerige tabel was daarvoor niet noodig. Die komt daarenboven voor in 1888 p. 283. Slechts merk ik op dat van April tot en met September de regen nooit meer dan 15 dagen volhield, terwijl het aantal opvolgende droge dagen in November slechts drie malen acht bedroeg, in Maart eenmaal 26, in September 18, in October 17, telkens zonder dat iets viel.

De reeksen van 30 en 29 droge dagen in Juni en Augustus bevatten ieder slechts eenmaal één twijfelachtigen dag.

Het onderzoek over 1849-1873, zie jaarboek 1873 p. 284 stemt daarmede overeen, behalve dat toen April en Juni ieder één lange reeks van regendagen hadden, October muntte toen in beide opzichten uit.

Voor den barometer herhaalde ik dergelijk onderzoek niet zoo uitvoerig. De 40 jaargemiddelden geven 19, de 40 tijdperken van twee jaren 15 afwisselingen. Als eens voor het zuider halfrond de afwijkingen gegeven zullen zijn, zooals die welke het jaarboek 1879 II levert, zal van eene schommeling der lucht tusschen de beide halfronden en in verschillende meridianen iets kunnen blijken.

Voor langdurige barometerafwijkingen schijnt de compensatie vrij spoedig te komen, want de 481 maanden gaven 237 afwisselingen.

Voor temperatuur hebben wij ook nog onderzocht hoe dikwerf de opeenvolgende decaden der maanden telkens van 1—10, 11—20, 21—30 of 31 en dan weder van 1—10, enz. genomen, van teeken wisselden, voorts hoe dikwerf dit de opeenvolgende maanden deden.

Van de 792 decaden in 1867—1888 hadden wij voor de temperatuur 338 afwisselingen. Met uitzondering van 1870 en 1875 kwam in elk jaar een opvolging van 6 of meer decaden voor. In 1884 was dit 12 maal in 1872 13 maal en in 1874, 16 maal het geval. Van de 481 maanden December 1848—December 1888, die 480 afwisselingen hadden kunnen geven, is dat slechts 202 malen het geval geweest.

Ten opzichte der temperatuur is dit ook vroeger voor eenige buitenlandsche plaatsen onderzocht, zie *Archives Néerlandaises, Tome* XV, p. 102.

Tot zoover schijnt dus steeds meer kans te bestaan voor blijven dan voor veranderen. Voor welke tijdperken zal dit ophouden? Eens moet het ophouden; want daar er volgens onze verwachting en volgens de overmaatstabellen toch compensatie moet komen, zoo moet voor zekere tijdperken de kans van voortduren geringer worden.

Om dat nu gemakkelijk voor tijdperken van twee, vier, acht maanden te kunnen onderzoeken hebben wij de afwijkingen op de volgende wijze gerangschikt, gelijk het schema hier tegenover aangegeven zulks doet zien. Kolom 1 geeft de afwijkingen van ieder der opvolgende maanden met haar teeken, kol. 2 en 3 die van elk tweetal maanden, waaruit wij op soortgelijke wijze die van een achttal maanden kunnen afleiden. Kol. 8 geeft de afwijkingen van ieder der maanden, maar vier regels lager, zoodat ze opgeteld bij de waarde der afwijking der vier vorige maanden de waarde van de afwijking van elk volgend vijftal in de kolommen 9—13 geven.

Hieruit zouden wij ook die van elk tijdperk van acht en tien maanden kunnen vinden, maar wij hadden reeds, uit de jaargemiddelden, 40 tijdperken van twaalf maanden en door die op dezelfde wijze te behandelen die van twee jaren ook 40 in getal. Mocht men bijv. begeeren de opvolgingen van acht tot acht maanden te willen kennen, zoo heeft men in die zelfde tabel slechts achtereenvolgens op te teekenen de teekens van de sommen van de twee eerste getallen in kolom 7, 4, 5, en 6, dan het teeken van het tweede en derde getal in kolom 7, dan de teekens van het tweede en derde getal in kolom 4, 5 en 6 enz. welke zijn +, +, +, —, —, —, —, enz. Op overeenkomstige wijze zou men uit de kolommen 9 — 13 verkrijgen +, +, —, —1, — 1 enz.

De uitkomst is voor de afwisselingen in onderstaande tijdperken.

Van	1	maand	202
»	2	maanden	205
»	3	»	211
»	4	»	183
»	5	»	207

Het schijnt dus, dat een tijdperk van vier maanden de grootste kans heeft in het volgende tijdperk hetzelfde teeken te hebben; waarmee overeenstemt dat de veertig jaren 19 en de 39 tijdperken van 2 jaren 21 afwisselingen aantoonen.

INRICHTING DER TABEL, WAARUIT BLIJKEN KAN HOEVEEL AFWISSELINGEN ER NA TIJDPERKEN VAN EEN, TWEE, VIER, VIJF MAANDEN VOORKWAMEN.

	Kolom 1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
Decemb. 48	+ 0.85												
Januari 49	+ 0.06		+ 0.91										
Februari	+ 2.70	+ 2.76											
Maart	+ 0.32		+ 3.02				+ 3.93						
April	— 0.53	— 0.21		+ 2.55				+ 0.85	+ 3.40				
Mei	+ 2.13		+ 1.60		+ 4.62			+ 0.06		+ 4.68			
Juni	+ 0.34	+ 2.47				+ 2.26		+ 2.70			+ 4.96		
Juli	— 0.36		— 0.02				+ 1.58	+ 0.32				+ 1.90	
Augustus	— 1.37	— 1.73		+ 0.74				— 0.53					+ 0.21
September	— 0.17		— 1.54		— 1.56			+ 2.13	+ 0.57				
October	— 0.73	— 0.90				— 2.63		+ 0.34		— 2.39			
November	— 0.48		— 1.2				— 2.75	— 0.36			— 3.01		
December	— 1.51	— 1.99		— 2.8				— 1.37				— 4.26	
Januari 50	— 4.97		— 6.48		— 7.69			— 0.17					— 7.86
Afwisseling.	3	3	1	1	1	1	1		0	1	1	1	1

Wij eindigen met de beantwoording der vraag: in hoever heeft men eenig recht afwisseling of overeenkomst van temperatuur te verwachten na een half jaar, gelijk Dr. Hellmann voor Berlijn heeft onderzocht; met andere woorden, of men na een zachten of strengen winter, meer kans heeft een heeten of koelen zomer te verwachten dan wel omgekeerd.

Wij beschikken over 146 jaren, 106 te Haarlen en Zwanenburg en 40 te Utrecht. Afzonderlijk is onderzocht, of beide reeksen overeenkomstige uitkomsten gaven, anders toch zouden die nog minder gewicht hebben dan die men er misschien nu aan toekennen mag. Wij zouden ze dan ook niet gelijk nu hebben mogen vereenigen.

Wij noemen een winter streng of zeer zacht als de som der afwijkingen in December, Januari en Februari minder dan — 5 C° of meer dan + 5 C° bedraagt; een winter koud of zacht, als ze door binnen de genoemde grenzen. ligt. Voor de zomers hebben wij de grenzen op drie en een halven graad ter weerzijde van de normaal aangenomen en noemen dus den zomer heet of zeer koud als de som van de afwijkingen in Juni, Juli en Augustus buiten die grenzen ligt, enkel koel of warm als zij daarbinnen blijft.

Er is wel weder iets willekeurigs in het stellen dezer grenzen, maar wie zal ze stellen zonder willekeur? Ook kan men aanvoeren dat wij zelven bewezen, Jaarboek 1858, dat van de zes opvolgende maanden November—Maart ieder de laagste temperatuur kan hebben en dus juist November of Maart een winter wel eens tot een kouden of strengen zou kunnen stempelen, dien wij nu zacht of enkel koud noemden; maar dien geringen invloed, want die gevallen komen toch slechts zeer zeldzaam voor, zal men slechts later met vrucht kunnen en dan behooren te onderzoeken.

Wij blijven dus voorloopig bij onze terminologie en vinden dan de volgende getallen

28	zeer warme	winters	gaven	19	warme,	9	koude	zomers
47	warme	»	»	23	»	24	»	»
75	»	»	»	42	»	33	»	»

45	koude	zomers	gaveu	18	warme	27	koude	zomers
26	zeer koude	»	»	6	»	20	»	»
71	koude	»	»	24	»	47	»	»
53	warme	»	»	30	»	23	»	winters
12	zeer warme	»	»	3	»	9	»	»
65	warmc	»	»	33	»	32		»
66	koude	»	»	36	»	30	»	»
13	zeer koude	»	»	5	»	8	»	»
79	koude	»	»	41	»	38	»	»

Men ziet dat althans de zomers weinig licht geven omtrent het karakter der volgende winters en dat alleen koude winters meer waarschijnlijkheid geven dat weder een koele of half koude zomer volgen zal.

Bladzijde 151 geeft gelegenheid die warme en koele zomers gemakkelijk te onderkennen aan het grooter of kleiner zijn van de getallen, die voor het einde van een Augustusmaand opgegeven zijn, dan die, welke op het einde van de voorafgaande Meimaand betrekking hebben.

Algemeen kan men de afwijkingen van iedere maand uit de overmaatstabellen afleiden, met inachtneming van de opmerkingen, op bladz. 136 en 137 vervat. Ook zie men de Marche annuelle du Thermomètre et du Baromètre en Nêerlande. 1876. p. V.

TABEL I.

OVERMAAT VAN TEM

VAN IEDER DER MAANDE

	Januari.	Februari.	Maart.	April.	Mei.	Ju
1849	**0.06**	**2.70**	**0.32**	0.53	**2.13**	**0.**
50	4.91	**5.10**	1.06	**0.11**	**0.80**	**0.**
51	2.66	**5.26**	0.19	0.67	1.46	0.
52	0.01	**5.93**	1.06	3.01	2.31	1.
53	**3.48**	**1.96**	5.34	4.94	2.75	1.
54	**3.56**	**1.77**	4.18	4.27	3.79	2.
55	**1.74**	6.44	7.04	6.31	5.97	3.
56	**3.04**	4.88	7.81	6.24	7.95	4.
57	**2.35**	4.95	7.90	7.16	7.08	2.
58	**1.37**	8.13	8.72	7.74	8.37	**1.**
59	**3.25**	5.88	5.89	8.64	7.54	**3.**
60	**5.20**	7.95	6.97	10.43	7.59	**2.**
61	**1.01**	6.01	5.07	11.88	9.73	**3.**
62	**0.86**	5.35	1.80	9.96	7.15	**2.**
63	**1.06**	3.16	**0.15**	9.02	7.61	**1**
64	**1.30**	5.01	**1.32**	9.51	8.65	**0.**
65	**1.23**	8.03	1.98	6.47	5.25	0.
66	**5.31**	6.10	2.18	5.15	7.21	**2.**
67	**4.42**	2.65	3.78	5.14	6.86	**1.**
68	**3.47**	0.11	2.28	5.20	3.05	**3.**
69	**3.69**	**3.46**	3.93	2.72	4.07	**0.**
70	**4.67**	**0.54**	5.27	1.64	4.27	**0.**
71	**1.09**	0.25	2.51	2.59	6.23	1.
72	**2.93**	**2.05**	0.28	1.50	6.92	1.
73	**6.15**	**0.42**	**1.72**	1.84	9.27	0.
74	**8.89**	**0.49**	**3.16**	0.25	11.49	0.
75	**11.63**	2.46	**2.47**	0.51	10.38	0.
76	**9.45**	1.85	**3.20**	0.02	13.20	**0**
77	**12.64**	**0.55**	**2.90**	1.35	15.47	**2**
78	**14.21**	**2.73**	**3.25**	**0.70**	15.01	**3**
79	**11.44**	**1.29**	**2.63**	1.12	17.49	**2**
80	**9.81**	**2.52**	**4.44**	0.41	18.10	**1**
81	**5.63**	**1.86**	**4.92**	1.82	18.00	**0**
82	**6.83**	**3.08**	**8.04**	1.29	17.56	0
83	**7.82**	**5.24**	**4.76**	0.74	16.94	0
84	**11.88**	**7.27**	**6.83**	1.43	16.17	2
85	**10.27**	**10.53**	**6.82**	**0.19**	18.46	1
86	**9.70**	**6.74**	**5.98**	**0.17**	18.08	3
87	**8.14**	**6.22**	**4.26**	1.20	20.30	3
88	**7.28**	**2.06**	**2.15**	3.51	21.36	3

TUUR TE UTRECHT

ZELVE EN VAN HET JAAR.

Augustus.	September.	October.	November.	December.	Jaar.
1.37	0.17	0.73	0.48	1.51	**0.40**
2.60	1.70	2 94	**1.60**	0.63	6.50
2.75	2.99	2.07	0.58	0.09	10.37
2.26	3.55	3.41	**2.89**	**4.36**	2.22
3.50	4.16	2.90	**1.39**	1.13	18.05
4.06	4.11	3.53	0.13	0.02	19.50
3.97	4.13	2.56	1.71	2 01	41.23
3.11	5.22	1.64	3.34	0.31	41.56
0.05	3.66	**0.12**	2.53	**2.23**	30.74
0 72	1.84	**0.01**	6.47	**2.84**	36.29
1 84	2.58	**1.04**	7.38	**0.61**	26.32
0.47	4.07	**1.04**	5.23	1.28	35.88
0.28	4.27	**2.72**	5.29	0.49	35.24
0.25	3.67	**4.31**	5.53	**1.69**	26.24
0.11	5.64	**5.73**	4.82	**4.59**	16.79
2.23	6.18	**5.04**	6.11	**1.66**	31.72
2.77	3.41	**5.86**	4.16	**2.12**	26.52
4.51	3.56	**5.59**	2 74	**4.12**	18 97
3.55	3.02	**5.07**	2.13	**2.82**	19.98
1.84	1.66	**4.36**	2 61	**6 83**	2.49
3.30	0.97	**3 56**	2.21	**6 97**	3.11
4.14	1.80	**2.90**	1.85	**2.05**	10.96
2.29	1.58	**0.91**	4.62	0.41	22.86
2.56	1.55	**0.91**	2.25	**2.15**	8.41
2.03	2.94	**0.67**	1.44	**2.64**	3.46
3.28	2.02	**1.57**	2.41	**0.90**	1.83
1.93	0.84	0.27	3.15	**0.71**	1.23
0.80	2.24	**1.29**	3 58	**2.99**	**0.01**
0.97	4.70	**0 39**	1.29	**3 29**	**2.49**
1.05	4.46	**0.43**	1.93	**1.68**	**7.39**
1.68	4:89	**0.02**	3.45	4.22	13.30
0.13	3.67	1.52	3.28	1.32	8.41
3.34	4.77	5.01	0.58	0.92	18.73
5.10	5.37	5.16	0 21	0.77	16.63
5.58	5.92	5 09	**0.86**	**0.17**	15 04
3.62	4.47	4.87	**0.25**	**1.37**	2.94
5.71	5.84	6.47	0.68	**1.49**	7.19
5.51	4.10	5.46	**1.40**	**0.94**	9.39
6.27	5.94	7.96	**1.11**	0.01	22.20
8.19	6.92	9.67	**1.94**	**1.16**	37.87

TABEL II.

O V E R M A A T V A N T E M

ACHTEREENVOL

	Januari.	Februari.	Maart.	April.	Mei.	Ju
1849	**0.06**	**2.76**	**3.08**	**2.55**	**4.68**	**5.**
50	4.57	2.17	3.55	2.91	4.24	4.
51	4.25	4.09	3.22	4.00	6.26	6.
52	7.72	7.05	7.92	10.26	11.11	12.
53	**1.27**	2.70	6.98	8.91	9.35	9.
54	17.97	18 16	17.00	16.33	17.37	18.
55	21.32	29.53	32.39	34.43	36.61	37.
56	39.93	38.37	39.14	39.07	41.05	41.
57	43.25	43.32	43.41	44.33	43.46	41.
58	31.72	34.90	35.72	36.30	37.59	34.
59	34.41	32.16	29 33	30.23	29.40	27.
60	24.37	26.44	27.52	29.31	29.36	30.
61	40.07	38.13	36.23	37.68	39.82	38.
62	35.39	34.73	31.46	29.54	26.96	28.
63	23.04	20.85	18.90	17.96	18.42	18.
64	19.55	21.40	20.23	20.72	21.76	22.
65	31.79	34.81	38.11	35.07	31.67	32.
66	22.44	20.51	20.71	19.39	21.45	18.
67	19.86	16.41	18.01	18.00	17.55	17.
68	20.93	18.39	16.89	16.95	13.14	11.
69	2.27	**1.30**	0 35	**2.13**	**1.11**	1.
70	2.13	5.05	6.49	5.31	5.51	6.
71	14.54	15.33	12.57	13.52	15.48	17.
72	21.02	18.72	16.49	15.40	16.09	15
73	5.19	6.82	4 82	5.16	7.51	6
74	0.90	0.83	**0.61**	**2.20**	0.02	0
75	**0 91**	2.04	2.73	2.99	1.88	1
76	3.41	2.80	2.07	1.58	4.40	4
77	**3.20**	**5.60**	**5.30**	**3.97**	**1.70**	**3**
78	**4.06**	**6.24**	**6.59**	**8.64**	**9.10**	**9**
79	**4.62**	**3.18**	**2.56**	**0.74**	1.74	1
80	14.93	13.70	11.89	11.18	11.79	12
81	12.49	13.25	12.77	14.18	14.08	15
82	17.53	16.51	13.19	12.66	12.22	13
83	11.64	13.48	16.76	16.21	15.59	14
84	10.98	8.95	6 85	7.57	6.80	8
85	4.55	1.29	1.30	**0.32**	1.97	1
86	7.76	11.55	12.39	12.41	12.03	12
87	10.95	11.47	13.19	14.56	16.78	16
88	23.06	27.22	29.33	31.64	32.70	32

TUUR TE UTRECHT.

HET EINDE VAN

li.	Augustus.	September.	October.	November.	December.
66	**3.29**	**3.12**	**2.39**	**1.91**	**0.40**
49	5.72	7.25	9.46	7.38	6.50
16	8.31	9.60	8.73	10.91	10.37
73	8.24	8.80	10.14	6.67	2.22
72	10.96	11.57	11.06	12.56	18.05
95	19.51	19.46	20.09	21.61	19.50
70	37.61	37.63	38.66	38.24	41.23
32	42.46	43.55	41.63	44.26	41.56
47	37.41	35.85	34.09	33.28	30.74
44	34.67	32.85	32.96	36.90	36.29
59	23.47	24.21	23.18	24.09	26.32
34	35.65	36.14	36.14	33.99	35.88
20	37.45	37.65	35.97	36.03	35.24
34	30.37	29.77	28.18	28.42	26.24
9	19.85	21.82	20.40	19.69	16.79
15	26.27	26.81	27.50	28.79	31.72
8	32.52	29.75	28.93	26.98	26.52
23	21.97	22.12	22.39	20.97	18.97
27	19.31	18.77	19.29	18.68	19.98
38	6.67	5.31	6.02	6.50	2.49
8	2.54	1.85	2.65	2.25	3.11
7	5.91	6.74	7.40	7.04	10.96
1	15.86	17.64	17.63	20.40	22.86
0	13.37	13.34	13.34	10.97	8.41
34	4.31	5.70	5.94	5.13	3.64
31	**0.06**	**0.98**	**1 88**	**0.91**	1.83
9	**0.36**	**1.54**	0.30	1.04	1.23
3	2.00	3.40	1.84	2.27	**0.01**
43	**3.26**	**0.80**	0.10	**2.19**	**2.49**
44	**9.36**	**9.60**	**9.64**	**9.00**	**7.39**
41	5.04	5.48	5.88	7.40	13.30
7	11.16	9.94	11.48	11.31	8.41
7	17.24	18.34	21.83	19.13	18.73
4	16.40	17.00	17.15	16.78	16.63
9	16.57	17.12	17.05	15.98	15.04
16	5.20	3.75	3.53	4.14	2.94
32	3.41	4.78	6.38	7 31	7.19
37	13.67	11.93	10.92	8.84	9.39
36	16.62	18.46	20.96	21.25	22.20
36	37.28	38.16	39.87	39.04	37.87

TABEL III.

OVERMAAT DER MORGEN-BA

VAN IEDER DER MAANDE

	Januari.	Februari.	Maart.	April.	Mei.	Ju
1849	0.82	**6.92**	**2.85**	5.98	0.31	**0.**
50	**1.05**	**6.24**	**8.54**	9.45	2.11	**2**
51	**0.09**	**8.32**	**4.75**	11.15	0.75	**4**
52	3.12	**7.87**	**11.07**	6.01	1.31	1
53	7.90	0.81	**12.28**	8.68	2.01	3.
54	10.51	**3.25**	**22.27**	3.70	4.23	5.
55	5.09	1.44	**16.94**	0.67	7.31	4
56	12.87	**1.50**	**23.40**	3.88	11.21	3.
57	17.32	**6.45**	**22.79**	7.22	10.74	1.
58	7.13	**8 68**	**21.91**	6.00	11.08	**0.**
59	**0.06**	**8.97**	**21.86**	9.92	11.42	0.
60	5.56	**7.78**	**18.26**	10.64	12.29	4.
61	**0.43**	**6.41**	**13 54**	5.63	9.89	5.
62	0.59	**9.08**	**7.60**	3.52	10.64	8.
63	4.20	**16.87**	**5.79**	2.56	9.19	10.
64	**3.87**	**16 34**	**0 60**	**1.55**	8.63	11.
65	5.77	**13.17**	2.63	**7.05**	7.90	6.
66	7.11	**6.53**	8.08	**7 40**	7.05	6.
67	14.77	**8.85**	11.31	**3.47**	7.64	4.
68	15.42	**11.55**	10.78	**3.50**	5.01	0.
69	10.76	**10.65**	15.08	**5 33**	7.80	**1.**
70	9.07	**9 97**	13.66	**10.96**	4.92	**3.**
71	11.31	**12.68**	9.96	**8.06**	2.28	**1.**
72	17 22	**11.36**	12.22	**7.26**	3.30	**0.**
73	20.81	**13.45**	14.33	**7 05**	3.68	**0.**
74	18.10	**16.34**	8.73	**6 18**	4.14	**3.**
75	18.37	**18.55**	3.71	**9.10**	2.29	**2.**
76	9.70	**14.45**	13.59	**8.21**	**1.35**	**2.**
77	11.34	**11.10**	19.08	**4.95**	0.65	**4.**
78	7.92	**18.84**	18 22	**3.18**	3.89	**3.**
79	6.15	**9.23**	16.56	3.20	2.80	**0.**
80	**4.11**	**6.62**	10.90	4.58	0.13	1.
81	**2 97**	**2.87**	11.72	3.91	**3.53**	2.
82	**13.40**	**9.48**	9.72	6.61	**6.36**	4.
83	**14.08**	**13.58**	10.96	4.21	**6.19**	4.
84	**17.05**	**14.25**	10.02	6.83	**7.43**	3.
85	**17.80**	**9.35**	7.47	10.27	**3.55**	2.
86	**10 20**	**12.43**	5.47	10.11	**4.18**	4.
87	**13.14**	**11.91**	2.63	9.10	**4.41**	**0.**
88	**20.21**	**9.95**	11.87	10.62	**7.13**	0.

ERAFWIJKINGEN TE UTRECHT

ELVE EN VAN HET JAAR.

Augustus.	September.	October.	November.	December.	Jaar.
0.73	0.31	**0.28**	**0.03**	0.68	**2.91**
0.37	**3.00**	2.56	0.72	**2.68**	**8.12**
0.95	**7.32**	2.32	2.91	**11.42**	**16.19**
2.09	**5.77**	4.08	8.37	**7.39**	**3.58**
1.96	**5.21**	6.96	2.22	**7.77**	12.24
0.47	**10.51**	7.53	4.79	**3.64**	0.42
1.29	**14.87**	13.06	1.48	**3.25**	2.26
0.23	**11.04**	5.71	0.18	0.81	6.86
0.91	**11.56**	5.49	**6.30**	**9.17**	**10.89**
0.92	**13.81**	2.99	**7.64**	**9.54**	**30.78**
1.71	**11.54**	7.06	**9.64**	**6.51**	**28.99**
3.91	**10.19**	4.27	**9.48**	0.47	**1.83**
2.50	**7.69**	**0.28**	**4.76**	**4.61**	**7.68**
2.85	**9.40**	**0.84**	**4.96**	**5.62**	**3.75**
3.36	**6.77**	**0.30**	**9.01**	**8.18**	**13.13**
1.04	**6.50**	0.04	**7.37**	**12.23**	**22.62**
3.21	**13.60**	5.80	**7.70**	**20.54**	**26.76**
7.58	**8.82**	0.16	**6.68**	**20.37**	**7.58**
6.24	**11.23**	0.13	**14.39**	**20.16**	**5.90**
7.12	**9.79**	**0.94**	**16.39**	**12.16**	**9.60**
3.65	**6.60**	**2.77**	**14.63**	**8.37**	**9.66**
5.75	**9.69**	0.98	**12.02**	**7.26**	**16.91**
3.58	**7.83**	**1.44**	**13.48**	**10.81**	**23.89**
3.62	**4.08**	2.10	**8.49**	**2.47**	9.80
3.92	**3.54**	2.96	**7.79**	**10.22**	8.60
4.22	**3.19**	2.47	**8.18**	**4.32**	0.19
2.64	**5.29**	4.10	**3.97**	**7.48**	**10.82**
3.12	**0.23**	2.70	**3.25**	1.79	3.45
5.47	**1.37**	0.26	1.21	0.85	21.35
9.94	**1.12**	2.41	7.33	7.72	34.48
12.07	**1.29**	**2.22**	2.06	**1.32**	36.32
12.29	**1.74**	**0.66**	1.04	0.60	28.19
13.85	**1.16**	**2.85**	**1.83**	**0.90**	24.68
16.02	1.96	**2.06**	4.84	5.49	28.86
15.11	5.09	**3.03**	6.89	3.48	27.68
13.76	4.02	**5.08**	1.33	6.40	16.72
14.24	6.23	0.98	0.64	1.19	22.93
13.72	4.24	2.22	0.52	1.74	26.05
13.57	5.79	0.28	5.11	5.58	21.19
12.70	1.65	**3.05**	6.06	3.61	20.28

TABEL IV.

OVERMAAT DER BAROMET

ACHTEREEN

	Januari.	Februari.	Maart.	April.	Mei.	
1849	0.82	**6.10**	**8.95**	**2.97**	**2.66**	
50	**4.78**	**4.10**	**9.79**	**6.32**	**4.52**	
51	**7.16**	**9.24**	**5.45**	**3.75**	**5.11**	
52	**12.98**	**12.53**	**18.85**	**23.99**	**23.43**	**1**
53	1.20	9.88	8.67	11.34	12.04	1
54	14.85	10.79	0.80	**4.18**	**1.96**	
55	**5.00**	**0.31**	5.02	1.99	5.07	
56	10.04	7.10	0.64	3.85	7.75	
57	11.31	6.36	6.97	10.31	9.84	
58	**21.08**	**22.31**	**21 43**	**23.65**	**23.31**	**2**
59	**37.97**	**38.26**	**38.21**	**34.29**	**33.95**	**3**
60	**23.37**	**22.18**	**18.58**	**17.86**	**16.99**	**1**
61	**7.82**	**6.45**	**1.73**	**6.74**	**9.14**	
62	**6.66**	**9.33**	**3.39**	**5.50**	**4.75**	
63	**0.14**	**7.93**	**6.12**	**7.08**	**8.53**	
64	**21.20**	**20.67**	**14.28**	**18.39**	**18.95**	**1**
65	**12.98**	**9.81**	**7.78**	**13.28**	**14.01**	**1**
66	**25.42**	**18.78**	**13.33**	**13.68**	**14.53**	**1**
67	0.08	**2.24**	0.99	4.92	5.51	
68	**5.25**	**7.95**	**8.48**	**8.51**	**11.14**	**1**
69	**14.26**	**13.36**	**9.06**	**10.89**	**8.10**	
70	**11.35**	**10.67**	**12.09**	**17 72**	**20.60**	**2**
71	**14.67**	**17.38**	**21.08**	**18.18**	**20.82**	**1**
72	**17.98**	**16.66**	**14.40**	**13.60**	**12.58**	**1**
73	13.39	11.30	13.41	13.62	14.00	
74	5.89	3.00	**2.60**	**1.73**	**1.27**	
75	0.46	**1.75**	**6.77**	**9.69**	**11.54**	**1**
76	**19.49**	**15.39**	**5.51**	**4.62**	**8.26**	
77	5.09	8.44	13.93	17.19	19.19	
78	17.93	10.19	9.33	11.10	14.34	
79	32.71	42.32	40.66	47.04	45.95	
80	26.36	28.97	23.31	24.69	22.02	
81	29.33	33.08	33.90	33.23	29.57	
82	14.25	7.64	5.64	8.34	5.51	
83	28.18	24.08	25.32	22.92	23.09	
84	24.71	24.04	23.10	25.72	24.48	
85	16.27	21.17	18.62	22.06	25.94	
86	30.23	27.15	25.15	24.99	24.36	
87	23.11	23.63	20.79	19.78	19.55	
88	14.12	16.08	25.32	26.84	24.12	

WIJKINGEN TE UTRECHT.

ET EINDE VAN

Augustus.	September.	October.	November.	December.
3.59	**3.28**	**3.56**	**3.59**	**2.91**
5.04	**8.35**	**5.51**	**4.76**	**8.12**
5.08	**9.40**	**9.64**	**7.45**	**16.19**
16.38	**14.83**	**13.07**	**8.61**	**3.58**
15.33	15.89	18.77	12.62	12.24
1.57	**6.85**	**6.28**	**3.71**	0.42
4.01	**0.35**	5.18	1.87	2.26
7.62	11.45	4.10	2.80	6.86
6.31	5.79	5.57	**0.91**	**10.89**
24.32	**26.57**	**29.07**	**30.41**	**30.78**
36.36	**34.09**	**30.02**	**32.02**	**28.99**
7.53	**6.18**	**8.97**	**8.81**	**1.83**
5.27	**2.77**	**7.32**	**2.60**	**7.68**
0.27	**1.98**	**2.54**	**2.74**	**3.75**
9.69	**7.06**	**6.52**	**10.57**	**13.15**
20.82	**20.55**	**20.21**	**18.57**	**22.62**
16.78	**23.88**	**18.12**	**18.45**	**26.76**
7.91	**3.13**	**8.77**	**7.75**	**7.58**
4.04	1.63	1.60	**6.11**	**5.90**
15.97	**14.53**	**15.60**	**17.60**	**9.60**
16.57	**13.38**	**15.21**	**13.45**	**9.66**
21.29	**24.38**	**20.63**	**18.02**	**16.91**
18.32	**16.46**	**18.88**	**20.34**	**23.89**
10.82	**7.07**	**3.53**	1.46	9.80
14.25	14.79	15.65	16.35	8.60
5.18	**4.83**	**5.32**	**5.71**	0.19
11.40	**13.50**	**11.87**	**7.66**	**10.82**
10.20	**5.14**	**6.54**	**5.82**	3.45
21.41	20.27	17.83	22.29	21.35
19.09	19.34	21.49	27.61	34.48
55.73	55.56	50.93	45.66	36.62
26.18	25.73	27.29	26.27	28.19
30.66	31.24	29.05	26.78	24.68
11.89	15.01	15.80	22.47	28.86
25.48	28.61	27.64	29.69	27.68
22.48	21.41	19.36	13.80	16.72
20.56	22.77	28.83	28.14	22.93
26.37	24.38	25.62	25.50	26.05
13.15	14.70	12.76	17.35	21.19
29.77	25.63	22.30	23.25	20.28

TABEL V.

O V E R M A A T V

VAN IEDER DER MAAN

	Januari.	Februari.	Maart.	April.	Mei.	J
1849	9.8	**25.1**	12.1	**27.7**	5.1	
50	**0.6**	**79.2**	13.7	**87.9**	**2.6**	
51	12.9	**60.0**	**11.7**	**113.6**	0.6	
52	**28.1**	**93.5**	**14.8**	**86.7**	**27.1**	
53	**57.4**	**93.0**	3.0	**155.5**	**13.0**	
54	**71.7**	**118.9**	33.6	**147.6**	**20.6**	**1**
55	**65.5**	**99.0**	48.0	**130.5**	**15.4**	
56	**75.7**	**117.4**	75.3	**162.7**	**85.2**	
57	**91.8**	**79.0**	80.8	**178.4**	**41.6**	
58	**71.6**	**68.7**	102.6	**164.4**	**21.8**	
59	**47.5**	**56.0**	41.5	**194.6**	11.1	
60	**56.5**	**51.2**	**1.4**	**196.0**	**10.3**	
61	**17.1**	**31.7**	**16.4**	**200.0**	**16.7**	**4**
62	**22.1**	**9.7**	5.5	**188.5**	3.7	**5**
63	**13.4**	2.8	17.4	**171.5**	23.7	**5**
64	15.5	19.7	14.3	**142.8**	43.1	**6**
65	12.8	7.0	17.4	**112.5**	50.7	**5**
66	1.6	**18.3**	16.9	**108.4**	64.6	**4**
67	**20.3**	**22.0**	30.6	**120.9**	89.1	**5**
68	**22.6**	**16.4**	9.6	**123.0**	109.0	**1**
69	**11.6**	**49.7**	23.8	**105.9**	25.3	
70	**5.9**	**3.7**	12.4	**84.5**	47.6	
71	11.3	8.5	36.7	**113.8**	82.7	
72	**1.4**	6.0	47.5	**102.2**	82.6	
73	12.7	19.5	70.8	**103.2**	57.4	
74	12.3	29.7	51.1	**73.6**	26.9	
75	1.7	41.3	60.7	**51.4**	41.8	
76	33.4	3.4	34.3	**70.4**	48.8	
77	**18.2**	**44.6**	13.2	**61.5**	55.7	
78	**25.6**	**41.4**	**13.8**	**57.5**	9.2	
79	**23.7**	**48.8**	16.1	**104.2**	26.3	
80	10.1	**40.0**	23.7	**94.6**	64.7	
81	29.2	**73.9**	**5.6**	**79.4**	28.7	
82	37.2	**55.8**	**37.9**	**93.0**	26.4	**10**
83	48.4	**54.7**	**32.7**	**57.3**	39.6	**7**
84	16.2	**37.4**	**18.5**	**37.3**	55.1	**3**
85	15.4	**49.3**	**2.5**	**19.8**	31.5	**2**
86	**34.3**	**35.2**	**10.7**	0.4	3.5	**4**
87	**1.3**	1.0	0.0	1.0	**0.4**	

GEN TE UTRECHT

ELVE EN VAN HET JAAR.

Augustus.	September.	October.	November.	December.	Jaar.
39.7	35.3	**39.7**	5.4	**36.0**	**37.1**
3.3	63.7	**33.7**	**5.1**	**59.6**	**154.7**
9.3	103.8	5.2	**56.5**	**14.4**	**91.6**
59.3	83.9	**137.2**	**83.7**	**27.0**	**437.7**
50.8	65.4	**151.4**	**28.2**	8.3	**476.5**
24.9	75.9	**194.3**	**42.9**	**80.4**	**598.6**
2.8	121.2	**241.4**	**11.7**	**73.1**	**530.9**
4.0	115.8	**182.2**	**56.4**	**62.8**	**592.9**
37.0	115.3	**142.5**	**26.9**	**13.6**	**543.7**
29.7	149.1	**122.4**	13.6	**22.6**	**283.0**
16.1	135.5	**116.9**	21.1	**18.0**	**262.3**
7.8	129.1	**95.1**	25.8	16.2	**244.5**
3.3	97.6	**24.6**	5.7	60.6	**209.0**
22.3	124.7	**45.2**	41.1	64.9	**100.3**
36.6	109.6	**1.1**	62.5	59.8	72.6
33.0	97.2	40.7	87.2	112.4	311.5
48.0	155.7	37.0	121.4	164.5	299.9
51.0	99.4	99.8	65.8	143.2	185.9
3.4	86.6	109.0	91 9	131.4	198.4
17.0	131.9	122.3	123.6	97.5	332.6
20.6	121.4	96.2	102.3	93.5	235.3
113.0	142.4	55.9	117.1	43.5	202.6
51.8	118.2	58.5	131.0	62.7	261.1
44.6	76.5	**4.8**	103.1	18.8	83.0
33.6	38.1	**1.0**	136.1	67.7	205.3
3.5	**14.5**	18.5	97.8	78.9	209.8
79.3	**24.9**	52.9	49.3	113.1	130.5
59.3	**101.2**	91.7	53.3	117.1	125.3
105.0	**72.2**	97.9	27.4	110.1	**2.2**
137.0	**57.4**	109.7	**10.1**	122.6	**36.8**
153.2	**33.2**	122.8	7.2	151.9	**36.0**
121.3	**55.0**	67.6	**13.1**	95.5	**110.5**
167.6	**54.7**	92.8	18.4	55.4	**185.1**
194.7	**72.7**	90.4	**13.8**	30.7	**439.1**
159.5	**66.9**	88.6	**38.5**	36.6	**358.5**
134.1	**54.3**	93.6	**25.5**	2.6	**294.3**
86.6	**67.8**	8.2	**18.1**	35.3	**219.9**
49.8	**19.7**	21.9	**7.8**	4.9	**223.6**
1.7	**1.5**	0.0	0.4	0.2	1.7

TABEL VI.

O V E R M A A T V

VOLGEN

	Januari.	Februari.	Maart.	April.	Mei.	J
1849	9.8	**15.3**	**3.2**	**30.9**	**25.8**	**1**
50	**47.5**	**101.6**	**100.0**	**160.2**	**167.9**	**13**
51	**141.2**	**122.0**	**147.4**	**173.1**	**169.9**	**13**
52	**132.6**	**166.1**	**179.2**	**142.3**	**170.0**	**20**
53	**467.0**	**466.5**	**448.7**	**517.5**	**503.4**	**53**
54	**492.8**	**516.7**	**486.1**	**478.2**	**485.8**	**50**
55	**592.4**	**572.5**	**558.1**	**541.0**	**535.8**	**52**
56	**541.1**	**559.5**	**532.2**	**564.4**	**634.2**	**62**
57	**609.0**	**570.6**	**565.1**	**580.8**	**537.2**	**50**
58	**323.5**	**313.2**	**291.4**	**277.4**	**257.6**	**26**
59	**258.9**	**246.2**	**307.3**	**337.5**	**304.6**	**28**
60	**271.3**	**266.5**	**309.4**	**310.8**	**332.2**	**32**
61	**205.1**	**185.6**	**200.6**	**204.6**	**211.0**	**29**
62	**214.0**	**192.0**	**170.1**	**158.6**	**138.2**	**14**
63	**91.6**	**74.1**	**67.2**	**50.2**	**30.2**	**3**
64	101.5	118.4	115.3	144.8	163.4	15
65	308.8	296.6	299.2	329.5	337.1	34
66	288.7	263.4	262.9	267.0	280.9	29
67	164.0	168.3	174.0	161.5	186.0	17
68	195.9	201.5	180.5	178.4	198.3	23
69	343.8	310.5	324.5	341.8	258.1	20
70	241.0	277.0	265.6	287.0	309.3	33
71	219.8	242.0	266.3	237.0	272.1	24
72	248.4	246.0	256.8	267.4	267.3	26
73	97.1	10.5	133.8	133.8	108.6	10
74	204.9	215.1	195.4	225.0	194.5	20
75	199.2	210.8	220.4	242.6	257.3	20
76	162.2	124.3	97.9	78.9	85.9	9
77	73.7	25.7	4.6	13.5	20.4	4
78	**9.6**	**6.4**	**33.4**	**29.4**	**75.9**	**5**
79	**34.9**	**42.3**	**12.4**	**59.1**	**42.0**	**5**
80	**2.2**	6.6	14.2	23.8	62.2	1
81	**91.4**	**125.3**	**154.6**	**139.4**	**175.4**	**19**
82	**177.1**	**170.0**	**202.3**	**215.9**	**218.2**	**31**
83	**427.9**	**415.8**	**410.6**	**374.9**	**361.7**	**33**
84	**390.7**	**373.4**	**359.2**	**339.2**	**323.7**	**28**
85	**295.1**	**307.0**	**291.0**	**273.5**	**297.1**	**27**
86	**269.6**	**255.5**	**263.7**	**243.5**	**271.5**	**29**
87	**190.6**	**154.4**	**143.7**	**143.1**	**147.0**	**10**

GEN TE UTRECHT.

INDE VAN

i.	Augustus.	September.	October.	November.	December.
.8	2.1	33.2	6.5	3.1	37.1
.0	155.0	126.6	120.6	131.1	154.7
.0	164.4	124.3	85.4	136.8	91.6
.0	235.6	255.5	397.9	425.1	437.7
.1	534.6	553.1	567.3	511.8	476.5
.7	462.8	452.3	495.2	509.9	598.6
.3	567.6	522.3	569.4	538.2	530.9
.5	612.3	617.7	568.5	603.2	592.9
.6	461.6	462.1	422.4	392.9	543.7
.7	386.4	334.6	314.5	274.0	283.0
.9	266.3	279.6	274.4	266.9	262.3
.1	298.8	305.2	283.4	278.7	244.5
.4	272.3	303.8	233.3	253.4	209.0
.5	146.5	119.4	140.0	104.6	100.3
.0	27.3	12.2	56.3	77.9	72.6
.4	204.8	192.4	234.4	258.9	311.5
.8	158.8	217.3	213.6	247.8	299.9
.3	256.3	201.0	262.8	207.2	185.9
.1	187.7	174.9	184.1	210.2	198.4
.8	276.2	321.5	334.8	366.5	332.6
.8	297.2	286.7	260.6	239.3	235.3
.5	257.1	278.1	237.8	252.6	202.6
.4	249.6	225.4	228.0	241.9	261.1
.6	259.8	218.1	154.8	126.9	83.0
.0	158.0	119.6	123.4	156.4	205.3
.9	270.0	217.4	236.9	198.6	209.8
.6	120.8	110.4	144.8	96.3	130.5
.8	154.8	78.5	117.3	121.3	125.3
.2	4.5	24.5	30.7	4.8	2.2
.4	38.4	23.6	11.8	49.3	36.8
.7	119.9	95.7	82.6	65.3	36.0
.3	43.2	21.4	33.6	54.1	110.5
.7	202.0	201.7	176.5	145.0	185.1
.7	361.8	379.8	382.2	414.4	439.1
.9	343.7	337.9	339.7	364.4	358.5
.3	290.9	278.3	273.3	260.3	294.3
.6	161.1	174.6	260.0	252.6	219.9
.1	265.3	217.2	203.5	193.2	223.6
.6	1.9	20.1	1.8	6.4	1.7

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 23 Februari 1889.

Tegenwoordig de Heeren: van de Sande Bakhuyzen, Voorzitter, Rauwenhoff, Buys Ballot, van der Waals, Michaëlis, Schols, van Diesen, Stokvis, Place, Franchimont, van Dorp, Hoek, Bierens de Haan, Suringar, Kamerlingh Onnes, Mac Gillavry, Lorentz, Korteweg, Beijerinck, van Bemmelen, Zaaijer, Hoffmann, Hubrecht, Schoute, Brutel de la Rivière, Baehr, de Vries, Pekelharing, Zeeman, Forster en C. A. J. A. Oudemans, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige Zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1^{0}. H. C. Rogge, Bibliothecaris van de Universiteits-Bibliotheek te Amsterdam, 31 Januari 1889; 2^{0}. A. J. van Pesch, Inspecteur van de Bibliotheek van het Wiskundig Genootschap »Een onvermoeide arbeid komt alles te boven" te Amsterdam, 31 Januari 1889; 3^{0}. G. F. Westerman, Directeur van het koninklijk zoölogisch Genootschap »Natura Artis Magistra" te Amsterdam, 2 Februari 1889; 4^{0}. G. C. W. Bohnensieg, Conservator van Teyler's Stichting te Haarlem, 6 Februari 1889; 5^{0}. A. J. Enschedee, Bibliothecaris van de Stads-Bibliotheek te Haar-

lem, 2 Februari 1889; 6°. W. F. C. van Laak jr., Bibliothecaris van de Gemeente-Bibliotheek te Arnhem, 1889; 7°. Treub, Directeur van 's Lands Plantentuin te Buitenzorg, 16 Januari 1889; 8°. Fraknoi, Secretaris van de Académie Hongroise des Sciences te Budapest, 28 Januari 1889; 9°. Gilbert, Bibliothecaris van de Universitäts-Bibliothek te Greifswald, 8 Februari 1889; 10°. A. de Candolle, Genève, 1888; 11°. J B. de Rossi, Rome, 12 Februari 1889; 12°. den Secretaris van de reale Accademia delle Scienze te Bologna, 1889; 13°. A. Oglialdro, Secretaris van de reale Accademia delle Scienze fisiche e matematiche te Napels, 23 Januari 1889; 14°. H. G. Zeuthen, Secretaris van de Académie royale des Sciences et des Lettres te Kopenhagen, 20 December 1888; 15°. den Secretaris van de Société royale norvégienne des Sciences te Drontheim, 18 Januari 1889; 16°. H. Wild, Directeur van het Observatoire physique central te St. Petersburg, 25 Januari 1889; 17°. W. Schluter, Bibliothecaris van de Universität te Dorpat, 15 Februari 1889; 18°. Weipert, Bibliothecaris van de deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens te Tokio, 1 December 1889; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1°. M. J. de Goeje, Leiden, Januari 1889; 2°. Buys Ballot, Directeur van het Koninklijk Nederlandsch meteorologisch Instituut te Utrecht, 28 Februari 1889; 3°. H. Leemans, Directeur van de Service de la Statistique générale te Brussel, 17 Februari 1889; 4°. Förstemann, Archivaris van de kön sächsische Gesellschaft der Wissenschaften te Leipzig, 1, 10 December 1888; 5°. H. Knoblauch, Voorzitter van de kais. Leopoldinisch-Carolinischen Akademie te Halle a/S, 30 Januari 1889; 6°. A. S. Rillich, Secretaris van de Société de Physique et d'Histoire naturelle te Genève, 10 Februari 1889; 7°. den Secretaris van de reale Accademia delle Scienze te Bologna, 1889; 8°. E. Fergola, Secretaris van de reale Accademia delle Scienze fisiche e

matematiche te Napels, Augustus 1888; 9°. H. WILD, Directeur van het physikalisch Central-Observatorium te St. Petersburg, September 1888; 10°. J. V. BRIDE, Bibliothecaris van de public Library te Melbourne, 8 October 1888; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Ingekomen zijn: 1°. mededeelingen van de Heeren J. A. C. OUDEMANS en A. C. OUDEMANS JR., dat zij verhinderd zijn de Vergadering bij te wonen; 2°. een brief van den Heer Dr. F. TESAR uit Praag, ter begeleiding van eene gedrukte Latijnsche verhandeling: »Analysis gravitatis terrestris", met het verzoek, daarover een oordeel te willen uitspreken. De Voorzitter doet opmerken, dat art. 10 van het Reglement van Orde der Afdeeling het uitbrengen van eenig oordeel over gedrukte stukken verbiedt, zoodat aan het verzoek van Dr. TESAR niet kan worden voldaan. Wordt besloten, genoemden Heer van een en ander kennis te geven; 3°. een brief van den Heer Dr. JAN DE VRIES, leeraar aan de H. B. S. te Kampen, ter begeleiding van een opstel: »Over vlakke configuraties, welke uit de osculatiegroepen der kubische kromme kunnen gevormd worden", met verzoek, daaraan eene plaats te willen verleenen in de werken der Akademie. De Heeren SCHOUTE en BIERENS DE HAAN verklaren zich, op verzoek des Voorzitters, bereid, daarover verslag uit te brengen.

— De Heeren BIERENS DE HAAN en VAN DEN BERG brengen verslag uit over de in December aangeboden verhandeling van den Heer Dr. JAN DE VRIES, en de Heeren VAN BEMMELEN en MARTIN over de in November aangeboden verhandeling van den Heer J. REINDERS. Omtrent beide wordt, op voorstel van Heeren adviseurs, besloten, ze in de werken der Akademie op te nemen.

— De Heer VAN DER WAALS deelt eenige uitkomsten mede, verkregen bij het zoeken naar een molekulair-theorie voor een mengsel van twee stoffen.

Bij de theorie voor een enkele stof was te vinden geweest: 1°. een betrekking tusschen druk, volume en temperatuur, en 2°. een regel omtrent de phasen, die coëxisteeren kunnen.

Ditzelfde zal ook bij de theorie van twee stoffen het geval moeten zijn; maar daarbij krijgt het tweede gedeelte, het vinden van regels voor de coëxisteerende phasen, een betrekkelijk grooten omvang.

Stelt men het volume door V voor, den druk door p, de temperatuur door T, het molekulairgewicht van de eerste stof door M_1 en van de tweede door M_2, en de gewichtshoeveelheden door $M_1 (1 - x)$ en $M_2 x$, dan is voor elke willekeurige homogene evenwichtsphase:

$$p = \frac{M R T}{V - b_x} - \frac{a_x}{V^2}$$

In deze formule is

$$a_x = a_1 (1 - x)^2 + 2 a_{12} x (1 - x) + a_2 x^2$$

en bij benadering

$$b_x = b_1 (1. - x) + b_2 x$$

De theorie wijst echter voor b_x een meer samengestelde uitdrukking aan, waardoor in b_x een factor zou moeten optreden, die door b_{12} zou kunnen worden voorgesteld.

De regels voor de phasen die coëxisteeren kunnen, worden gevonden door de voorwaarden te zoeken waaronder de integraal

$$\int \frac{\psi}{V} d k$$

een minimum wordt; de integraal, uitgebreid over alle hoeveelheden, in een vat van gegeven grootte voorhanden (ψ de vrije energie). Deze voorwaarden zijn.

1°. $$\left(\frac{d \psi}{d v}\right)_x = C_1$$

2°. $$\left(\frac{d\,\psi}{d\,x}\right)_v = C_2$$

3°. $$\psi - x\left(\frac{d\,\psi}{d\,x}\right)_v - v\left(\frac{d\,\psi}{d\,v}\right)_x = C_3$$

Deze uitkomsten voeren tot de volgende constructie:

Nemen wij 3 assen, een V as, een x as en een ψ as, volgens de eerste uitzettende het volume, volgens de tweede x en volgens de 3[de] de vrije energie, dan worden coëxisteerende phasen gevonden door punten te zoeken, die hetzelfde raakvlak hebben. (De temperatuur wordt standvastig gedacht). De vergelijking voor ψ wordt gevonden:

$$\psi = -\int p\,d\,V + M\,R\,T\,\{x\,log.\,x + (1-x)\,log.\,(1-x)\}$$

of

$$\psi = -MRTlog.(V-b_x) - \frac{a_x}{V} + MRT\{xlog.x + (1-x)log.(1-x)\}$$

De bijgevoegde functie van x volgt uit de entropie winst der menging. De tweede variatie der integraal leert dat alleen die phasen stabiel zijn, waarvoor

$$\frac{d^2\,\psi}{d\,x^2}\,\frac{d^2\,\psi}{d\,V^2} - \left(\frac{d^2\,\psi}{d\,x\,d\,V}\right)^2 > 0$$

Het ψ oppervlak kan zeer verschillende gedaanten vertoonen, afhankelijk van T, a_1, a_{12}, a_2, b_1, b_2 en b_{12}.

Zijn beide stoffen beneden haar kritische temperatuur, dan vertoont het oppervlak een plooi, waarvan de richting in hoofdzaak evenwijdig aan de x as loopt.

Al naar gelang van de waarde a_{12} in verhouding tot a_1 en a_2 en de overige constanten, kan de gedaante voor zeer kleine volumes (vloeistofvolumes) verschillend zijn: 1°. evenals voor groote volumes convexo-convex; dan is er in vloeistofvorm volkomen menging; 2°. met een nieuwe plooi loodrecht op de eerste; dan is er slechts partiëele menging mogelijk.

Een model voor het tweede, meer gecompliceerde, geval werd door den spreker vertoond.

Door een raakvlak over het ψ vlak te rollen, zoodat het telkens in twee punten raakt, vindt men o. a. hoe de druk met de samenstelling, hetzij der vloeistofphase, hetzij der dampphase samenhangt.

Onder anderen blijkt daaruit hoe de druk bij vloeistoffen, die zich slechts gedeeltelijk mengen, theoretisch zou moeten voortloopen ook voor die mengsels, die men niet verwezenlijken kan. Steeds moet er een maximum- en een minimumdruk zijn, en die worden *dan* verkregen, als het rollende raakvlak door de punten der spinodale lijn van de tweede plooi gaat. Tusschen dien maximum- en minimumdruk in, zijn de phasen labiel. Daarbuiten zijn de phasen stabiel, maar niet altijd voor groote evenwichtsstoringen; vandaar dat wederom, zooals in zooveel andere gevallen, niet alle stabiele phasen te verwezenlijken zijn.

De lijn, die de afhankelijkheid van den druk aangeeft voor de samenstelling der dampphase, vertoont een dubbelpunt en twee keerpunten. In het dubbelpunt is het raakvlak, dat over het ψ vlak rolt, rakende aan 3 punten — aangevende de 3 coëxisteerende phasen, die bij de gekozen temperatuur mogelijk zijn.

De drukking voor twee coëxisteerende phasen moet altijd kleiner zijn dan de som der spanningen van de verzadigde dampen der twee samenstellende stoffen. Eerst in het geval van absolute *niet*-menging, iets wat als limietgeval zou kunnen gedacht worden, maar volgens deze theorie niet mogelijk is, zou de druk een fractie grooter kunnen zijn. Dat de proeven nimmer een grooteren druk dan de som der twee afzonderlijke spanningen hebben aangetoond, moet aangemerkt worden als een gevolg van menging, hoe gering die ook zij.

— De Heer Kamerlingh Onnes leest het eerste gedeelte van het levensbericht van wijlen het lid der Akademie R. A. Mees, bestemd voor het Jaarboek.

— De Heer Schoute biedt voor de werken der Akademie

aan eene verhandeling van den Heer J. CARDINAAL, leeraar aan de H. B. S. te Tilburg: »Het construeeren van gebogen oppervlakken door middel van vlakke doorsneden". Op verzoek des Voorzitters zullen de Heeren SCHOUTE en BIERENS DE HAAN de Afdeeling daaromtrent dienen van bericht en raad.

— Voor de Boekerij der Akademie worden aangeboden, door den Heer SCHOLS: twee nieuwe stukken van »Waterbouwkunde" door HENKET, TELDERS en SCHOLS, en door den Heer BIERENS DE HAAN: Nieuw Archief der Wiskunde, Deel XV, Stuk 2.

— Daar er verder niets te behandelen is, sluit de Voorzitter de Vergadering.

RAPPORT

OVER DE VERHANDELING

VAN Dr. **J. DE VRIES**.

»OVER DE DESMISCHE CONFIGURATIE 9_3"

DOOR

D. BIERENS DE HAAN EN **F. J. VAN DEN BERG.**

(Uitgebracht in de Vergadering van 23 Februari 1889).

Ondergeteekenden, aan wien door de Afdeeling de beoordeeling van de genoemde verhandeling werd opgedragen, hebben de eer zich van hunne taak te kwijten.

Neemt men drie willekeurige punten c_2, a_2, b_2 aan op de drie gegeven lijnen $\overline{a_1 b_1}$, $\overline{b_1 c_1}$, $\overline{c_1 a_1}$, en nog één willekeurig punt a_3 op de lijn $\overline{b_2 c_2}$, en construeert men de Pascal-lijn $a_1 b_3 c_3$, voor den in twee rechten beschreven zes-hoek $a_2 b_2 c_1 a_3 b_1 c_2$, dan verkrijgt men eene configuratie $9_3\,A$, die schrijver de *desmische* noemt, ter onderscheiding van twee andere configuratiën $9_3\,B$ en $9_3\,C$, die, even als de $9_3\,A$ zelve, reeds in 1881 door S. KANTOR werden aangegeven.

Onze configuratie bezit:

drie hoofd-drie-hoeken $a_1\,a_2\,a_3$, $b_1\,b_2\,b_3$, $c_1\,c_2\,c_3$; hare lijnen vormen dus de basis van eene krommen-reeks der derde klasse.	drie hoofd-drie-zijden $A_1\,A_2 A_3$, $B_1\,B_2\,B_3$, $C_1\,C_2\,C_3$; hare punten vormen dus de basis van een krommen-bundel der derde orde.

Bepaalt men eene K_3 door de drie punten $a_i b_i c_i$ (voor $i = 1, 2, 3$) en een willekeurig punt a''' op $\overline{a_1\,a_2}$, dan snijdt K_3 de lijnen $\overline{a_1\,a_2}$, $\overline{a_2\,a_3}$, $\overline{a_3\,a_1}$ in de punten a''', a', a'', die

de tangentiaalpunten zijn van a_3, a_1, a_2; deze laatste vormen dus een inflexietripel. Wanneer de K_3 de lijn $\overline{a_1 a_2}$ in het punt a_1 raakt, dan zijn a_1, a_2, a_3 punten van 9-puntige aanraking met krommen der derde orde, en zijn dus hoekpunten van een driehoek van HART.

Elk drietal collineaire punten eener K_3 behoort slechts tot ééne desmische conf. $9_3\,A$, in die K_3 beschreven. En daaruit volgt, dat de lijnen, die twee inflexietripels vereenigen, K_3 snijden in een derde inflexietripel.

Daar drie collineaire punten ook drie collineaire tangentiaalpunten hebben, zal men, uit de punten eener desmische conf. 9_3, beschreven in de serpentine der twee-takkige K_3, de raaklijnen aan de kromme trekkende, raakpunten verkrijgen, die tot eene config. $(36_{12}, 144_3)$ aanleiding geven. Deze bevat 16 desmische conf. 9_3 en negen der vroeger door schrijver behandelde conf. $(12_4, 16_3)\,A$.

Vervangt men de twee-takkige K_3 door eene één-takkige, dan komt er eene config. $(18_6, 36_3)$, bevattende vier desmische conf. 9_3 en negen vier-zijden.

Nadat schrijver de constructie gegeven heeft voor *connexe* desmische configuratiën, toont hij aan, dat een K_3 bevat eene desmische conf. 9_3, die met hare connexe samenvalt, en daarom *autoconnexe* genoemd wordt. Deze heeft een drievoudig nevenpunt; terwijl de reciproke wel ééne driepuntige diagonaal heeft, maar geen tweede, zonder onbestaanbaar te worden. En, omgekeerd, bij eene desmische conf. 9_3 met drievoudig nevenpunt, komen de negen diagonalen drie aan drie samen in collineaire punten, de buigpunten eener K_3, die door één hunner wordt bepaald; zij vormen puntenquadrupels, met de drie puntentripels der desmische conf. 9_3: en daarom is deze autoconnexe. Hare hoofd-driehoeken zijn, twee aan twee, viermaal perspectief ten opzichte van de hoekpunten van den derden driehoek en het drievoudig nevenpunt der configuratie.

Zoowel de hoofd-driehoeken eener desmische conf. 9_3 met hunne perspectiviteits-assen, als de hoofd-driezijden met hare perspectiviteits-centra, bepalen telkens drie dergelijke conf. Er zijn 27 desmische conf. 9_3, welke ieder zijn samenge-

steld uit zes lijnen, zes punten, twee diagonalen, twee nevenpunten, een nevenpuntslijn en een diagonaalsnijpunt der oorspronkelijke conf. 9_3; zoodat de 27 perspectiviteitsstralen, die behooren tot de paarswijze drievoudig homologe hoofddriezijden der conf. 9_3, elk gaan door 27 homologe snijpunten van de zijden der hoofd-driehoeken, die eveneens paarswijze drievoudig homoloog zijn.

Het voorgaande leert ons nu uit eene conf. $(3\, x_p, p\, x_3)$ af te leiden de conf. $(9\, x_{3p}, 9\, p\, x_3)$ die bestaat uit de $3\, x$ daartoe behoorende inflexietripels en de lijnen, die hiermede $p\, x$ desmische conf. vormen; — de conf. $(6\, x_{2p}, 4\, p\, x_3)$, die uit px vierzijden is samengesteld; — de conf. $(12\, x_{4p}, 16\, p\, x_3)$, die uit $p\, x$ conf. $(12_4, 16_3)\, A$ bestaat; — verder de conf. $(15\, x_{5p}, 25\, p\, x_3)$, door eene eigenschap der conf. $(15_5, 25_3)$; — en eindelijk de conf. $(24\, x_{8p}, 64\, p\, x_3)$, door eene eigenschap der conf. $(24_8, 64_3)$.

Schrijver somt nu de bekende configuratiën op, die in eene K_3 kunnen beschreven worden, met de indices 2 en 3; die van den vorm n_3, en enkele met de indices 4 en 5. De methode van dit opstel stelt hem nu in staat, dit geringe aantal willekeurig te vermeerderen, zooals hij met een paar voorbeelden toelicht.

Deze arbeid is van dien aard, dat Uwe Commissie U, ook nu weder, gerust kan aanraden, de verhandeling in de Verslagen en Mededeelingen op te nemen.

Leiden en *Hilversum*,
Februari 1889.

D. BIERENS DE HAAN.
F. J. VAN DEN BERG.

OVER DE DESMISCHE CONFIGURATIE 9_3,

DOOR

Dr. **JAN DE VRIES.**

Sedert S. KANTOR in 1881 *) aantoonde, dat er drie in samenstelling verschillende configuraties 9_3 bestaan en de middelen aanwees, om hen te construeeren en van elkander te onderscheiden, zijn deze cf. herhaalde malen het voorwerp van onderzoek geweest. Zoo bepaalden MARTINETTI †) en SCHOENFLIES §) de groepen van substituties, welke in elke dezer cf. de door de getallen van 1 tot 9 voorgestelde cf. punten in elkander doen overgaan, terwijl SCHROETER **) onlangs bewees, dat ook de $9_3\,C$, welke KANTOR met behulp van lineaal en passer had leeren construeeren, evenals de beide anderen, $9_3\,A$ en $9_3\,B$, eene lineaire constructie toelaat. In de volgende §§ wensch ik eenige eigenschappen der door KANTOR $9_3\,A$ genoemde cf. te behandelen, welke, naar het schijnt, nog niet werden opgemerkt.

§ 1. Neemt men op de lijnen $\overline{b_1\,c_1}$, $\overline{c_1\,a_1}$, $\overline{a_1\,b_1}$ achtereenvolgens de punten a_2, b_2, c_2 en op de lijn $\overline{b_2\,c_2}$ het punt a_3 willekeurig aan, en bepaalt de snijpunten $b_3 \equiv (a_3\,c_1, a_2\,c_2)$

---

*) Ueber die Conf. mit Ind. 8, 9 (*Sitz. Wien. Ak.*, Bd. 84, S. 915).

†) Sulle cf. piane μ_3 (*Ann. di Mat.*, Ser. II *a*, tomo XV).

§) Ueber die regelmässigen Cf. n_3 (*Math. Ann.* XXXI).

**) Ueber lineare Konstructionen zur Herstellung der Konfigurationen n_3 (*Gött. Nach.* 9, 1888).

en $c_3 \equiv (a_3 b_1, a_2 b_2)$, dan liggen a_1, b_3 en c_3 in eene rechte, die de reeds voorhanden punten en lijnen tot de cf. 9_3 A aanvult; deze rechte is de Pascallijn voor den in twee rechten $a_2 b_1 c_1$ en $a_3 b_2 c_2$ beschreven zeshoek $a_2 b_2 c_1 a_3 b_1 c_2$. Tabel (A) geeft een overzicht over de gevormde cf.

Lijnen	A_1	B_1	C_1	A_2	B_2	C_2	A_3	B_3	C_3
	a_2	a_1	a_1	a_3	a_2	a_2	a_1	a_3	a_3
Punten	b_1	b_2	b_1	b_2	b_3	b_2	b_3	b_1	b_3
	c_1	c_1	c_2	c_2	c_2	c_3	c_3	c_3	c_1

. . . . (A)

De cf. bevat drie hoofddriezijden *) $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$ $C_1 C_2 C_3$, hare punten vormen dus de basis van een (K_3), d. i. een bundel krommen der derde orde; zij bezit ook drie hoofddriehoeken $a_1 a_2 a_3$, $b_1 b_2 b_3$, $c_1 c_2 c_3$, zoodat hare lijnen de basis van eene krommenreeks der derde klasse vormen. Wegens de overeenkomst tusschen het stelsel der hoofddriehoeken — die, zooals KANTOR opmerkte, paarsgewijze driemaal perspectief zijn t. o. v. de hoekpunten van den derden driehoek als middelpunten — en het door HERMES †), STEPHANOS §) en VERONESE **) beschouwde stelsel van drie paarsgewijze viermaal homologe viervlakken, zal ik deze 9_3 de „desmische" noemen.

§ 2. Op de K_3, welke door de negen punten $a_i b_i c_i$ $(i = 1,2,3)$ en het op $\overline{a_1 a_2}$ willekeurig gekozen punt a''' bepaald wordt, is a''' het tegenpunt van $b_1 c_3 b_3 c_1$, omdat de lijnen A_3 en A_1

*) Eene hoofdveelzijde (een hoofdveelhoek) is het samenstel van eene groep onderling gescheiden cf. lijnen (punten), die samen alle cf. punten (lijnen) dragen. Verg. mijn opstel „Over vlakke polyedrale cf." (*Versl. en Meded.* 3de Reeks, Deel VI, blz. 12).

†) Ausdehnung eines Satzes vom ebenen Vierseit auf räumliche Figuren (*Journal* v. CRELLE. Bd. 56, 1858).

§) Sur les systèmes desmiques (*Bull. d. sciences math.* Ser. II, tome III, 1e partie).

**) Sopra alcune notevoli conf. (*Atti del l'Acc. R.* IX).

de K_3 in a_1 en a_2 snijden; daar a_3 het dubbelpunt der uit B_3 en C_3 gevormde K_2 is, moet a''' dus het tangentiaalpunt van a_3 wezen. Op dezelfde wijze blijkt, dat K_3 de lijn $\overline{a_2 a_3}$ in het tangentiaalpunt a' van a_1 en de lijn $\overline{a_3 a_1}$ in het tangentiaalpunt a'' van a_2 ontmoet. De punten $a_1 a_2 a_3$ vormen derhalve een inflexietripel, d. w. z. zijn de projecties der drie bestaanbare buigpunten uit een punt van K_3 *).

De drie gescheiden puntentripels eener desmische 9_3 *vormen op elke omgeschreven* K_3 *drie inflexietripels, die paarsgewijze driemaal perspectief zijn t. o. v. het derde tripel.*

Op de K_3, die $\overline{a_1 a_2}$ in a_1 raakt, valt a''' met a_1, dus a' met a_2 samen, waardoor a_3 het tangentiaalpunt van a_2 en het 2[de] tangentiaalpunt van a_1 wordt, dus met zijn 3[de] tangentiaalpunt vereenigd is; $a_1 a_2 a_3$ zijn dan punten van negenpuntige aanraking met krommen der derde orde, dus de hoekpunten van een der beide driehoeken van Hart †).

De (K_3), *welke door eene desmische* 9_3 *bepaald is, bevat drie krommen, voor welke een der hoofddriehoeken tegelijk in en om* K_3 *beschreven is.*

§ 3. Liggen drie punten a_1, b_1, c_2 eener K_3 in eene rechte, dan zijn hunne projecties p, q, r uit de bestaanbare buigpunten i, i', i'' eveneens collineair. De projecties a_2 en a_3 van i' en i'' uit p vullen a_1 tot een inflexietripel aan, terwijl b_1 met de projecties b_2 en b_3 van i'' en i uit q, en c_2 met de projecties c_3 en c_1 van i en i' uit r een inflexietripel vormt. Duidt men door het teeken

$$\left\{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix}\right\}$$

aan, dat de negen punten 1 tot 9 met de zes lijnen

*) Durège, *die ebenen Curven* 3[ter] O. 1871, S. 291, of Schroeter, *die Theorie der ebenen Curven* 3[ter] O. 1888, S. 282.

†) On the nine-punct contact of cubic curves (*Trans. Royal Irish Acad.* 1875).

123, 456, 789, 147, 258, 369 incident zijn, dus met hen eene atrigonische *) $(9_2, 6_3)$ vormen, dan geeft tabel (B) een overzicht over den samenhang tusschen de 15 bovengenoemde punten.

$$\begin{Bmatrix} p & q & r \\ i & i & i \\ a_1 & b_3 & c_3 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} p & q & r \\ i' & i' & i' \\ a_2 & b_1 & c_1 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} p & q & r \\ i'' & i'' & i'' \\ a_3 & b_2 & c_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} p & q & r \\ i & i' & i'' \\ a_1 & b_1 & c_2 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} p & q & r \\ i & i'' & i' \\ a_1 & b_2 & c_1 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} p & q & r \\ i' & i & i'' \\ a_2 & b_3 & c_2 \end{Bmatrix} \; \ldots\ldots \text{(B)}$$

$$\begin{Bmatrix} p & q & r \\ i' & i'' & i \\ a_2 & b_2 & c_3 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} p & q & r \\ i'' & i & i' \\ a_3 & b_3 & c_1 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} p & q & r \\ i'' & i' & i \\ a_3 & b_1 & c_3 \end{Bmatrix}$$

De acht nieuwe lijnen van (B) vormen blijkbaar met de lijn $\overline{a_1 b_1 c_2}$ eene door tabel (A) voorgestelde desmische 9_3.

Elk drietal collineaire punten eener K_3 behoort slechts tot ééne in K_3 beschreven desmische 9_3.

Daar een inflexietripel door een zijner punten bepaald is, geldt voorts de volgende, naar het schijnt nog niet opgemerkte, eigenschap.

De lijnen, welke een inflexietripel met een tweede inflexietripel vereenigen, snijden K_3 in een derde inflexietripel.

Drie tot eene desmische 9_3 behoorende inflexietripels zal ik door de benaming *desmische groep* samenvatten.

Daar drie collineaire punten collineaire tangentiaalpunten hebben, vormen de snijpunten van K_3 met de zijden der hoofddriehoeken eener desmische 9_3, dus de punten $a'a''a'''$, $b'b''b'''$, $c'c''c'''$, eene tweede desmische 9_3, waarvoor de tabel uit (A) wordt afgeleid door elken index door het overeenkomstige aantal accenten te vervangen. Elk op eene cf.dia-

*) *Atrigonisch* heet eene cf., wanneer zij geen cf. driehoeken bezit.

gonaal der desmische 9_3 gekozen punt bepaalt dus eene in de hoofddriehoeken dezer cf. beschreven desmische 9_3. Hieruit volgt verder:

Trekt men uit de punten eener in de serpentine eener tweetakkige K_3 beschreven desmische 9_3 de raaklijnen naar de kromme, dan behooren de raakpunten tot eene cf. $(36_{12}, 144_3)$, *welke* 16 *desmische* 9_3 *en* 9 *cf.* $(12_4, 16_3)$ A *) *bevat.*

Verricht men dezelfde constructie voor het geval der eentakkige K_3, *dan ontstaat eene* $(18_6, 36_3)$, *welke* 9 *vierzijden en* 4 *desmische* 9_3 *bevat.*

De beide laatste cf. ontstaan ook, als men de punten der desmische 9_3 tot puntenkwadrupels of tot correspondeerende paren van hetzelfde stelsel aanvult.

Wordt elk inflexietripel eener desmische groep met een bepaald tripel van eene tweede soortgelijke groep vereenigd, dan snijden de 27 *verbindingslijnen* K_3 *in de tripels van een derde desmische groep.*

De 9 *inflexietripels behooren dan met hunne verbindingslijnen tot eene cf.* $(27_6, 54_3)$, *welke uit* 6 *desmische* 9_3 *is samengesteld.*

§ 4. Plaatst men bij de in § 1 gegeven constructie der desmische 9_3 het punt a_3 in de doorsnede der lijnen $\overline{b_2 c_2}$ en $\overline{a_1 a_2}$, dan zijn $a_1 a_2 a_3$ de bestaanbare buigpunten van elke om de cf. beschreven K_3; $b_1 b_2 b_3$ en $c_1 c_2 c_3$ zijn dan *connexe* inflexietripels †). Deze bizondere 9_3 wordt door Schroeter in zijne onlangs verschenen theorie der K_3 vermeld §).

Op elke K_3, *welke om eene desmische* 9_3 *met eene driepuntige diagonaal kan beschreven worden, zijn de beide overige gescheiden puntentripels connexe inflexietripels; op ééne* K_3 *zijn de beide hoofddriehoeken met de driehoeken van* Hart *identiek.*

Dit laatste blijkt hieruit, dat een punt, dat met zijn

*) De cf. $(12_4, 16_3)$ A heb ik beschouwd in mijn opstel „Over vlakke conf." (*Versl. en Meded.*, 3de Reeks, Deel V, blz. 105).

†) Durège, l. c., blz. 288.

§) Schroeter, l. c., blz. 283.

derde tangentiaalpunt samenvalt, uit elk buigpunt in een soortgelijk punt wordt geprojecteerd.

De punten p, q, r, uit welke de punten eener algemeene desmische 9_3 in de drie buigpunten worden geprojecteerd (§ 3), behooren achtereenvolgens tot de connexe tripels van a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2, 3)$. Deze drie connexe inflexietripels bepalen eene tweede desmische 9_3; dit volgt trouwens ook uit de aan het slot van § 3 vermelde eigenschap, wanneer aldaar de tweede desmische groep tot het buigpuntentripel wordt samengetrokken. Twee aldus met elkander verbonden desmische 9_3 noem ik *connexe* cf.

De desmische 9_3 eener K_3 kunnen dus in connexe paren gerangschikt worden; daarbij blijkt, dat K_3 ééne desmische 9_3 bevat, welke met hare connexe cf. samenvalt: hare tripels worden gevormd door de sextactische punten, d. z. de 9 antitangentiaalpunten der drie bestaanbare buigpunten. Eene hoofddriezijde dezer *autoconnexe* 9_3 bestaat uit de drie harmonische poollijnen der buigpunten; daar deze rechten naar een punt convergeeren, heeft de cf. een drievoudig nevenpunt, komt dus reciprook overeen met de bovengenoemde door het bezit van eene driepuntige diagonaal gekenmerkte desmische 9_3.

Eene desmische 9_3 kan geen tweede driepuntige diagonaal bezitten, zonder gedeeltelijk onbestaanbaar te worden; immers uit $\mathfrak{A} \equiv \overline{a_1 a_2 a_3}$ en $\mathfrak{B} \equiv \overline{b_1 b_2 b_3}$ volgt $\overline{c_1 c_2 c_3} \equiv \mathfrak{C}$; door toevoeging dezer drie lijnen ontstaat uit de 9_3 eene $(9_4, 12_3)$, die met de door HESSE aangewezen cf. der buigpunten identiek, dus slechts gedeeltelijk bestaanbaar is.

§ 5. Komen $A_1 A_2 A_3$ in een punt o samen, dan bestaat eene der krommen van de derde klasse, welke door A_i B_i C_i worden aangeraakt, uit o en eene kegelsnede. Beschouwt men B_i, C_i als de zijden van den Brianchonzeshoek $a_1 c_1 b_3 a_2 c_3 b_1$, dan blijkt, dat de cf. diagonalen $\overline{a_1 a_2}$, $\overline{b_1 b_3}$ en $\overline{c_1 c_3}$ door een punt γ gaan. Evenzoo volgt uit den zeshoek $a_1 b_2 c_3 a_3 b_3 c_2$, dat $\overline{a_1 a_3}$, $\overline{b_2 b_3}$, $\overline{c_2 c_3}$ naar een punt β, en uit den zeshoek $a_2 b_2 c_1 a_3 b_1 c_2$, dat de diagonalen $\overline{a_2 a_3}$, $\overline{b_1 b_2}$, $\overline{c_1 c_2}$ naar

een punt α convergeeren. De punten α, β, γ zijn als homologe snijpunten der t. o. v. het punt o perspectief gelegen driehoeken $(a_1\, a_2\, a_3)$, $(b_3\, b_1\, b_2)$, $(c_3\, c_1\, c_2)$ collineair. De lijnen B_i, C_i vormen nu met de 9 cf. diagonalen, de as $\alpha\,\beta\,\gamma$, de 9 cf. punten en de punten α, β, γ de door tabel (C) voorgestelde $(12_4,\ 16_3)\ A$ *).

$\mathfrak{A}_3$	$\mathfrak{A}_2$	C_1	B_1	$\mathfrak{A}_1$	O	$\mathfrak{B}_3$	$\mathfrak{C}_3$	B_2	$\mathfrak{B}_1$	$\mathfrak{B}_2$	C_3	C_2	$\mathfrak{C}_1$	B_3	$\mathfrak{C}_2$	
a_1	a_1	a_1	a_1	α	α	α	α	b_3	b_3	b_3	b_3	c_3	c_3	c_3	c_3	. . (C)
a_2	β	b_1	c_1	a_2	β	b_1	c_1	a_2	β	b_1	c_1	a_2	β	b_1	c_1	
γ	a_3	c_2	b_2	a_3	γ	b_2	c_2	c_2	b_2	γ	a_3	b_2	c_2	a_3	γ	

Op de om deze cf. beschreven tweetakkige K_3 vormen $a_1\, b_3\, c_3\, \alpha$, $a_2\, b_1\, c_1\, \beta$ en $a_3\, b_2\, c_2\, \gamma$ drie puntenkwadrupels met collineaire tangentiaalpunten; nu zijn evenwel $a_1\, b_3\, c_3$ met A_3, $a_2\, b_1\, c_1$ met A_1 en $a_3\, b_2\, c_2$ met A_2 incident: α, β, γ zijn dus de buigpunten der K_3 en A_i hunne harmonische poollijnen. Van de geassociëerde $(12_4,\ 16_3)\ A$ liggen op elke A_i drie punten, die door de paren der 9_3 van o harmonisch gescheiden worden; de overige 3 punten zijn in o vereenigd, zoodat de omgeschreven K_3 in het samenstel der lijnen A_i ontaardt.

Hieruit volgt deze omkeering der in § 4 gevonden eigenschap:

Van eene desmische 9_3 *met drievoudig nevenpunt komen de negen diagonalen drie aan drie samen in drie collineaire punten, welke de buigpunten der door een hunner bepaalde* K_3 *zijn; daar deze buigpunten met de drie inflexietripels der* 9_3 *puntenkwadrupels vormen, is deze* 9_3 *autoconnex.*

De hoofddriehoeken der autoconnexe cf. liggen paarsgewijze viermaal perspectief t. o. v. het punt o en de hoek-

*) J. de Vries, Over vlakke cf., blz. 107. De volgorde der kolommen van (C) stemt geheel overeen met die der tabel (B) in de aangehaalde verhandeling.

punten van den derden driehoek *). Omgekeerd geven twee viermaal perspectief geplaatste driehoeken steeds aanleiding tot eene autoconnexe desmische 9_3; een der driehoeken kan willekeurig aangenomen worden, van den tweeden slechts een hoekpunt †); drie der perspectiviteitscentra vormen een derden driehoek, welke met *elken* der beide anderen viermaal perspectief ligt; dit laatste schijnt door SCHROETER niet opgemerkt te zijn.

De hoofddriehoeken eener autoconnexe 9_3 *zijn twee aan twee viermaal perspectief t. o. v. de hoekpunten van den derden driehoek en het drievoudige nevenpunt der cf.*

Heeft eene desmische 9_3 behalve de driepuntige diagonaal $\mathfrak{A} \equiv \overline{a_1 a_2 a_3}$ een drievoudig nevenpunt $o \equiv A_1 A_2 A_3$, dan liggen de punten α, β, γ op $\mathfrak{A}$, en de door een hunner bepaalde K_3 ontaardt in $\mathfrak{A}$ en de door $b_i c_i$ $(i = 1, 2, 3)$ getrokken K_2.

Deze in dubbele mate bizondere 9_3 kan aldus geconstrueerd worden: drie in o samenkomende lijnen $A_1 A_2 A_3$ worden door eene vierde lijn $\mathfrak{A}$ achtereenvolgens in a_2, a_3, a_1 gesneden; het op A_1 gekozen punt b_1 wordt uit a_1 op A_2 in c_2, uit a_3 op A_3 in c_3 geprojecteerd; $\overline{a_2 c_2}$ snijdt A_3 in b_3, $\overline{a_2 c_3}$ bepaalt op A_2 het punt b_2, $\overline{a_1 b_2}$ op A_1 het negende punt c_1.

§ 6. De hoofddriehoeken $a_1 a_2 a_3$ en $b_1 b_3 b_2$ eener desmische 9_3 liggen perspectief t. o. v. c_2 (tabel A): de homologe diagonalensnijpunten $\mathfrak{A}_3 \mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_3$ zijn dus incident met eene rechte C'. Uit de homologie van $a_1 a_2 a_3$ en $b_2 b_1 b_3$ met centrum c_1 volgt evenzoo, dat de punten $\mathfrak{A}_3 \mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_1$ door eene rechte C''' verbonden worden; eindelijk levert de homologe ligging van $a_1 a_2 a_3$ en $b_3 b_2 b_1$ de rechte $C'' \equiv (\mathfrak{A}_3 \mathfrak{B}_1, \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_3, \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2)$. De lijnen $C' C'' C'''$ vormen met

*) Dat twee driehoeken hoogstens *viermaal* perspectief kunnen zijn, heeft ROSANES (*Math. Ann.* II, S. 549) analytisch en SCHROETER (aldaar S. 553) synthetisch bewezen.

†) SCHROETER in de zooeven aangehaalde verhandeling.

de diagonalen $\mathfrak{A}_i$ $\mathfrak{B}_i$ en de diagonalensnijpunten $c_{ij} \equiv (\mathfrak{A}_i \mathfrak{B}_j)$ de door tabel (D) voorgestelde desmische 9_3.

$\mathfrak{A}_1$	$\mathfrak{A}_2$	$\mathfrak{A}_3$	$\mathfrak{B}_1$	$\mathfrak{B}_2$	$\mathfrak{B}_3$	C'	C''	C'''	
c_{11}	c_{21}	c_{31}	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{11}	c_{13}	c_{21}	. . (D)
c_{12}	c_{22}	c_{32}	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{23}	c_{31}	c_{33}	
c_{13}	c_{23}	c_{33}	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{32}	c_{22}	c_{12}	

De hoofddriehoeken eener desmische 9_3 bepalen paarsgewijze met hunne bijbehoorende perspectiviteitsassen drie soortgelijke configuraties.

Zijn $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$, $\beta_1 \beta_2 \beta_3$ de hoekpunten der hoofddriezijden $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$, dan ligt $A_1 A_2 A_3$ met $B_1 B_3 B_2$ t. o. v. de as C_3, met $B_2 B_1 B_3$ t. o. v. de as C_2, met $B_3 B_2 B_1$ t. o. v. C_1 perspectief. De overeenkomstige centra $\gamma' \gamma'' \gamma'''$ vormen met de punten α_i, β_i en de 9 perspectiviteitsstralen $\Gamma_{ij} \equiv \overline{\alpha_i \beta_j}$ de desmische 9_3 van tabel (E).

Γ_{11}	Γ_{23}	Γ_{32}	Γ_{13}	Γ_{22}	Γ_{31}	Γ_{12}	Γ_{21}	Γ_{33}	
γ'	γ'	γ'	γ''	γ''	γ''	γ'''	γ'''	γ'''	. . (E)
α_1	α_2	α_3	α_1	α_2	α_3	α_1	α_2	α_3	
β_1	β_3	β_2	β_3	β_2	β_1	β_2	β_1	β_3	

De hoofddriezijden eener desmische 9_3 bepalen paarsgewijze met hunne bijbehoorende perspectiviteitscentra drie soortgelijke cf.

Van den in de lijnen C_1 C_2 beschreven zeshoek $a_1 a_2 c_2 b_2 b_1 c_3$ met de zijden $\mathfrak{A}_3 B_2 A_2 \mathfrak{B}_3 B_3 A_3$ bevat de Pascallijn de punten $c_{33} \equiv (\mathfrak{A}_3 \mathfrak{B}_3)$, $\beta_1 \equiv (B_2 B_3)$ en $\alpha_1 \equiv (A_2 A_3)$; blijkens tabel (E) ligt op deze rechte ook γ'.

Tot elke desmische 9_3 behooren 27 soortgelijke cf., welke elk uit 6 punten en 6 lijnen, 2 nevenpunten en 2 diagonalen, 1 diagonalensnijpunt en 1 nevenpuntenlijn der oorspronkelijke 9_3 zijn samengesteld.

Hierdoor is tevens een verband aangewezen tusschen de drie met (D) en de drie met (E) overeenkomende 9_3:

De 27 perspectiviteitsstralen, welke bij de paarsgewijze drievoudig homologe hoofddriezijden eener desmische 9_3 *behooren, gaan elk door een der 27 homologe snijpunten der zijden van de paarsgewijze driemaal homologe hoofddriehoeken.*

§ 7. De eigenschap, dat drie collineaire punten eener K_3 steeds ééne in de kromme beschreven desmische 9_3 bepalen (§ 3), geeft een middel om uit eene cf. $(3\,x_p,\ px_3)$ eene cf. $(9\,x_{3p},\ 9\,p\,x_3)$ af te leiden, welke samengesteld is uit de $3\,x$ door de oorspronkelijke cf. punten aangewezen inflexietripels en de lijnen, die met deze tripels $p\,x$ desmische 9_3 vormen. Deze constructie vervalt natuurlijk, wanneer de $(3\,x_p,\ p\,x_3)$ zelve uit inflexietripels bestaat; dit is o. a. het geval met de $9_3\,C$, waarvan KANTOR l. c. heeft aangetoond, dat hare punten steeds met eene K_3 incident zijn *), en de toppen vormen van eenen tangentiaalnegenhoek, d. w. z. een negenhoek, waarin elk hoekpunt het tangentiaalpunt van het voorgaande is. Zooals uit tabel (F) blijkt, vormen de drietallen van punten 1, 4, 7; 2, 5, 8; 3, 6, 9 drie inflexietripels, wanneer $(i+1)$ het tangentiaalpunt van i voorstelt.

1	4	7	2	5	8	3	6	9	
4	7	1	5	8	2	6	9	3	. . (F)
8	2	5	9	3	6	1	4	7	

De bovengenoemde handelwijze om nieuwe cf. te vinden, staat niet op zich zelve. Vult men n.l. de punten der $(3\,x_p,\ p\,x_3)$ tot correspondeerende puntenparen of tot puntenkwadrupels aan, dan ontstaat in het eerste geval eene $(6\,x_{2p},\ 4\,p\,x_3)$, die uit px vierzijden, in het tweede geval eene $(12\,x_{4p},\ 16\,p\,x_3)$, welke uit px cf $(12_4,\ 16_3)\ A$ is samengesteld.

*) Door $9_3\,B$ kan geen eigenlijke K_3 gebracht worden (KANTOR l. c.).

Wordt K_3 in de collineaire punten p, q, r door kegelsneden vijfpuntig geraakt, dan liggen de zesde snijpunten met K_3, p', q', r', eveneens in eene rechte *). Nu gaan door het punt p' der tweetakkige K_3 nog vier bestaanbare K_2, die elders vijfpuntig raken †), zoodat door elk der punten p, q, r een puntenkwintupel bepaald wordt; uit de zooeven aangehaalde eigenschap volgt evenwel, dat K_3 door elke lijn, die een punt van het met p overeenkomende kwintupel met een punt van het door q aangewezen kwintupel verbindt, in een punt van het derde kwintupel wordt gesneden.

Construeert men door ieder van drie collineaire punten eener K_3 de vijf kegelsneden, welke K_3 elders vijfpuntig raken, dan behooren de raakpunten tot eene cf. $(15_5, 25_3)$, *die door eene van hare lijnen volkomen bepaald is.*

Deze eigenschap biedt blijkbaar het middel aan, om uit eene $(3\,x_p,\ p\,x_3)$ door aanvulling van hare punten tot kwintupels eene $(15\,x_{5p},\ 25\,p\,x_3)$ te verkrijgen.

Daar verder twee elkander achtpuntig rakende K_3 nog het derde tangentiaalpunt van het raakpunt gemeen hebben §), en van drie collineaire punten de derde tangentiaalpunten mede collineair zijn, volgt hieruit, dat de acht op een bepaalden tak der K_3 gelegen punten, welke x tot derde tangentiaalpunt hebben, met de acht tot denzelfden tak behoorende derde antitangentiaalpunten van y verbonden worden door 64 lijnen, die K_3 acht aan acht ontmoeten in acht punten, waarvan het gemeenschappelijke derde tangentiaalpunt op $\overline{xy}$ ligt. Hier heeft men dus eene cf. $(24_8, 64_3)$, die wederom door *eene* van hare lijnen volkomen bepaald is; zij stelt ons in staat uit eene $(3\,x_p,\ p\,x_3)$ eene $(24\,x_{8p},\ 64\,p\,x_3)$ af te leiden. De cf. $(6_2, 4_3)$, $(9_3, 9_3)$, $(12_4, 16_3)$, $(15_5, 25_3)$ en $(24_8, 64_3)$, waarvan in het voorgaande gebruik wordt gemaakt tot verkrijging van nieuwe cf., behooren blijkbaar tot den vorm $(3\,n_n,\ n^2{}_3)$; in een volgend opstel zal ik aan-

---

*) SCHROETER, l. c. blz. 273.

†) KÖTTER, Beiträge zur Theorie der Osculationen bei ebenen Curven dritten Ordnung. *Inaug. diss.* Berlin 1884. S. 6.

§) SALMON, On curves of the third order. *Phil. Trans.* Vol. 148, p. 537.

toonen, dat voor *elke* waarde van n eene cf. kan aangewezen worden, die tot hetzelfde doeleinde bruikbaar is.

§ 8. Het aantal bekende cf., die in eene K_3 kunnen beschreven worden, is betrekkelijk nog gering: daarvan behooren tot de cf. met indices (2, 3), behalve de volledige vierzijde en de atrigonische $(9_2, 6_3)\,A$, de $(12_2, 8_3)$, welke uit de $(12_4, 16_3)\,A$ door afscheiding van twee hoofdvierzijden ontstaat *), en de $(15_2, 10_3)$, welke door de afzondering van twee hoofdvijfzijden uit de door Martinetti †) opgemerkte atrigonische 15_3 gevormd wordt. Tot de cf. n_3, welke hier in aanmerking komen, behooren, behalve de desmische 9_3 en de $9_3\,C$, de door Kantor §) als $10_3\,A$, $10_3\,B$, $10_3\,D$, $10_3\,G$, vermelde cf., de 12_3, die uit $(12_4, 16_3)\,A$ door weglating van eene hoofdvierzijde ontstaat, en de bovengenoemde 15_3 van Martinetti, welke, zooals Dr. Schoenflies mij onlangs mededeelde, ook gevormd wordt door de snijpunten van K_3 met de 15 zijden van eenen in haar beschreven Pascalzeshoek; verder twee verschillende atrigonische 27_3, waarvan de eene door Martinetti l. c. uit de bovengenoemde 15_3 wordt afgeleid, terwijl het bestaan der tweede mij eveneens door Dr. Schoenflies werd medegedeeld; zij wordt bepaald door de punten eener atrigonische $(9_2, 6_3)$ en de snijpunten van hare diagonalen met de K_3. Tot de cf. met hooger indices behooren de beide door mij l. c. aangewezen $(12_4, 16_3)$ benevens de eveneens door Martinetti gevonden $(27_5, 45_3)$ en de $(24_4, 32_3)$, welke de restfiguur van elke harer lijnen is. De toepassing der bovengenoemde handelwijzen stelt ons nu in staat, uit deze bekende cf. een onbeperkt groot aantal nieuwe cf. te vinden.

Als voorbeeld beschouw ik de cf. $(27_6, 54_3)$, welke ontstaat, wanneer de punten der atrigonische $(9_2, 6_3)$, (verg. § 3),

---

*) J. de Vries, Over vlakke cf., blz. 118.

†) Sopra alcune conf. piane (*Ann. di Mat.* Ser. IIa, tomo XIV).

§) Die Conf. $(3, 3)_{10}$ (*Wiener Sitz.* Bd. 84. S. 1291).

$$\left\{\begin{array}{ccc} 1_1 & 2_1 & 3_2 \\ 4_1 & 5_2 & 6_1 \\ 7_2 & 8_1 & 9_1 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (G)$$

tot inflexietripels p_i ($p = 1$ tot 9, $i = 1, 2, 3$) worden aangevuld. Met het oog op tabel (A) kunnen hare lijnen worden voorgesteld door

$$\left.\begin{array}{|ccc|ccc|ccc|} 1_i & 2_i & 3_{i+1} & 1_i & 2_{i+1} & 3_i & 1_{i+1} & 2_i & 3_i \\ 4_i & 5_i & 6_{i+1} & 4_i & 5_{i+1} & 6_i & 4_{i+1} & 5_i & 6_i \\ 7_i & 8_i & 9_{i+1} & 7_i & 8_{i+1} & 9_i & 7_{i+1} & 8_i & 9_i \\ \hline 1_i & 4_i & 7_{i+1} & 1_i & 4_{i+1} & 7_i & 1_{i+1} & 4_i & 7_i \\ 2_i & 5_i & 8_{i+1} & 2_i & 5_{i+1} & 8_i & 2_{i+1} & 5_i & 8_i \\ 3_i & 6_i & 9_{i+1} & 3_i & 6_{i+1} & 9_i & 3_{i+1} & 6_i & 9_i \end{array}\right. \quad \ldots\ldots \quad (H)$$

Elke der zes kolommen van tabel (H), waar de index 4 natuurlijk door 1 moet worden vervangen, bevat blijkbaar de notatie voor eene hoofdnegenzijde der $(27_6, 54_3)$; door achtereenvolgens een, twee, drie, vier dezer hoofdnegenzijden weg te laten, ontstaat uit de oorspronkelijk dodekatrigonische *) $(27_6, 54_3)$ eene hexatrigonische $(27_5, 45_3)$, eene atrigonische $(27_4, 36_3)$, eene atrigonische 27_3 en eene atrigonische $(27_2, 18_3)$.

§ 9. Zijn $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ de toppen van eenen tangentiaal-n-hoek der K_3, zoodat a_{i+1} het tangentiaalpunt van a_i is, dan behooren de inflexietripels a_i, b_i, c_i ($i = 1$ tot n), welke door de punten a_i bepaald worden, tot eene cf. $3n_3$, waarvan de lijnen n driehoeken $(a_i\ b_i\ c_i)$ begrenzen, die zoodanig geplaatst zijn, dat de driehoek $(a_{i+1}\ b_{i+1}\ c_{i+1})$ in den driehoek $(a_i\ b_i\ c_i)$ is beschreven; het laatste is een gevolg van de eigenschap, dat de zijden van den door een

*) Door n-trigonische cf. wordt verstaan eene cf., waarin elk punt tot n cf. driehoeken behoort.

inflexietripel bepaalden driehoek de kromme in de tangentiaalpunten der overstaande toppen snijden, terwijl deze tangentiaalpunten weer een inflexietripel vormen; blijkbaar zijn de punten b_i de toppen van een tweeden, de punten c_i de toppen van een derden tangentiaal-n-hoek. Daar K_3 voor elke waarde van n bestaanbare tangentiaalveelhoeken bezit *), is hierdoor bewezen, dat de door SCHOENFLIES †) opgemerkte tetratrigonische, uit een cyclus van n in elkander beschreven driehoeken samengestelde, cf. $3n_3$ in eene algemeene K_3 kunnen beschreven worden.

Vult men de toppen a_i van een tangentiaal-n-hoek der K_3 tot inflexietripels aan, dan ontstaat eene tetratrigonische $3n_3$ met de lijnen $\overline{a_i\, b_i\, c_{i+1}}$, $\overline{a_i\, b_{i+1}\, c_i}$ en $\overline{a_{i+1}\, b_i\, c_i}$ ($i = 1$ tot n).

Deze cf. bezit drie hoofd-n-zijden, waarvan er eene door de n lijnen $\overline{a_i\, b_i\, c_{i+1}}$ wordt gevormd; door afscheiding dezer hoofd-n-zijde ontstaat uit de $3n_3$ eene $(3\, n_2,\ 2\, n_3)$.

*) KÖTTER, l. c., S. 50.
†) l. c. S. 51.

V E R S L A G

OVER DE VERHANDELING

VAN DEN HEER **G. REINDERS.**

„OVER DE SAMENSTELLING EN HET ONTSTAAN DER ZOOGENAAMDE OERBANKEN IN DE NEDERLANDSCHE HEIDEGRONDEN".

(Uitgebracht in de Vergadering van 23 Februari 1889.)



De Akademie herinnert zich gewis, dat hare Commissie tot onderzoek: »naar de mate, waarin water onder verschillende drukhoogte door zandmassa's van verschillende samenstelling en breedte stroomt"; haar vóór twee jaren een verslag van dat onderzoek heeft aangeboden. In dat verslag (in de Verhandelingen afgedrukt) werd op den invloed gewezen, dien de zoogenaamde bankvorming in den bodem op het waterdoorlatend vermogen, met name van zandlagen, uitoefent. Van het voorkomen van al of niet doorlatende zandlagen in het Nederl. alluvium en diluvium werden voorbeelden gegeven, en de algemeene oorzaken der bankvorming daarbij vermeld. De samenstelling der bank die het water niet doorlaat, gemeenlijk oerbank genoemd, was echter tot nog toe voor onzen bodem niet of geheel onvoldoende onderzocht. De Heer REINDERS heeft dat onderzoek ter hand genomen.

Het voorkomen van oerbanken heeft hij op negen verschillende plaatsen, in de gemeenten Apeldoorn en Olst gelegen, onderzocht, en de aarde zoowel uit de bank als uit de daarboven en daarbeneden gelegen lagen aan een uit-

voerig chemisch onderzoek onderworpen. Hij heeft daarbij vooral getracht de samenstelling van het bindmiddel of cement na te speuren; in hoeverre ijzeroxyde, humuszuren, humaten van ijzeroxyde en aluinaarde, kiezelzuur en silicaten, daaraan deelnemen. Voorts heeft hij uit de onderlinge vergelijking der lagen trachten op te sporen, op welke wijze de beweging dezer bestanddeelen door de verschillende lagen van den bodem daarin de bankvorming voortbrengt — niet alleen langs chemischen maar ook langs mechanischen weg.

Na eene uiteenzetting van de uitkomsten der vroegere onderzoekingen van Müller, Tuxen, Ramann, Emeis omtrent de bankvorming in overeenkomstige gronden in Duitschland, vergelijkt de schrijver deze uitkomsten met de zijne. Hij bevestigt dat het bindmiddel in de meeste gevallen niet alleen uit ijzeroxyde — of althans in hoofdzaak — bestaat, maar uit humaten van ijzeroxyde en aluinaarde; en toont daarbij aan dat ook kiezelzuur en silicaten in het bindmiddel aanwezig zijn. Een onderzoek daarnaar had tot nog toe niet plaats gehad. Voorts licht hij uitvoerig toe, hoe uit de beweging der fijnste aarddeeltjes tusschen de zandkorrels, en uit de inwerking der colloidale humuszuren op het ijzeroxyde en op de silicaten enz. — gegeven de eigenaardige omstandigheden van vochtigheid en plantengroei — de ophooping van het bindmiddel in de banklaag aanvankelijk kan verklaard worden.

De schrijver geeft zijn voornemen te kennen om zijn onderzoek voort te zetten.

Aangezien deze verhandeling eene niet onbelangrijke bijdrage is tot de kennis van eene gewichtige vorming in den bouwgrond, en aangezien het onderzoek met nauwkeurigheid is volbracht, en verder doorgevoerd dan tot nog toe het geval was, zoo hebben wij geen bezwaar de plaatsing dezer verhandeling in hare werken aan de Akademie voor te stellen.

Leiden, Februari 1889

J. M. VAN BEMMELEN.
K. MARTIN.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 30 Maart 1889.



Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voorzitter, ZEEMAN, BAEHR, HUBRECHT, FORSTER, STOKVIS, RAUWENHOFF, MICHAËLIS, VAN DIESEN, SCHOLS, KAPTEYN, DE VRIES, VAN DER WAALS, BUYS BALLOT, J. A. C. OUDEMANS, GRINWIS, SURINGAR, FRANCHIMONT, MARTIN, VAN BEMMELEN, VAN DORP, DIBBITS, A. C. OUDEMANS JR., KORTEWEG, KAMERLINGH ONNES, MULDER, HOEK, ZAAIJER, HOFFMANN, SCHOUTE, BIERENS DE HAAN, BEIJERINCK, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, VAN 'T HOFF en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1°. J. A. GROTHE, Secretaris van het historisch Genootschap te Utrecht, Februari 1889; 2°. J. BRANDES, Weltevreden, 13 Februari 1889; 3°. M. BERTHELOT, Parijs 1889; 4°. LAUBMANN, Directeur van de kön. Hof- und Staatsbibliothek te München, 4 Januari 1889; 5°. A. C. DROLSUM, Bibliothecaris van de Université royale de Norvège te Chris-

tiania, 9 Mei 1888; 6°. den Secretaris van de Société impériale des Naturalistes te Moscou, 4 Maart 1889; 7°. A. LIVERSIDGE, Secretaris van de royal Society of N. S. Wales te Sydney, 10 Januari 1889; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1°. het Ministerie van Binnenlandsche Zaken te 's Gravenhage, 15 Februari 1889; 2°. het Ministerie van Buitenlandsche Zaken te 's Gravenhage, 13 Maart 1889; 3°. J. W. R. TILANUS, Secretaris van het Genootschap voor Natuur-, Genees- en Heelkunde te Amsterdam, 18 Maart 1889; 4°. A. D. VAN RIEMSDIJK, Utrecht 20 Maart 1889; 5°. DE MILLOUÉ, Directeur van het Musée Guimet te Parijs, 1889; 6°. L. J. LÉGER, Onder-Bibliothecaris van de Société Linnéenne de Normandie te Caen, 11 Januari 1889; 7°. M. GÜRKE, Bibliothecaris van het botanischer Verein der Provinz Brandenburg te Berlijn, 20 Maart 1889; 8°. A. AUWERS, Voorzitter van de Commission für die Beobachtung des Venus-Durchgangs, te Berlijn, Februari 1889; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behooren:

1°. Kennisgeving van Mevr. de Wed. DONDERS—HUBRECHT van het overlijden van haar echtgenoot, wijlen Dr. F. C. DONDERS, lid der Akademie. — De Voorzitter vindt hierin aanleiding, een woord van warme hulde te wijden aan den grooten geleerde en roemvollen burger van Nederland, die 17 achtereenvolgende jaren als Voorzitter der Akademie werkzaam was en haren glans verhoogde. Zoo veelzijdig als DONDER's verdiensten waren op het gebied der wetenschap, zoo menigvuldig ook waren de altijd belangrijke mededeelingen, waarmede hij de zittingen van het hoogste wetenschappelijk lichaam van ons vaderland opluisterde. De naam van DONDERS zal bij het dankbare nageslacht steeds met hooge onderscheiding genoemd worden, en zijn beeld, als dat van een voortreffelijk dienaar der wetenschap en

edel menschenvriend, onverflauwd in de herinnering blijven voortbestaan van allen, en zeer zeker van alle leden der Akademie, die het voorrecht mochten genieten, met den overledene door banden van vriendschap of genegenheid verbonden te zijn geweest.

2^0. Kennisgevingen van het overlijden van de Voorzitters der Akademiën van Wetenschappen van Toskane en Turijn, Giuseppe Meneghini en Angelo Genocchi.

3^0. Een brief van Z. E. den Minister van Waterstaat, Handel en Nijverheid, ter begeleiding van eene brochure van den Heer B. P. Moors te 's Gravenhage, gewijd aan de beschrijving van een door hem uitgevonden natten gasmeter met standvastig watervlak.

4^0. Eene missive van den Correspondent der Afdeeling, den Heer J. T. van der Stok te Batavia, ter begeleiding van eene verhandeling voor de Verslagen en Mededeelingen, getiteld: Harmonische analyse der getijden in de Java Zee.

5^0. Eene mededeeling van den Heer Mac Gillavry, dat hij verhinderd werd de vergadering bij te wonen.

— De Heeren Schoute en Bierens de Haan brengen een gunstig rapport uit over het opstel van den Heer Cardinaal en stellen voor, het te bestemmen voor de Verslagen en Mededeelingen. — Aldus wordt besloten.

— De Heer Kamerlingh Onnes leest het 2de en laatste gedeelte van het levensbericht van wijlen het lid der Akademie R. A. Mees, en ontvangt, bij monde van den Voorzitter, den dank der Afdeeling voor de door hem zoo wél volbrachte taak. Het levensbericht zal in het Jaarboek voor 1888 worden opgenomen.

— De Heer Forster deelt de uitkomst mede van eenige proeven, in zijn laboratorium genomen door den Heer Hunder Stewart en Fraser Ewman, over het voorkomen van bacteriën in het darmkanaal. De eerste vond dat gewone, en de laatste dat typhoide bacteriën, met spijzen in de maag gekomen, later slechts in het laagste gedeelte der dunne en verder

in de dikke darmen terug te vinden zijn. Gewone bacteriën hebben dus geen invloed op het spijsverteeringsproces

— De Heer SCHOUTE bespreekt het teeken van den covariant van HESSE, die bij een gegeven vorm behoort. Met behulp van bekende eigenschappen der poolstelsels en van eenvoudige beschouwingen omtrent bestaanbaarheid toont hij aan, dat deze covariant het negatieve teeken heeft voor die waarden der veranderlijke, die den gegeven vorm nul maken. In het kort is zijn gedachtengang in de volgende woorden samen te vatten.

Zijn de punten A_1, $A_2 \ldots . A_n$ eener willekeurige lijn l de wortelpunten van de vergelijking, die door het nul stellen van den gegeven binairen vorm f verkregen wordt, dan is het eerste poolstelsel van een willekeurig punt P van l als pool met betrekking tot het stelsel der punten A bepaald door de voorwaarde $\sum_1^n \frac{P A_i}{X A_i} = 0$, terwijl men door van deze $n-1$ punten X als stelsel van gegeven punten uit te gaan tot hoogere poolstelsels opklimmen kan.

Zijn de wortels van de vergelijking $f = 0$ en dus ook de punten A bestaanbaar en verschillend, dan is dit ook het geval met de $n-1$ punten X van elk eerste poolstelsel. Wordt nl. de lijn l door de in volgorde genomen punten A verdeeld in de n segmenten

$$A_1 A_2 = s_1, A_2 A_3 = s_2, \ldots . A_{n-1} A_n = s_{n-1}, A_n \infty A_1 = s_n ,$$

waarvan het laatste het oneindig ver gelegen punt insluit, dan zal elk dier segmenten een der punten X bevatten, uitgenomen het segment, waarop de pool ligt. Want de vorm

$$\sum_{i=1}^{i=n} P A_i \,.\, X A_1 \,.\, X A_2 \ldots . X A_{i-1} \,.\, X A_i \ldots . X A_n,$$

dien men verkrijgt door het eerste lid der voorwaardevergelijking met het product der noemers $X A_i$ te vermenigvuldigen, herleidt zich, als men voor X achtereenvolgens de uiteinden A_j en A_{j+1} van het segment s_j in de plaats stelt, tot de enkele termen

$$PA_j . \quad A_j A_1 . \; A_j A_2 \ldots \; A_j A_{j-1} . A_j A_{j+1} . \; A_j A_{i+1} \ldots \; A_j A_{ni}$$
$$PA_{j+1} . A_{j+1} A_1 . A_{j+1} A_2 \ldots A_{j+1} A_{j-1} . A_{j+1} A_j . A_{j+1} A_{j+2} \ldots A_{j+1} A_n .$$

En deze twee termen hebben tegengestelde teekens als $P\,A$, en $P\,A_{j+1}$ hetzelfde teeken hebben en P dus niet op s_j ligt, omdat ze de tegengestelde factoren $A_j\,A_{j+1}$ en $A_{j+1}\,A_j$ bevatten en de overige overeenkomstige factoren $A_j\;A_k$ en $A_{j+1}\;A_k$ in beide hetzelfde teeken hebben. Dus wordt de bedoelde vorm nul voor een tusschen A_j en A_{j+1} gelegen punt. Zoo blijkt, dat alle segmenten s_j een punt X bevatten, uitgenomen het segment waarop P ligt. En valt P met een der punten A samen, dan maakt dit punt A deel uit van het eerste poolstelsel en zijn de $n-2$ andere punten gelijkelijk verdeeld over de $n-2$ segmenten s, waarvan dit punt A geen grenspunt is.

Uit bovenstaande stelling, die de projectivische uitbreiding vormt van het bekende theorema van Rolle, volgt onmiddellijk, dat een puntstelsel A van louter bestaanbare en van elkaar verschillende punten geen eerste poolstelsel toelaat, waarvan twee punten samenvallen. En dit bewijst dan verder, dat er geen tweede, geen derde . . . geen $n-2^{de}$ poolstelsel met twee samenvallende punten te vinden is.

Onder den covariant van Hesse, die bij f behoort, verstaat men den van de coëfficienten van f afhangenden vorm, die nul gesteld de punten doet kennen, waarvan de $n-2^{de}$ poolstelsels, d. w. z. de poolpuntenparen, uit dubbelgetelde punten bestaan. Er is dus bewezen, dat bij een binairen vorm f met louter bestaanbare en verschillende wortels een covariant van Hesse behoort, die nul gesteld een vergelijking met louter onbestaanbare wortels oplevert; deze vorm φ kan dus niet van teeken veranderen als de veranderlijke achtereenvolgens alle mogelijke waarden doorloopt. Het teeken van dien vorm, dat van diens nadere bepaling afhankelijk is, mag voorloopig het *oorspronkelijke* heeten.

Onderstelt men, dat de coëfficienten van f een vloeiende verandering ondergaan en deze vorm hierdoor geleidelijk overgaat in een anderen vorm f' met paren onbestaanbare wortels, dan kan men zonder aan de algemeenheid te kort te doen aan deze verandering twee beperkingen stellen. Men

kan eerstens aannemen, dat daarbij het gelijk worden van twee bestaanbare wortels deze bij voortzetting van het proces onmiddellijk onbestaanbaar doet worden en omgekeerd onbestaanbare wortels niet weer tot den bestaanbaren toestand terugkeeren. En ten tweede kan men er zorg voor dragen, dat f niet door een tusschentoestand passeert, waarbij het punt, waarvoor φ oneindig wordt, er deel van uitmaakt. Het bewijs, dat deze beide beperkende voorwaarden de algemeenheid niet schaden, volgt onmiddellijk uit de voorstelling der onbestaanbare punten eener lijn in het platte vlak.

Gaat φ in den loop van het aangeduide proces in φ' over, dan kan bewezen worden, dat φ' voor de waarden der veranderlijke, die met de bestaanbare wortels van f' overeenkomen, het oorspronkelijke teeken heeft behouden. Is nl. A'_k een bestaanbaar punt van f', dan moet dit zich geleidelijk uit een punt A_k van f hebben ontwikkeld. En had nu φ' in A'_k het tegengestelde teeken, dan zou de overgang van φ in A_k tot φ' in A'_k door nul heen hebben moeten plaats vinden, omdat de overgang door het oneindige is uitgesloten. Bij den overgang van A_k tot A'_k zou dan een tusschenstand A''_k gepasseerd zijn, waarvoor de waarde van den overeenkomstigen vorm φ'' nul is. Maar dan heeft volgens de bepaling van den covariant van Hesse het punt A''_k met betrekking tot den overeenkomstigen vorm f'' een dubbelgeteld punt tot poolpuntenpaar. En dan moet dit dubbel te tellen punt met A''_k samenvallen, omdat elk poolstelsel van een punt A''_k van het gegeven puntstelsel f'' — en dus ook het $n-2^{de}$ poolstelsel — dit punt A''_k zelf bevatten moet. Wijl nu eindelijk het punt A''_k alleen dan tweemaal behoort tot het $n-2^{de}$ poolstelsel van dit punt, als f'' het punt A''_k tweemaal bevat — in welk geval het ook tweemaal deel uitmaakt van elk der voorgaande poolstelsels van dit punt, — zoo is A''_k een stand van A_k, waarbij dit punt zich met een der andere punten van het stelsel vereenigd heeft, om bij voortzetting van het proces onmiddellijk onbestaanbaar te worden. Dus sluit de onderstelling, dat A'_k bestaanbaar is, den tusschenstand

A''_k uit en heeft φ' in A'_k nog altijd het oorspronkelijke teeken.

Uit het bovenstaande volgt, dat de covariant van Hesse alleen dan voor alle waarden der veranderlijke het tegengestelde teeken hebben kan, als alle wortels van f onbestaanbaar zijn; dit kan dus alleen voorkomen bij een vorm f van even graad.

Wil men eindelijk weten, welk teeken boven het oorspronkelijke genoemd is, dan moet men den covariant φ nader bepalen. Is f een binaire vorm in x_1 en x_2, dan verstaat men er den determinant $\frac{d^2 f}{d x_1^2} \cdot \frac{d^2 f}{d x_2^2} - \left(\frac{d^2 f}{d x_1 \, d x_2}\right)^2$ der tweede differentiaalquotienten onder. In het bijzondere geval $f = x_1 F$, waarbij F weer homogeen in x_1 en x_2 is, is de waarde van φ voor het punt $x_1 = 0$ door een negatief vierkant, nl. $-\left(\frac{d F}{d x_2}\right)^2$ voorgesteld en dus steeds negatief. Bij de algemeen aangenomen bepaling van φ is het oorspronkelijke teeken dus het negatieve, zoowel voor even als oneven n.

De hier verkregen uitkomst omtrent het teeken van φ in de bestaanbare wortelpunten van f is een uitbreiding van een langs geheel anderen weg door Dr. F. Gerbaldi uit Rome bewezen stelling (*Rendiconti del circolo matematico di Palermo*, deel III, blz. 22).

— De Heer J. A. C. Oudemans doet eene mededeeling over den tegenwoordigen stand der onderzoekingen betreffende de afstanden der vaste sterren tot het zonnestelsel. Die afstanden worden, zoo als bekend is, gevonden door de bepaling der jaarlijksche parallaxis. Van slechts 39 sterren kan men zeggen dat het bedrag dier parallaxis met eenige nauwkeurigheid bepaald is; gedeeltelijk zijn dat zeer heldere sterren, gedeeltelijk sterren met eene groote eigene beweging. Spreker vermeldde dat als men deze sterren naar

de helderheid rangschikte, men geen verband hoegenaamd tusschen deze en de parallaxis vond; eene rangschikking naar de eigene beweging geeft het eigenaardig resultaat, dat de parallaxis slechts zeer langzaam met de eigene beweging vermindert.

De bedoelde 39 sterren in 6 groepen verdeelende, en uit de grootten, eigene bewegingen en parallaxen van elke groep het arithmetisch midden nemende, verkrijgt spreker de volgende getallen:

	Gemiddelde grootte.	Gemiddelde eigene beweging.	Gemiddelde Parallaxis.	Aantal sterren.
1e groep	6.3	5″.3	0″.27	7
2e »	4.7	2 .95	0 .25	7
3e »	4.2	1 .5	0 .23	7
4e »	3.1	0 .8	0 .20	6
5e »	1.2	0 .33	0 .17	6
6e »	2.1	0 .03	0 .055	6

Er is hier wel, bij afnemende eigene beweging, ook eene afnemende parallaxis te bespeuren, maar evenredigheid bestaat er niet, en men moet hieruit dus dit resultaat trekken, dat de sterren met de grootste eigene bewegingen deze over het algemeen aan werkelijke snelheid te danken hebben.

Spreker wijst nog op eene bijzonderheid, waarop reeds dikwijls de aandacht gevallen is, dat nl. de sterkste eigene bewegingen aan betrekkelijk zwakke sterren behooren. Door velen wordt dit een vreemd verschijnsel gevonden, doch naar sprekers oordeel niet met het volle recht, omdat men ook moet letten op het gering aantal heldere tegen het groot aantal minder heldere sterren. Heis telde b. v. aan den te Munster zichtbaren hemel, dus van de noordpool tot ongeveer 34° zuider-declinatie: 61 sterren van de eerste en tweede grootte, maar 3974 sterren van de 6e grootte; en Argelander bepaalde in zijne *Durchmusterung*, die zich tot 1° bezuiden den equator uitstrekte, 324198 sterren. Selliger, te Munchen, heeft de sterren der Bonner Durchmusterung, zoowel der noordelijke als der zuidelijke, laten aftellen, daarbij den hemel verdeelende

in vakken, die eene breedte hadden van 5° of 20^{m} Rechte klimming en een hoogte van 5° declinatie en daarbij lettende op de verschillende grootten; (*Sitzungsberichte der math. phys. Classe der Kön. bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München*, 8 Nov. 1884 en 3 Juli 1886); van hem de getallen overnemende, doch slechts heele grootteklassen aannemende, vinden wij, uit zijne beide mededeelingen, voor het gedeelte van den hemel, tusschen de noordpool en de parallel van — 23°,

Sterren van de 1e, tot en met de 6e grootte	5385
» » » 7e grootte.	13045
» » » 8e »	45183
» » » 9e »	341023

Men ziet dus, dat reeds de sterren der 7e grootte met tienduizenden aan den hemel zijn, en er dus voor zulk eene ster veel meer kans is, in een of ander bepaald opzicht eene uitzondering te maken, dan voor de sterren van de eerste of tweede grootte, die slechts ten getale van enkele tientallen aan den hemel zijn; en in nog hoogere mate is dit voor de sterren der volgende grootten van kracht.

— De Voorzitter stelt voor, de vergadering der afdeeling in plaats van op 26 April te doen plaats hebben op 20 April, omdat eerstgenoemde datum samenvalt met een der beide dagen van het te Leiden te houden 2de natuur- en geneeskundig Congres. — Aldus wordt besloten.

— Voor de boekerij der Akademie worden aangeboden, 1°. door den Heer Buys-Ballot: Onweders in »Nederland" naar vrijwillige waarnemingen in 1888; deel IX, bewerkt door den Heer Engelenburg, en 2°. door den Heer Martin een brochure, getiteld: »Het eiland Urk, benevens eenige algemeene beschouwingen over de geologie van Nederland".

— Daar er verder niets te verhandelen is, wordt de Vergadering gesloten.

VERSLAG

OVER DE VERHANDELING

VAN DEN HEER **J. CARDINAAL.**

„HET CONSTRUEEREN VAN GEBOGEN OPPERVLAKKEN DOOR MIDDEL VAN VLAKKE DOORSNEDEN."

(Uitgebracht in de Vergadering van 30 Maart 1889.)

De verhandeling van den Heer CARDINAAL, die het bovenstaande opschrift draagt, is een vervolg op de verhandeling van denzelfden schrijver, over welke wij in de November-vergadering van het vorige jaar een gunstig rapport hebben uitgebracht, Zij is ontstaan uit de begeerte een toen door ons aangewezen leemte aan te vullen en brengt ons het constantenaantal van elk der daar behandelde soorten van oppervlakken.

Aan de bepaling der bedoelde getallen laat de schrijver het onderzoek voorafgaan naar de wijze, waarop een algemeen oppervlak van den n^{den} graad door vlakke doorsneden kan worden bepaald. Daarbij blijkt, dat deze bepaling de kennis van n vlakke doorsneden en een buiten deze gelegen punt van het oppervlak vereischt. En op zijn beurt hangt het aantal der punten, die een vlakke doorsnee doen kennen, van het aantal der reeds bekende vlakke doorsneden af. Terwijl de eerste vlakke doorsnee bepaald is door $\frac{1}{2}\, n\, (n+3)$ punten, wordt de p^{de} door $\frac{1}{2}\, (n-p+2)\, (n-p+3)$ nieuwe punten bepaald en verkrijgt men dus in deze getallen de termen eener rekenkundige reeks van de tweede orde, als

men het op zich zelf staande punt bij de $\frac{1}{2} n (n + 3)$ punten van de eerste vlakke doorsnee telt. Van deze reeks stemt de som behoorlijk overeen met het bekende aantal $\frac{1}{6} (n + 1) (n + 2) (n + 3) - 1$ der punten, die een oppervlak van den n^{den} graad bepalen.

Vervolgens wijst de Heer CARDINAAL de vereenvoudigingen aan, die zich voordoen als het te bepalen oppervlak een scheef oppervlak is. Dan is vooreest het aantal punten, dat elk der vlakke doorsneden bepaalt, minder dan boven is opgegeven, omdat elk scheef oppervlak van den n^{den} graad een dubbelkromme heeft minstens van den n—2^{den} graad. Ten tweede is het aantal vlakke doorsneden, dat men kennen moet, nu niet n maar hoogstens drie, omdat drie richtkrommen de beweging der beschrijvende lijn geleiden. En ten derde kan de bekende constructie van het oppervlak dit aantal in sommige gevallen nog meer doen afnemen. Het eerstgenoemde dezer drie punten wordt nader uitgewerkt met betrekking tot de vlakke krommen van den vierden graad.

Ten slotte gaat de schrijver over tot de toepassing op de scheeve oppervlakken van den vierden graad. In verband met de vroeger door hem gevonden constructie dier oppervlakken blijkt dan, dat men hier volstaan kan met het aannemen van een enkele vlakke doorsnee en van de punten der dubbelkromme gelegen in een tweede vlak. Dit voert dan onmiddellijk tot de verlangde uitkomsten, die op een eenvoudige wijs blijken samen te hangen met de door SALMON langs analytischen weg verkregene vergelijkingen der oppervlakken.

Het komt ons voor, dat deze tweede verhandeling van den Heer CARDINAAL een belangrijke aanvulling vormt van de eerste. We hebben dus de eer U voor te stellen haar in de Verslagen en Mededeelingen op te nemen.

Groningen en *Leiden*, — P. H. SCHOUTE.
22 Maart. — D. BIERENS DE HAAN.

HET CONSTRUEEREN

VAN

GEBOGEN OPPERVLAKKEN DOOR MIDDEL VAN VLAKKE DOORSNEDEN.

DOOR

J. CARDINAAL.

1. Het doel van deze verhandeling is het bepalen van het aantal voorwaarden, vereischt om een gebogen oppervlak te construeeren door opvolgende vlakke doorsneden, en het maken eener bijzondere toepassing van de gevonden methode op de scheeve oppervlakken van de vierde orde. Daardoor sluit zij zich bij de vroegere verhandeling over de meetkundige theorie van de scheeve oppervlakken van de vierde orde aan.

2. Zooals bekend is, is het construeeren van oppervlakken door aanname van een voldoend aantal geheel willekeurige punten zeer bezwaarlijk. Reeds het construeeren van een oppervlak van den tweeden graad door aanname van 9 zoodanige punten is zeer ingewikkeld, alhoewel lineair uitvoerbaar. Het kan daarom van belang zijn, na te gaan, hoeveel willekeurige punten men aan moet nemen, om de constructie van een gebogen oppervlak onder die vereenvoudigde aanname te volvoeren. Dit vraagstuk splitst zich blijkbaar in twee onderdeelen t. w.

a. Hoeveel vlakke doorsneden moet men van een gebogen oppervlak kennen, opdat het geheel bepaald zij.

b. Hoeveel punten moet men van elke doorsnede aannemen, opdat deze doorsnede bepaald zij.

Hierbij wordt bekend ondersteld, dat het aantal willekeurig gelegen punten, noodig ter bepaling eener vlakke

kromme van de n^{de} orde zonder bijzondere punten gelijk is aan:

$$\frac{1}{2}(n+2)(n+1)-1.$$

Van het oppervlak wordt verder ondersteld, dat het geene dubbelpunten of dubbelkrommen bezit, zoodat geene der vlakke doorsneden bijzondere punten heeft.

3. *a.* Ter bepaling van een oppervlak van de n^{de} orde O^n is het noodzakelijk en voldoende, dat $n+1$ vlakke doorsneden volkomen bekend zijn.

Men stelle namelijk, dat n vlakke doorsneden van O volkomen bekend zijn. Men legge verder een snijvlak α_{n+1}; dit vlak snijdt elk der n doorsneden in n punten, gelegen op de n rechte lijnen, volgens welke de opvolgende snijvlakken $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots, \alpha^n$ door α_{n+1} gesneden worden; van de doorsnede c^n_{n+1}, in α_{n+1} gelegen, zijn dus n^2 punten bekend, 't geen voor $n > 3$ meer is dan het vereischte aantal. Deze n lijnen, als een geheel beschouwd, vormen evenwel een bijzonder geval van eene kromme van de n^{de} orde; c^n_{n+1} is dus door deze n^2 punten onvolledig bepaald; de punten zijn de basispunten van een' bundel krommen van de n^{de} orde; eerst wanneer men nog een punt P aanneemt, wordt c^n_{n+1} volkomen bekend. Laat men het vlak α_{n+1} door P bewegen, dan zal, voor elken stand van α_{n+1}, er op dezelfde wijze eene doorsnede construeerbaar zijn; het oppervlak O^n wordt dus nu volledig bekend. Hieruit volgt de vooropgezette stelling.

4. *b.* Bij het bepalen van het aantal punten, noodig ter constructie van de opvolgende vlakke doorsneden, moeten de volgende regels in het oog worden gehouden.

Alleen de eerste doorsnede $c_1{}^n$ is gegeven door

$$\frac{1}{2}(n+2)(n+1)-1$$

punten. Voor de volgende doorsneden ondergaat het aantal punten, dat men aannemen kan, eene vermindering als gevolg van het feit, dat een snijvlak elk der voorgaande krommen in n punten snijdt.

Bij de constructie van de doorsnede c^n_p in α_p moet men rekening houden met de mogelijkheid, dat, bij aanname van

$\frac{1}{2}(n+2)(n+1)-1-(p-1)n$ punten, er, in plaats van eene kromme c_p^n van de n^{de} orde, twee krommen van lagere orde zouden kunnen geconstrueerd worden.

De laatste opmerking voert tot de volgende onderzoeking. Heeft men α_p gelegd, dan ontstaan er in α_p een aantal rechte lijnen $= p-1$; alzoo kan men beginnen met aan te nemen:

$$\frac{1}{2}(n+2)(n+1)-1-(p-1)n \text{ punten.}$$

Van deze punten moet nu worden nagegaan, of er eene kromme van de orde $n-p+1$ door gebracht kan worden. Het aantal hiertoe vereischte punten is:

$$\frac{1}{2}(n-p+3)(n-p+2)-1.$$

Het eerste aantal kan door omschrijving met het laatste vergeleken worden; men heeft nl.:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(n+2)(n+1)-1-(p-1)n &= \tfrac{1}{2}(n^2+5n-2pn) = \\ \tfrac{1}{2}\{(n-p)^2+5(n-p)+6-(p-3)(p-2)\} &= \\ &= \tfrac{1}{2}(n-p+3)(n-p+2)-\tfrac{1}{2}(p-2)(p-3).\end{aligned}$$

Wanneer $\frac{1}{2}(p-2)(p-3) >= 1$ is zal men door het aannemen van $\frac{1}{2}(n+2)(n+1)-1-(p-1)n$ punten de kromme c_p^n dus niet volkomen bepalen. Hieruit volgt:

Wanneer men een gebogen oppervlak O^n door vlakke doorsneden wil construeeren, dan kan men in de eerste drie doorsneden een aantal punten aannemen overeenkomende met:

$$\begin{gathered}\tfrac{1}{2}(n+2)(n+1)-1 \\ \tfrac{1}{2}(n+2)(n+1)-1-n \\ \tfrac{1}{2}(n+2)(n+1)-1-2n.\end{gathered}$$

Bij de volgende doorsneden zal evenwel dit aantal punten niet voldoende zijn om de doorsnede te bepalen. Men zal dus dienen na te gaan, hoeveel punten men aan moet nemen in de p^{de} doorsnede, wanneer $p > 3$ en $< n+1$ is.

Uit het voorgaande blijkt, dat men een bundel krommen van de n^{de} orde in α_p kan construeeren, zoolang men slechts $\frac{1}{2}(n-p+3)(n-p+2)-1$ punten heeft. Neemt men

nog één punt daarbij aan, dan wordt eene kromme van den bundel bepaald, hieruit volgt:

Het totaal aantal toe te voegen punten in het p^{de} snijvlak bedraagt $\frac{1}{2}(n-p+3)(n-p+2)$.

Daar $p > 3$ is, zal men slechts de eerste drie vlakke doorsneden afzonderlijk hebben te beschouwen.

In het vlak α_1 neemt men aan:

$$\tfrac{1}{2}(n+2)(n+1)-1 \text{ punten.}$$

In het vlak α_2 neemt men aan:

$$\tfrac{1}{2}(n+2)(n+1)-1-n=\tfrac{1}{2}(n+1)\,n \text{ punten.}$$

In het vlak α_3 neemt men aan:

$$\tfrac{1}{2}(n+2)(n+1)-1-2n=\tfrac{1}{2}\,n(n-1) \text{ punten.}$$

Daar voor $\alpha_4 \ldots . \alpha_{n+1}$ het aantal punten door de boven gevonden betrekking aangeduid wordt, kan men de volgende tabel opstellen:

Snijvlak.	Aantal punten.
α_1	$\frac{1}{2}(n+2)(n+1)-1$
α_2	$\frac{1}{2}(n+1)\,n$
α_3	$\frac{1}{2}\,n(n-1)$
α_4	$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$
|	|
α_p	$\frac{1}{2}(n-p+3)(n-p+2)$
|	|
α_n	$\frac{1}{2}\times 3\times 2$
α_{n+1}	$\frac{1}{2}\times 2\times 1$

5. Door optelling kan men het geheel aantal punten bepalen, noodig ter constructie van het oppervlak. Daartoe schrijve men de gevondene getallen aldus:

$$N(n)=\tfrac{1}{2}\{1.2+2.3+\ldots(n-p+3)(n-p+2)\ldots(n-1)(n-2)+ n(n-1)+(n+1)n+(n+2)(n+1)\}-1$$

als n oneven is kan men hiervoor schrijven:

$$N(n)=\tfrac{1}{2}\{2.\ 2^2+2.\ 4^2+2.\ 6^2+\ldots 2(n-3)^2+ +2(n-1)^2+2(n+1)^2\}-1$$

$$N(n)=2^2+4^2+6^2+\ldots(n-3)^2+(n-1)^2+(n+1)^2-1.$$

Deze reeks is eene rekenkundige reeks van de tweede orde de som harer termen is dus, daar zij $\frac{1}{2}(n+1)$ termen heeft

$$N(n) = \frac{\frac{1}{2}(n+1)}{1.} \cdot 2^2 + \frac{\frac{1}{2}(n+1) \cdot \frac{1}{2}(n-1)}{1. \quad 2.} \cdot 12 +$$
$$+ \frac{\frac{1}{2}(n+1) \cdot \frac{1}{2}(n-1) \cdot \frac{1}{2}(n-3)}{1. \quad 2. \quad 3.} \cdot 8 - 1.$$

Herleidende:

$$N(n) = \tfrac{1}{6}(n+1)\{12 + 9(n-1) + (n-1)(n-3)\} - 1 =$$
$$= \tfrac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3) - 1.$$

Als n even is wordt de som:

$$N(n) = 2^2 + 4^4 + 6^2 + \ldots (n-2)^2 + n^2 + \tfrac{1}{2}(n+2)(n+1) - 1$$
$$N(n) = \tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2) + \tfrac{1}{2}(n+2)(n+1) - 1 =$$
$$= \tfrac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3) - 1.$$

Men ziet dus, dat in beide gevallen het gevonden aantal een minder is dan het aantal termen van de algemeene homogene vergelijking van den n^{den} graad met vier veranderlijken, zooals volgens de analytische meetkunde dan ook het geval moet zijn.

Berekent men op deze wijze het aantal punten noodig ter constructie van oppervlakken van de orde 1 tot 6, dan verkrijgt men de onderstaande uitkomsten:

Orde.	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	Totaal.
1	2	1						3
2	5	3	1					9
3	9	6	3	1				19
4	14	10	6	3	1			34
5	20	15	10	6	3	1		55
6	27	21	15	10	6	3	1	83

6. Bovenstaande lijst geeft aan, hoeveel doorsneden men moet construeeren en hoeveel punten in elke doorsnede aannemen, wanneer een algemeen oppervlak van de n^{de} orde moet worden geconstrueerd. Zoodra men scheeve oppervlakken heeft te construeeren, treden evenwel vereenvoudigingen in. Deze zijn:

a. Bij elke doorsnede wordt het aantal punten, noodig tot hare constructie, met een zeker aantal verminderd, ten gevolge van het feit, dat de doorsnede dubbelpunten of een drievoudig punt bezit.

b. Het oppervlak is volkomen construeerbaar, zoodra men, door middel van vlakke doorsneden, zooveel elementen heeft bepaald, dat de beweging, die de beschrijvende lijnen moeten maken om het oppervlak te doen ontstaan, volkomen bepaald is. De vraag wordt dus nu, hoeveel punten er noodig zijn, om tot de richtlijnen te geraken.

7. Alvorens over te gaan tot de bepaling van het aantal punten, vereischt om een scheef oppervlak van de vierde orde door middel van vlakke doorsneden te construeeren, is het wenschelijk eenige beginselen voorop te stellen, die bij het construeeren van krommen van de vierde orde toegepast zullen worden. Deze zijn:

a. Een algemeene kromme van de vierde orde is bepaald door 14 punten. Het aantal aan te nemen punten ondergaat eene vermindering, wanneer de kromme bijzondere punten bezit, en wel op de volgende wijze.

Bezit de kromme een dubbelpunt, dan is zij door 13 punten bepaald; de 14de voorwaarde wordt dan niet gegeven in den vorm van een punt, maar in dien van den eisch, dat de kromme een dubbelpunt bezitten moet. Deze bepaling laat evenwel de mogelijkheid toe, dat er meerdere krommen met dubbelpunten door het gegeven aantal gelegd kunnen worden; bij eene kromme van de vierde orde met dubbelpunt bedraagt dit aantal 27 *).

---

*) Dit getal, zoowel als de volgende zijn ontleend aan Dr. H. Schubert, *Kalkül der abzählenden Geometrie.* (Leipzig 1879) § 26 pag. 184—187.

Zoo zal eene kromme van de vierde orde met 2 dubbelpunten bepaald zijn door 12 punten, eene met drie dubbelpunten door 11 punten; in het eerste geval kunnen er 225, in het tweede 620 van de gevraagde krommen door heen gelegd worden.

b. Wanneer eene kromme van de vierde orde een drievoudig punt bezit, dan is zij door 10 punten bepaald. Het drievoudig punt stelt, behalve het aanwezig zijn, van drie dubbelpunten, nog den eisch, dat deze een oneindig kleinen driehoek vormen.

Door deze 10 punten kan men 60 zoodanige krommen van de vierde orde leggen.

c. Wanneer eene kromme van de vierde orde een dubbelknoop bezitten moet, is zij door 11 punten bepaald. De dubbelknoop stelt, behalve het aanwezig zijn van twee dubbelpunten, nog den eisch, dat deze te zamenvallen, zoodat het aantal bepalende punten met drie verminderd wordt.

d. Daar bij scheeve oppervlakken de vlakke doorsnede steeds bijzondere punten heeft, zoo is het noodig na te gaan, met hoeveel voorwaarden het aannemen van dubbele of drievoudige punten gelijkstaat.

Laat van eene kromme van de vierde orde vooraf niet bekend zijn, dat zij bijzondere punten heeft. Neemt men nu een dubbelpunt aan, dan bepaalt men: 1°. de bijzonderheid, dat er een dubbelpunt is, 2°. twee samenvallende punten; alzoo blijven er nog 11 willekeurig aan te nemen punten over.

Onder dezelfde voorwaarde staat een dubbelknoop gelijk met 5 niet bijzondere punten. Men denke, om dit toe te lichten, dat men twee dubbelpunten heeft aangenomen; volgens het voorgaande vertegenwoordigen deze 6 voorwaarden; daarmede is tevens de verbindingslijn dier beide punteu gegeven. Gaan de beide dubbelpunten over in een dubbelknoop, dan wordt deze verbindingslijn de raaklijn aan dit bijzondere punt; een dubbelknoop met raaklijn vertegenwoordigt alzoo 6, een dubbelknoop alleen 5 voorwaarden. Op dezelfde wijze vertegenwoordigt een drievoudig punt 6 punten. Om ook dit toe te lichten, denke men zich drie dubbelpunten aangenomen; deze staan gelijk met 9 voor-

waarden; de verbindingslijnen dezer drie punten zijn dan tevens bekend. Vallen de drie dubbelpunten tot een drievoudig punt te zamen, dan worden de verbindingslijnen de drie raaklijnen; een drievoudig punt met zijne drie raaklijnen staat dus gelijk met 9 voorwaarden; voor het drievoudig punt zelf blijven er alzoo 6 over.

e. Is evenwel van eene kromme vooraf bekend, dat zij een of meer bijzondere punten heeft, dan vertegenwoordigt elk bijzonder punt een aantal punten, gelijk aan het voorgaande getal, verminderd met het aantal voorwaarden, besloten in het feit, dat de kromme de bijzondere punten bezit.

Zoo vertegenwoordigt in eene kromme met dubbelpunten elk dubbelpunt $3 - 1 = 2$ gegevens, dewijl, door het feit, dat de kromme dubbelpunten bezit, er voor elk dezer punten reeds ééne voorwaarde vastgesteld is; een dubbelknoop vertegenwoordigt om dezelfde reden $5 - 3 = 2$ voorwaarden en eveneens een drievoudig punt $6 - 4 = 2$ voorwaarden.

Ter nadere opheldering kan men de hier vooropgezette beginselen toetsen aan eene kromme van de vierde orde met vier dubbelpunten, welke, gelijk bekend is, in twee kegelsneden overgaat.

Daar de algemeene kromme van de vierde orde door 14 punten bepaald is, wordt het aantal bepalende punten $14 - 4 = 10$; twee kegelsneden zijn dus door 10 punten bepaald. Van deze kegelsneden vertegenwoordigt elk dubbelpunt (hier tevens snijpunt) 2 voorwaarden; twee kegelsneden zijn dus bepaald door de vier snijpunten en 2 niet bijzondere punten.

Bezit eene kromme van de vierde orde 2 dubbelpunten en een dubbelknoop, dan gaat zij over in twee kegelsneden, die elkander in een punt raken. Het aantal bepalende punten moet nu zijn $14 - 2 - 3 = 9$. De eerste kegelsnede wordt door 5 punten bepaald, de tweede door 4, daar zij aan de eerste raken moet. Neemt men de bijzondere punten aan, dan vertegenwoordigen het raakpunt en de snijpunten ieder 2 voorwaarden; er blijven dus nog 3 voorwaarden over. De eerste kegelsnede wordt geconstrueerd door de 3

bijzondere punten en 2 der andere punten, de tweede is bepaald door de drie bijzondere punten, de raaklijn aan het raakpunt van beide kegelsneden en het derde niet bijzondere punt.

Bezit eene kromme van de vierde orde 2 dubbelpunten en een drievoudig punt, dan gaat zij over in eene kegelsnede met twee elkaar snijdende lijnen, welker snijpunt in de kegelsnede gelegen is. Het aantal bepalende punten moet nu zijn: $14 - 2 - 4 = 8$. Door 4 der punten legt men de twee elkaar snijdende lijnen; de kegelsnede kan dan geconstrueerd worden door de 4 overige punten en het snijpunt der twee lijnen. Neemt men het drievoudig punt aan, dan blijven er nog 6 bepalende punten over; door vier punten en dit drievoudig punt kan men de kegelsnede leggen; de twee lijnen verkrijgt men door het drievoudig punt met de twee andere punten te verbinden. Het drievoudig punt telt dus als 2 voorwaarden.

8. Alsnu overgaande tot de scheeve oppervlakken van de vierde orde, trachte men op te sporen het aantal punten, in vlakke doorsneden gelegen, vereischt tot de constructie van ieder dezer oppervlakken en verdeele dit groepsgewijze, overeenkomstig de indeeling bij de aangehaalde verhandeling.

Eerste groep, geval *A*. Het eerste snijvlak α_1 snijdt het scheeve oppervlak R^4 in eene kromme van de vierde orde $c_1{}^4$ met twee dubbelpunten; zij is dus bepaald door 12 punten (7 *a*). Men brenge nu het tweede snijvlak α_2 aan; dit heeft met $c_1{}^4$ gemeen vier punten, terwijl buitendien $c_2{}^4$ eveneens aan de voorwaarde voldoen moet twee dubbelpunten te bezitten. Neemt men deze aan, dan zal het oppervlak R^4 volkomen bepaald zijn. Men denke zich namelijk in α_1 de projectieve kegelsnedenbundels, die $c_1{}^4$ doen ontstaan, geconstrueerd; door elk dezer kegelsneden wordt met de beide nu bekende dubbellijnen een oppervlak der bundels oppervlakken van de tweede orde, die R^4 doen ontstaan bepaald; alle oppervlakken en dus ook R^4 worden alzoo bekend. De dubbelpunten vertegenwoordigen ieder twee voorwaarden (7 *e*) alzoo zijn er in het geheel aangenomen

$$12 + 2 + 2 = 16 \text{ punten.}$$

In plaats van de doorsnede c_2^4 in den hier aangegeven algemeenen stand aan te nemen, kan men aan α_2 ook bijzondere standen geven. Laten de dubbelpunten van c_1^4 D_1 en D_2 genoemd worden en zij α_2 door D_1 D_2 gebracht, dan zijn van c_2^4 de beide dubbelpunten bekend. Trekt men nu in α_2, zoowel door D_1 als door D_2, de beide raaklijnen der te construeeren kromme c_2^4, en legt men vlakken door een raaklijnenpaar, door eenzelfde punt in verschillende vlakken getrokken, dan zijn door de snijlijnen dier vlakken de dubbellijnen bepaald en hierdoor het geheele oppervlak. Deze vier raaklijnen voegen aan de eerste 12 voorwaarden 4 nieuwe toe; alzoo heeft men in het geheel 16 punten aangenomen.

9. Eerste Groep, geval *B*. Dit geval onderscheidt zich alleen van het voorgaande doordat, zoowel de doorsnede c_1^4 als c_2^4 twee toegevoegd imaginaire dubbelpunten heeft; zij worden gegeven als dubbelpunten van elliptische punteninvolutiën. Dit oppervlak wordt dus evenals het voorgaande door 16 punten bepaald.

10. Eerste Groep, geval *C*. Het vlak α_1 zal het oppervlak R^4 snijden in eene kromme c_1^4, welke een' dubbelknoop bezit; c_1^4 zal dus bepaald zijn door 11 punten (7*c*). Legt man α_2 op de boven beschreven eerste wijze, dan moet de nieuwe doorsnede c_2^4 wederom een' dubbelknoop bezitten; neemt men dezen aan, dan zijn er 2 nieuwe voorwaarden ingevoerd (7*e*) en de dubbele knooplijn d kan getrokken worden. Er moet nu worden nagegaan, hoeveel punten men van c_2^4 nog zal moeten aannemen opdat de twee projectieve oppervlakkenbundels, die R^4 doen ontstaan, bekend zijn. Men construeere daartoe de projectieve bundels kegelsneden, die c_1^4 doen ontstaan; deze beide bundels hebben als gemeenschappelijke basiselementen den dubbelknoop van c_1^4 en de raaklijn daaraan, de overige twee basispunten van den eersten bundel zijn willekeurig op c_1^4 te nemen; dit zelfde is nog het geval met het derde der basispunten van den tweeden bundel, terwijl het vierde door de overige drie bepaald wordt. Men onderstelle nu een paar homologe kegel-

sneden der bundels; deze snijden elkander in nog twee punten P en Q van c_1^4; ware c_2^4 geconstrueerd, dan moesten de oppervlakken van de tweede orde, tot welke de aangenomene kegelsneden behooren, α_2 snijden in twee kegelsneden, die elkander ontmoeten in twee punten P' en Q' van c_2^4, welke nog buitendien zoodanig gelegen moeten zijn, dat PP' en QQ' beiden de dubbelknooplijn ontmoeten. Men neme nu van c_2^4 aan de raaklijn t in den dubbelknoop en een punt A', legge een vlak β door d en A'; dit snijdt c_1^4 volgens twee punten A en B, die weder een punt B' van c_2^4 doen ontstaan. Men kieze nu B als een der basispunten van den eersten kegelsnedenbundel in α_1 en A' als een basispunt van den overeenkomstigen bundel in α_2, en legge eene kegelsnede c_1^2 in α_1; dan is de overeenkomstige kegelsnede c_2^2 in α_2 bepaald, want zij ligt met c_1^2 op een oppervlak van de tweede orde, bevattende c_1^2 als vlakke doorsnede, d als beschrijvende lijn, de raaklijn t als raaklijn en het punt A'. Met c_1^2 is in α_1 homoloog eene kegelsnede d_1^2 die haar in de punten P en Q van c_1^4 snijdt; het vlak $P\,d$ snijdt de overeenkomstige kegelsnede in α_2 in P', het vlak $Q\,d$ doet op dezelfde wijze het punt Q' ontstaan, en de met c_2^2 homologe kegelsnede is bepaald door P', Q', den dubbelknoop met de raaklijn t, terwijl zij met d_1^2 op een oppervlak van de tweede orde ligt. Daar dit bij elke kegelsnede herhaald kan worden, is c_2^4 dus door de aanname van t en A' volkomen bekend en insgelijks het oppervlak R^4. Het aantal aangenomen punten bedraagt dus:

$$11 + 2 + 1 + 1 = 15 \text{ punten.}$$

12. Tweede Groep, geval A. Het vlak α_1 snijdt het oppervlak R^4 volgens eene kromme c_1^4 van de vierde orde met drie dubbelpunten D_1, D_2, D_3. Deze kromme is dus bepaald door 11 punten.

Het vlak α_1 snijdt c_1^4 in vier punten; neemt men van de nieuwe kromme c_2^4 nog de drie dubbelpunten aan, dan is de dubbelkromme, welke eene scheeve kromme van de derde orde is bekend. Het oppervlak R^4 is nu bepaald, want de kegelsnedenbundels, die c_1^4 doen ontstaan hebben

als gemeenschappelijke basispunten D_1, D_2, D_3; met de geconstrueerde scheeve kromme van de derde orde bepaalt dus elke kegelsnede een oppervlak van de tweede orde en de oppervlakkenbundels zijn bekend. Daar elk der drie dubbelpunten van $c_2{}^4$ twee voorwaarden vertegenwoordigt, zoo heeft men in het geheel ter bepaling aangenomen:

$$11 + 3 \times 2 = 17 \text{ punten.}$$

Wil men aan α_2 een bijzonderen stand geven, dan kan men dit vlak leggen door $D_1 D_2$, en, even als dit bij de vorige groep geschied is, door D_1 zoowel als door D_2, twee raaklijnen in α_2 trekken. Wederom vlakken leggende door een raaklijnenpaar, door een zelfde punt in verschillende vlakken getrokken, worden de raaklijnen aan de dubbelkromme, door D_1 en D_2 gaande, bekend; de dubbelkromme, en daardoor R^4, wordt dus geheel bepaald, zoo men nog een dubbelpunt in α_2 aanneemt. Daar elk der raaklijnen weder eene voorwaarde vertegenwoordigt, heeft men als boven:

$$11 + 2 \times 2 + 2 = 17 \text{ punten.}$$

12. Tweede Groep, geval *B*. De doorsnede $c_1{}^4$ is als in geval *A* bepaald door 11 punten.

Van de kromme $c_2{}^4$ kan men 2 dubbelpunten willekeurig aannemen; het derde dubbelpunt moet evenwel aan de voorwaarde voldoen in één vlak te liggen met twee dubbelpunten van $c_1{}^4$ en een van $c_2{}^4$; het ligt dus in de snijlijn van dit vlak met α_2; hierdoor vertegenwoordigt dit derde dubbelpunt slechts ééne voorwaarde; het aantal aan te nemen punten bedraagt dus:

$$11 + 2 \times 2 + 1 = 16 \text{ punten.}$$

Om dit nog nader door bijzondere standen van α_2 op te helderen, onderstelle men, dat van de dubbelpunten D_1 en D_2 op de dubbelkegelsnede en D_3 op de dubbele rechte lijn liggen. Legt men dan in de eerste plaats α_2 door D_1 en D_3 en trekt men in α_2 de beide raaklijnen in elk dezer punten, dan worden, als vroeger, de raaklijnen

aan de dubbelkromme in D_1 en D_3 bekend. Daar D_3 evenwel op de dubbellijn d ligt, zoo is d zelve bekend; tevens is de raaklijn door D_1 der dubbelkegelsnede bepaald en daar D_2 een harer punten is, is haar vlak δ te construeeren. Van de dubbelkegelsnede is nu bekend D_1, de raaklijn door D_1, D_2 en het snijpunt van d met δ; het nog aan te nemen dubbelpunt van $c_2{}^4$ ligt in de snijlijn van α_2 met δ, en vertegenwoordigt eene voorwaarde; er zijn dus ook nu aangenomen:

$$11 + 2 \times 2 + 1 = 16 \text{ punten.}$$

Legt men, om nog een bijzonderen stand van α_2 te onderzoeken, dit vlak door $D_1\,D_2$, dan kan men in α_2 aan D_1 het raaklijnenpaar trekken; de raaklijn aan de dubbelkegelsnede wordt dan weder bekend. Trekt men een der raaklijnen aan D_2 in α_2, dan wordt een vlak construeerbaar, rakende aan de dubbelkromme in dit punt; dit vlak snijdt de aan D_1 geconstrueerde raaklijn. in een punt P; de lijn $P\,D_2$ is eene tweede raaklijn aan de dubbelkegelsnede, van welke nu bekend zijn twee raaklijnen met de daarop liggende raakpunten. Nog een dubbelpunt van $c_2{}^4$ in α_2 nemende, kan men de dubbellijn d trekken; zij snijdt het vlak δ in een punt der nu geheel bekende kegelsnede. Het oppervlak is nu construeerbaar en men heeft daarvan aangenomen:

$$11 + 2 + 1 + 2 = 16 \text{ punten.}$$

13. Tweede Groep, geval C en D. Daar het eenige verschil van deze twee gevallen bestaat in de bestaanbaarheid of onbestaanbaarheid der elkander kruisende dubbellijnen, kan men ze gezamenlijk in behandeling nemen.

De doorsnede $c_1{}^4$ is weder door 11 punten bepaald. Voor de kromme $c_2{}^4$ kan men twee dubbelpunten willekeurig nemen, hiermede zijn de kruisend gelegen dubbellijnen bepaald: door het derde dubbelpunt in α_1 kan men dan de derde dubbellijn trekken en het oppervlak is construeerbaar; het verband tusschen dit oppervlak en die der eerste groep blijkt ook nu weder duidelijk. Het aantal bepalende punten is dus nu:

$$11 + 2 \times 2 = 15 \text{ punten.}$$

Voor bijzondere standen van α_2 wordt verwezen naar het eerste geval der eerste groep.

14. Tweede Groep, geval *E*. De kromme c_1^4 bezit een dubbelpunt en eenen dubbelknoop; dit staat gelijk met 4 voorwaarden; zij moet dus bepaald zijn door 10 punten.

De doorsnede c_2^4 zal, evenals bij het geval *C* der eerste groep, bepaald zijn, zoodra gegeven zijn de dubbelknoop, de raaklijn daaraan en een punt, 't zij dit een gewoon punt of een dubbelpunt zij, daar ook het dubbelpunt, in één vlak moetende liggen met de dubbele knooplijn en het dubbelpunt van c_1^4, slechts eene voorwaarde vertegenwoordigt. Bij deze aanname blijkt het, dat, even als bij het aangehaalde geval van de voorgaande groep, de oppervlakkenbundels van de tweede orde bepaald zijn. Het geheel aantal punten, dat ter bepaling gediend heeft, bedraagt dus nu:

$$10 + 2 + 1 + 1 = 14 \text{ punten.}$$

15. Derde Groep, geval *A*. De kromme c_1^4 is eene kromme van de vierde orde met een drievoudig punt, zij is dus (7*b*) bepaald door 10 punten. Het oppervlak zal verder geheel bekend zijn, zoodra eene tweede doorsnede c_2^4 gegeven is; dan toch kan men de drievoudige lijn trekken en het door middel van haar en de twee doorsneden construeeren. De kromme c_1^4 ontstaat namelijk door een kegelsnedenbundel en eene daarmede projectieve straleninvolutie; het middelpunt der stralen-involutie is een basispunt van den kegelsnedenbundel. Door de drievoudige lijn en de stralen-involutie is de vlakken-involutie bepaald; neemt men nu een vlak dezer involutie, dan snijdt dit zoowel c_1^4 als c_2^4 in een punt, de verbindingslijn dezer punten is een beschrijvende lijn. De kromme c_2^4 heeft nu tot hare constructie vereischt 6 punten, alzoo in het geheel:

$$10 + 6 = 16 \text{ punten.}$$

16. Derde Groep, geval *B*. Als in het vorige geval is de kromme c_1^4 bepaald door 10 punten. Legt men α_2 in den algemeenen stand, dan kan men van c_2^4 aannemen het

drievoudig punt, waardoor 2 nieuwe voorwaarden ingevoerd worden (7*e*). Trekt men nu door dit punt twee raaklijnen, dan zal de derde raaklijn bekend worden door de voorwaarde, dat zij eene der raaklijnen van het drievoudig punt van $c_1{}^4$ moet snijden. De drie raaklijnen in het drievoudig punt van $c_2{}^4$ vertegenwoordigen dus slechts twee nieuwe voorwaarden. Van $c_2{}^4$ is nu bekend het drievoudig punt, de drie raaklijnen daaraan, benevens de vier snijpunten van α_2 met $c_1{}^4$; er is dus ter algeheele bepaling van $c_2{}^4$ nog noodig één punt te weten; neemt men ook dit aan, dan is, even als in het vorige geval, het oppervlak bepaald. Men heeft dus in het geheel aangenomen:

$$10 + 2 + 2 + 1 = 15 \text{ punten.}$$

17. Derde Groep, geval *C*. De doorsnede $c_1{}^4$ is wederom bepaald door 10 punten; ter verdere constructie bedenke men, dat het oppervlak bepaald is door de kromme $c_1{}^4$ en twee rechte lijnen van welke de eene, t, door het drievoudig punt T van $c_1{}^4$ getrokken is en de andere door een niet bijzonder punt van $c_1{}^4$ gaat. Het oppervlak R^4 zal dus bepaald zijn, zoodra men zooveel punten van $c_2{}^4$ heeft aangenomen, dat beide lijnen getrokken kunnen worden. Men neme nu het drievoudig punt van $c_2{}^4$ aan, dan is t bekend. Neemt men daarna een punt A_2 van $c_2{}^4$ aan, en legt men het vlak $t\,A_2$, dan snijdt dit $c_1{}^4$ nog in een punt A_1, en $A_1\,A_2$ is eene beschrijvende lijn van R^4. Op dezelfde wijze zullen twee andere aan te nemen punten B_2 en C_2 van $c_2{}^4$ nog twee andere beschrijvende lijnen $B_1\,B_2$ en $C_1\,C_2$ doen ontstaan Alle rechte lijnen, welke zoowel $A_1\,A_2$ als $B_1\,B_2$ en $C_1\,C_2$ snijden, vormen een stelsel beschrijvende lijnen eener hyperboloïde, welker doorsnede met α_1 eene kegelsnede is, die $c_1{}^4$ behalve in T, A_1, B_1, C_1 nog in twee punten snijden zal. Uit een dezer beide punten kan men de enkelvoudige richtlijn trekken, en daardoor wordt het geheele oppervlak bepaald. Het aantal punten, dat men aangenomen heeft, is dus:

$$10 + 2 + 3 = 15 \text{ punten.}$$

18. Derde Groep, geval *D*. De kromme $c_1{}^4$ is wederom

bepaald door 10 punten; de lijn, welke door alle beschrijvende lijnen gesneden wordt, valt evenwel in dit geval te zamen met de drievoudige lijn. Legt men het vlak α_2, dan kan hierin weder het drievoudige punt aangenomen worden; daar evenwel dit oppervlak twee standvastige raakvlakken heeft, zal men van c_2^4 dadelijk twee raaklijnen geconstrueerd hebben door vlakken te leggen door de drievoudige lijn en twee der raaklijnen van c_1^4. Van c_2^4 zijn nu bekend het drievoudige punt, twee der raaklijnen daaraan en de vier punten volgens welke α_2 c_1^4 snijdt; men moet dus nog 2 punten van c_2^4 aannemen om haar te bepalen. Is c_2^4 geconstrueerd, dan kan men, door vlakken te leggen door de drievoudige lijn, alle beschrijvende lijnen construeeren. Daar men als nieuwe voorwaarden van c_2^4 slechts heeft aangenomen het drievoudige punt en nog 2 punten zoo maakt dit:

$$10 + 2 + 2 = 14 \text{ punten.}$$

19. Vierde Groep, geval *A*. Bij dit oppervlak is de dubbelkromme eene scheeve kromme van de derde orde, maar alle beschrijvende lijnen moeten eene rechte lijn — de draagster der punten-involutie — snijden. Men brenge het vlak α_1 aan, dan zal dit vlak het oppervlak R^4 volgens eene kromme van de vierde orde c_1^4 snijden, welke drie dubbelpunten heeft. Men neme van c_1^4 aan de drie dubbelpunten benevens vier niet bijzondere punten, dan zal c_1^4 niet volkomen bepaald zijn. Neemt men evenwel in α_2 eveneens de drie dubbelpunten van c_2^4 aan, dan is de dubbelkromme bepaald, en het zal blijken, dat nu ook c_1^4 en dus het geheele oppervlak R^4 construeerbaar is. Uit elk der vier aangenomen punten van c_1^4 kan men namelijk eene koorde van de scheeve kromme trekken; deze koorden zijn beschrijvende lijnen van R^4; zij hebben verder twee gemeenschappelijke transversalen; elk dezer is eene oplossing voor de lijn, die als drievoudig rakende ontwikkelbare van R^4 optreedt, en tevens de rol van enkelvoudige richtlijn vervult. Is deze lijn geconstrueerd, dan is R^4 bepaald en dus kan c_1^4 zoowel als c_2^4 verder geconstrueerd worden. In het geheel heeft men dus aange-aangenomen:

$$3 \times 2 + 4 + 3 \times 2 = 16 \text{ punten.}$$

Deze uitkomst liet zich vermoeden; de algemeene theorie geeft aan, dat dit oppervlak het wederkeerige is van het oppervlak *A* der derde groep; men zou dus 16 raakvlakken moeten aanleggen om het te kunnen construeeren, en deze vormen evenzeer bepalende elementen als punten, zoodat men ook op deze wijze het getal bepalende punten had kunnen afleiden.

20. Vierde Groep, geval *B*. Volgens de opmerking aan het slot van het voorgaande geval laat zich het aantal punten noodig ter constructie oogenblikkelijk afleiden uit het geval *B* der derde groep. Men kan het evenwel ook bepalen door de opmerking te maken, dat dit oppervlak geconstrueerd wordt als het voorgaande, met dit onderscheid, dat de dubbelkromme in eene kegelsnede, gesneden door eene rechte lijn overgaat, en dus een der dubbelpunten van α_2, op eene gegevene rechte lijn moetende liggen, slechts eene voorwaarde uitdrukt. In het laatste geval verkrijgt men

$$3 \times 2 + 4 + 2 \times 2 + 1 = 15 \text{ punten.}$$

't geen met het aantal punten van het getal *B* der derde groep overeenstemt.

21. Het is duidelijk, dat men bij elk dezer aannamen een zeer groot aantal oplossingen verkrijgt; zoo zoude bv. wanneer men het geval *A* der derde groep op de voorgeschreven wijze wilde construeeren, men in α_1 door 10 punten 60 krommen van de vierde orde met drievoudig punt verkrijgen, en eveneens in het vlak α_2; daar elke kromme in α_1 met eene in α_2 kan gecombineerd worden, zoude dit tot 3600 oppervlakken aanleiding geven. Het aantal is echter door de aangenomen voorwaarden bepaald.

Evenals in de algemeene tabel der scheeve oppervlakken, is hier alleen nagegaan de hoofdgroepeering, zonder in de bijzonderheden te treden die door het samenvallen van klempunten ontstaan.

Bij vergelijking der uitkomsten met de vergelijkingen gegeven in SALMON-FIEDLER, *Geometrie des Raumes* II, 3de Aufl.

pag. 430—443, zal men zien, dat in die gevallen, waarin eene vermindering van het aantal aan te nemen punten intreedt, men ook in de vergelijking evenveel bijzondere waarden aan de coëfficiënten moet toekennen, als de vermindering van het aantal punten bedraagt.

De gevallen *C* en *D* van groep IV stemmen overeen met de gevallen *C* en *D* van de derde groep, en behoeven dus niet afzonderlijk te worden nagegaan.

Tilburg, Januari 1889.

HARMONISCHE ANALYSE DER GETIJDEN IN DE JAVA-ZEE.

DOOR

Dr. J. P. VAN DER STOK.



Ofschoon de verwachtingen, aanvankelijk gekoesterd van de bruikbaarheid der gegevens, door middel der harmonische analyse verkregen, voor eene juiste berekening van de starheid van het inwendige der aarde niet in alle deelen zijn bevestigd, blijft eene ook in de kleinere bijzonderheden tredende nauwkeurige berekening der verschillende componenten van groote beteekenis voor velerlei vraagstukken. Slechts indien deze methode op waarnemingen, op een groot aantal plaatsen verricht, is toegepast en kaarten van »*cotidal lines*" voor de drie groepen van getijden: de halfdaagsche, de eendaagsche en de meerdaagsche afzonderlijk zijn vervaardigd, zal het mogelijk zijn, tot eene juiste kennis te geraken van de voortplantingswijze dezer, voor het grootste gedeelte, vrije golven in diep en ondiep water en de daarmede samenhangende vraagstukken omtrent de gemiddelde diepte der zeeën en de aanwezigheid, al of niet, van staande golven.

Nog slechts voor een veertigtal plaatsen zijn de constanten volledig bekend, waarvan twintig stations in Britsch-

Indië. Binnen kort echter mogen verschillende publicatiën van op deze wijze berekende constanten verwacht worden, daar de roepstem van Prof. G. H. Darwin, die door zijne uitvoerige studiën over dit onderwerp het groote belang der zaak heeft aangetoond, weerklank gevonden heeft in Duitschland, Frankrijk, de Kaap en Australië, terwijl in Amerika reeds sedert meer jaren de studie der getijden van een practisch en theoretisch standpunt uit door Ferrel is ter hand genomen.

Ook in Nederlandsch-Indië zullen, met het doel dit internationale streven te steunen, twee zelfregistreerende peilschalen te Tjilatjap en te Padang worden opgesteld, door welke twee punten dan verband is gebracht tusschen de Australische stations en die van de Britsch-Indische kustlijn.

Terwijl de uitkomsten, die hiervan te wachten zijn, meer licht zullen verspreiden omtrent de voortschrijding der vloedgolven in den Indischen Oceaan, zijn observatiën in een min of meer afgesloten bekken, als de Java-zee, meer geschikt om gegevens te leveren voor de voortplantingswijze der golfbewegingen, indien deze door vele belemmeringen in haren voortgang zijn gestuit en zich voortbewegen in betrekkelijk ondiep water. Reeds eenige jaren lang zijn voor de Java-zee gegevens verzameld door middel van zelfregistreerende peilschalen in de haven van Tandjong-Priok en het bassin van het Marine-etablissement, te Soerabaya opgesteld.

Het doel van dit opstel is, de publicatie van de constanten voor Batavia's haven en de vergelijking van deze met die, welke in 1886 door den ingenieur H. Ypes voor Soerabaya werden gepubliceerd (*Tijdschrift van het Kon. Instituut van Ing.* Afd. N. I. 1885 - 1886).

In Tabel I zijn de amplituden en argumenten der getijden te Tandjong-Priok op dezelfde wijze en in dezelfde volgorde samengesteld als voor een veertigtal plaatsen geschiedde door Prof. Darwin en Majoor Baird in de Proceedings van de Royal Society, 1885. Vol. 39. De amplituden zijn gegeven in centimeters; de argumenten hebben betrekking op localen tijd.

TABEL I.

Constanten der getijden te Batavia.

		1885.	1887—88.			1885.	1887—88.			1885.	1887—88.
S_1	H	1.50 c.m.	2.54 c.m.	M_6	H	0.10 c.m.	0.12 c.m.	N	H	1.92 c.m.	1.96 c.m.
	K	321°	21°		K	77°	357°		K	338°	311°
S_2	H	4.86	5.69	O	H	12.68	13.64	S	H	0.26	0.91
	K	315°	294°		K	140°	121°		K	126°	136°
S_4	H	0.06	0.04	K_1	H	24.64	26.53	V	H	0.15	0.93
	K	222°	76°		K	157°	144°		K	23°	7°
S_6	H	0.04	0.01	K_2	H	2.55	2.13	Mm	H	0.51	1.23
	K	146°	225°		K	269°	271°		K	31°	33°
M_1	H	1.00	0.80	P	H	5.81	7.28	Mf	H	2.41	1.23
	K	168°	79°		K	157°	146°		K	31°	12°
M_2	H	4.17	4.79	J	H	2.94	2.02	MSf	H	0.20	0.43
	K	18°	347°		K	194°	210°		K	40°	182°
M_3	H	0.06	0.27	Q	H	3.02	3.53	Sa	H	7.11	7.54
	K	98°	27°		K	123°	111°		K	70°	129°
M_4	H	0.42	0.61	L	H	0.37	0.90	Ssa	H	5.53	6.44
	K	238°	185°		K	5°	89°		K	106°	117°

De eerste reeks vangt aan op den middag van den eersten Januari 1885, de tweede op den middag van 1 Juli 1887: beide serieën omvatten een vol jaar. Het oorspronkelijk plan om van 1885 af deze grootheden voor elk jaar te berekenen, kon niet gevolgd worden, omdat in het begin van 1887 bleek, dat de toevoerbuis van den getijmeter van lieverlede door de aangroeiing van oesterschelpen was verstopt ge-

raakt; de invloed hiervan was op de toen reeds gedeeltelijk berekende constanten voor 1886 duidelijk merbaar en het scheen dus wenschelijk, dit geheele jaar te verwerpen en met 1 Juli 1887 eene nieuwe, betere reeks aan te vangen.

Dat echter deze aanwas reeds in 1885 was begonnen, blijkt uit de vergelijking der beide reeksen; de amplituden der tweede reeks zijn bijna zonder onderscheid iets grooter dan die der tweede, evenals de argumenten; daar de formule, voor de perioden gebezigd, is:

$$H\ cos\ (n\ t - k)$$

werd de beweging derhalve reeds in 1885 op merkbare wijze vertraagd. De constanten der tweede reeks zijn daarom te verkiezen boven die van de eerste, om welke reden het middelen der grootheden achterwege is gelaten.

Voor de beteekenis der letters, waarmede de verschillende getijden zijn aangeduid en eveneens voor wijze, waarop de constanten berekend zijn, moge verwezen worden naar het bovengenoemd overzicht der verkregen resultaten in de Proceedings, de verschillende rapporten van Prof. DARWIN aan de *British Association* en de handleidingen van Prof. BÖRGEN *) en Majoor BAIRD †).

Uit de gegevens der Tabel I blijkt terstond, dat de getijden in de haven van Batavia in zeer sterke mate het eendaagsch karakter vertoonen, dat allen plaatsen, buiten den Atlantischen Oceaan gelegen, eigen is, en dat elke practische beteekenis ontneemt aan het havengetal, welks gewoonlijk aangenomen definitie berust op de onderstelling, dat het dubbel maansgetij inderdaad van overwegenden invloed is. Aan welke gegevens het havengetal 10 uur in het uittreksel van de *Connaissance des Temps* en in de *Gezeitentafeln*, uitgegeven door het Hydr. Bureau te Berlijn, is ontleend, is mij onbekend; maar daar, indien wij de beide

---

*) *Ann. d. Hydr.* XII. Jahrg. 1884. Heft VI u. f.

†) *A manual for tidal obs.* by A. W. BAIRD (1886).

dubbele getijden S_2 en M_2 afzonderlijk beschouwen, het waterverval bij springtij niet meer dan ongeveer 21 cent. bedraagt en bij doodtij de geheele beweging tot nul gereduceerd is, ware het beter, de publicatie van dit havengetal, alsmede dat van Pontianak en de Karimon-Djawa eilanden achterwege te laten. Voor de practijk kan aan een zóó klein getij geene waarde gehecht worden, tenzij dan in verband met de andere grootere getijden, en eene dergelijke publicatie kan aanleiding geven tot het trekken van ongegronde gevolgtrekkingen omtrent den oorsprong der getijden.

De beide andere halfdaagsche getijden K_2 en N_2, de eerste afhankelijk van de maansdeclinatie, de tweede van den maansafstand (elliptisch getij), hoewel zeer klein, zijn toch, zooals uit de vergelijking der beide serieën blijkt, met volkomen juistheid berekenbaar. Het zijn echter vooral de drie eendaagsche getijden K_1, O en P, van welke K_1 van de maans- en zons-declinatie, O van de maans-declinatie en P van de zons-declinatie afhankelijk zijn, maar, in vergelijking met de kleine halfdaagsche getijden, eene overheerschende rol spelen.

De combinatie der getijden K en O veroorzaakt eene sterke veertiendaagsche ongelijkheid: het grootste waterverval, ongeveer 80 cent., valt in ongeveer één dag na dien der grootste maans-declinatie; het kleinste, ongeveer 26 cent., kort na den maansdoorgang door den equator, terwijl het getij P in Maart en September deze getijden tegenwerkt, in December en Juli daarentegen ondersteunt, zoodat in het laatste geval het hoogste getij kan opklimmen tot een verval van $80 + 14.56 = 95$ c. m.; het kleinste, in Maart en September, daarentegen daalt tot 11 c.m. Zelfs onder deze ongunstige omstandigheden, wanneer tevens die voor het dubbel getij het gunstigst zijn, omdat, als de zon den evenaar passeert, volle en nieuwe maan met den maansdoorgang door den equator samenvallen, moet de eendaagsche getijbeweging nog met een bedrag van ongeveer 50 pCt. der halfdaagsche in rekening gebracht worden.

Niet geheel juist is dus de dikwerf geuite meening, dat in Maart en September het eendaagsch getij klein en het halfdaagsch grooter is; dit geldt alleen voor de dagen in

den omtrek van volle en nieuwe maan; op den dag na dien der grootste maansdeclinatie, bedraagt het verval van het eendaagsche getij nog 65 c.m.

De elliptische getijden *O*. *S* en *L* zijn alleen van theoretisch belang; van de beide eersten zijn de argumenten voor de beide reeksen voldoende overeenstemmend en derhalve ook de berekende amplitude juist. Wat de getijden van langen duur betreft, zoo schijnen ook de beide eerste *Mm* en *Mf* (maandelijksch en maans-veertiendaagsch, hoe gering hunne amplituden ook zijn, met voldoende zekerheid uit de Bataviasche waarnemingen af te leiden te zijn; het getij *MSf* (zons en maans-synodisch-veertiendaagsch) echter te klein; het havengetal dier langdurige getijden bedraagt ongeveer 30. Wat eindelijk de meteorologische getijden aangaat, zoo verdient bemerking, dat het getij S_1 zeer klein is en dus de land- en zeewind slechts geringen invloed uitoefent. Het veertiendaagsch getij *Ssa* is, althans voor deze beide reeksen, zeer constant; hoog water komt, volgens deze gegevens, omstreeks de helft van Mei en November voor. Het getij *Sa* (jaarlijksch) schijnt veel veranderlijker te zijn. De eerste reeks geeft hoog water op 31 Mei, de tweede op 30 Juli; indien men hierbij in het oog houdt, dat in 1885 de oostmoesson buitengewoon vroeg is ingevallen, zoodat na 22 Maart geene weers componente meer in de gemiddelde dagelijksche windrichtingen voorkomt, dan is men wel tot de conclusie gedwongen, dat in het westelijk gedeelte der Java-zee door den oostewind het niveau der zee wordt opgestuwd, terwijl men a priori eer geneigd zou zijn eene verhooging van het niveau gedurende den regenmoesson te verwachten. Zoo althans is het te Soerabaya gesteld, waar, zooals blijkt uit Tabel II, door het getij *Sa* hoog water omstreeks 11 Januari veroorzaakt wordt.

TABEL II.

CONSTANTEN DER GETIJDEN TE SOERABAYA,

Maart 1878—Februari 1879.

S_1	H	2.00 c.m.	O	H	27.16 c.m.	N	H	9.12 c.m.
	K	83°		K	284°		K	337°
S_2	H	26.40	K_1	H	46.92	λ	H	1.13
	K	355°		K	318°		K	289°
M_1	H	1.40	K_2	H	8.00	V	H	1.85
	K	309°		K	357°		K	40°
M_2	H	44.29	P	H	14.20	Mm	H	1.51
	K	351°		K	321°		K	351°
M_3	H	3.11	J	H	0.62	Mf	H	1.33
	K	238°		K	260°		K	46°
M_4	H	2.00	Q	H	4.67	MSf	H	1.61
	K	297°		K	281°		K	129°
M_6	H	1.19	L	H	2.99	Sa	H	3.40
	K	218°		K	8°		K	292°
						Ssa	H	6.59
							K	165°

De gegevens, in deze Tabel vereenigd. verschillen eenigszins van de door den Heer YPES berekende; de waarden nl. der amplituden en argumenten zijn, in overeenstemming met de door BÖRGEN en BAIRD gegeven voorschriften, wat de argumenten betreft, gedeeltelijk gewijzigd door herberekening der grootheid $V_0 + u$, terwijl de amplituden alleen door vermenigvuldiging met den reductie-factor $^1/_\lambda$ voor seculaire variatie zijn gecorrigeerd, waardoor de grootheden met die voor Batavia, in Tabel I gegeven, vergelijkbaar worden.

Het aanmerkelijk verschil tusschen de getijden, waargenomen in het nauw van straat Madoera en die van Batavia,

valt terstond in het oog. Wel is hier, evenals te Batavia, het eendaagsch getij groot, maar de halfdaagsche zons- en maansgetijden spelen beide hier eene veel minder ondergeschikte rol en zijn ook voor de practijk niet over het hoofd te zien. Het havengetal kan hier op 0 of 12 uur aangenomen worden en, daar de argumenten van S_2 en M_2 ongeveer gelijk zijn, zal het springtij met een verval van

$$2 \times (44.29 + 26.40) = 141.\ 38 \text{ c.m.}$$

op den dag van nieuwe maan worden waargenomen, terwijl bij doodtij het verval ongeveer 36 c.m. zal bedragen. Van de eendaagsche getijden K_1, O en P zijn de amplituden 1.9 malen grooter dan die van Batavia; de argumenten voor de twee plaatsen toonen constante verschillen aan ; deze zijn, in uren uitgedrukt:

	Batavia.	Soerabaya.	Verschil.
	u.	u.	u.
K_1	9.57	21.14	11.57
O	8.68	20.37	11.69
P	9.76	21.46	11.70

Het effect der eendaagsche getijden is dus te Soerabaya juist omgekeerd van die te Batavia. Gedurende den oostmoesson wordt te Batavia hoog water waargenomen te 10 u. n.m., in December te 10 uur v.m., te Soerabaya respectievelijk te 10 uur vm. en te 10 uur nm. Daar het verschil tusschen de waarden der grootheid K voor de getijden O en K_1 weinig meer bedraagt dan voor Batavia gevonden is, valt ook de tijd van 't hoogste water met een verval van

$$2\,(46.92 + 27.16) = 148.\ 16 \text{ c.m.}$$

ongeveer één dag na de grootste maansdeclinatie. In September en Maart, als wanneer het getij P tegenwerkt en bij eene maansdeclinatie 0, is het verval van het eendaagsch getij

$$2\,(46.92 - 27.16 - 14.20) = 11 \text{ c.m.}$$

dus feitelijk ten opzichte van het groote dubbelgetij te ver-

waarloozen en even klein als, onder gelijke omstandigheden, te Batavia.

Ook al neemt men aan, 't geen waarschijnlijk is, dat de getijhoogten te Soerabaya, door stuwing in den trechter van straat Madoera sterk vergroot, en derhalve op Madoera's noordkust aanmerkelijk kleiner zijn, dan blijft toch de verhouding der een- en halfdaagsche getijden een essentiëel onderscheid uitmaken tusschen de getijden voor beide plaatsen. Het verschil der argumenten voor M_2 bedraagt ongeveer 0^0 of 12 uur, 't geen even goed vroeger als later kan beduiden; dat der argumenten van de eendaagsche getijden gemiddeld 11.65 uren, om welken tijd deze getijden te Soerabaya later invallen ten opzichte van den localen tijd, dan te Batavia. Het is echter geheel onaanneemlijk, zoowel wegens de grootte der Soerabaaische getijden, als wegens de ligging der beide plaatsen, dat inderdaad de vloedgolf zich langs Java's noordkust van West naar Oost zou voortplanten; omgekeerd, dat zij zich westwaarts beweegt, ware denkbaar, in welk geval de 11.65 uren later als 12.35 uren vroeger zouden moeten opgevat worden. De vloedgolf zou in dit geval den weg langs Java's noordkust tusschen de beide plaatsen, gelijk aan ongeveer $656^1/_2$ K. M. hebben afgelegd in 12.74 uren, omdat het verschil in lengte 0.39 uren bedraagt. Volgens de LAGRANGE'sche formule

$$p = \frac{c^2}{2g}$$

waarin p de diepte der zee, c de snelheid van voortplanting, g de versnelling der zwaartekracht beduiden, zou deze snelheid derhalve overeenkomen met eene gemiddelde diepte van niet meer dan 21 meters. Deze diepte is zeker te veel verschillend van de ware, dan dat deze onderstelling zou kunnen stand houden; ook zou bezwaarlijk kunnen toegegeven worden, dat op dezen betrekkelijk korten weg het karakter der getijden zoodanig kon zijn veranderd, als inderdaad het geval is, en het eendaagsch getij, schoon zelf verwakt, in zoo groote mate de overhand zou gekregen hebben boven het halfdaagsche.

Evenmin als deze, schijnt de onderstelling dat de Bataviasche getijden veroorzaakt zouden worden door de vloedgolven, die uit de Chineesche zee door de Karimata- en Gasperstraten in de Java-zee zich voortbewegen, aan de eischen van het probleem te voldoen. Hoewel hier volledige gegevens ontbreken, wijzen toch de in de bovengenoemde »Gezeitentafeln" opgegeven getijhoogten voor Pontianak en de Bankastraat op eene veel te groote getijbeweging, dan dat het kleine verval, te Batavia waargenomen, hierdoor verklaard zou kunnen worden.

Uit de tot heden bekend geworden resultaten moet dus de conclusie getrokken worden, dat de Java-zee het terrein is, waar twee vloedgolven, beide oorspronkelijk afkomstig uit den stillen Oceaan, waarvan echter de eene den langeren weg door de Baschistraat, de Chineesche zee en de Karimatastraat heeft afgelegd, de andere den korteren afstand door de Celebeszee en straat Makasser heeft doorloopen, met elkander op gecompliceerde wijze interfereeren.

Door het verschil in afgelegden weg, kan het groote phasen-onderscheid, dat kenmerkend is voor beide eendaagsche componenten, verklaard worden en te Batavia, gelegen in een cul de sac, zullen door deze interferentie beide componenten elkander voor het grootste gedeelte vernietigen. Terwijl dus te Batavia, blijkens het argument der eendaagsche getijden, de invloed van de uit het Noorden komende vloedgolf nog overheerschend is, maar sterk getemperd door de oostelijke vloedgolf, zal er, meer oostelijk, eene grenslijn te vinden zijn, waar de beide eendaagsche getijden elkander geheel en al tegenwerken en dus alleen zwakke halfdaagsche getijden zullen zijn waar te nemen; oostwaarts van deze demarcatie-lijn zullen de getijden meer en meer het karakter der getijden van Soerabaya aannemen.

Batavia, Februari 1889.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 20 April 1889.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voorzitter, SCHOLS, PLACE, ZEEMAN, J. A. C. OUDEMANS, GRINWIS, MULDER, A. C. OUDEMANS JR., MAC GILLAVRY, FRANCHIMONT, VAN DORP, HUBRECHT, HOOGEWERFF, MARTIN, BEIJERINCK, HOFFMANN, SURINGAR, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, BAEHR, PEKELHARING, FORSTER, SCHOUTE, BUYS BALLOT, VAN DER WAALS, VAN DIESEN, KAMERLINGH ONNES, HOEK, DE VRIES, BIERENS DE HAAN, STOKVIS, BEHRENS, VAN 'T HOFF en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1⁰. A. KLUIJVER, Bibliothecaris van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden, Januari 1889; 2⁰. J. F. VAN SOMEREN, Bibliothecaris van de Rijks-Universiteit te Utrecht, 1889; 3⁰. J. W. G. VAN HAARST, Bibliothecaris van de Rijks-Universiteit te Groningen, 17 April 1889; 4⁰. D. STUR, Directeur van de k. k. geologische Reichsanstalt te Weenen, 14 April 1889; 5⁰. H. HELMHOLTZ, Berlijn, 9 April 1889; 6⁰. W. TIESENHAUSEN, Directeur

van de Commission impériale archéologique te St. Petersburg, 28 Maart 1889; 7⁰. M. PEREZ, Directeur van het Observatorio meteorologico central te Mexico, 8 Maart 1889; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1⁰. E. LIENENKLAUS, Secretaris van het naturwissenschaftliche Verein te Osnabrück, 1 April 1889; 2⁰. GILBERT, Bibliothecaris van de kön. Universitäts-Bibliothek te Greifswald, 3 Januari 1889; 3⁰. S. SINCLAIR, Secretaris van het Australian Museum te Sydney, 15 Februari 1889; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Is ingekomen een brief van Z.Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken (13 April 1889), de mededeeling behelzend, dat de herbenoemingen van de Heeren H. G. VAN DE SANDE BAKHUIJZEN, J. D. VAN DER WAALS en C. A. J. A. OUDEMANS, respectievelijk tot Voorzitter, Onder-Voorzitter en Secretaris der Koninklijke Akademie van Wetenschappen, door den Raad van State bekrachtigd zijn.

— De Heeren SCHOUTE en BIERENS DE HAAN brengen een gunstig verslag uit over de verhandeling van den Heer Dr. JAN DE VRIES. Wordt besloten haar op te nemen in de Verslagen en Mededeelingen.

— De Heer J. A. C. OUDEMANS doet eene mededeeling betreffende te Utrecht uitgevoerde vergelijkingen van twee glazen eindmeters met den platina-iridiummeter N⁰. 27 en biedt over dit onderwerp eene verhandeling aan voor de Verslagen en Mededeelingen.

— De Heer MARTIN spreekt over de zoogenaamde »oude schieferformatie" op Borneo. Deze formatie is onder anderen in de Westerafdeeling van het eiland bekend en hier werden daarin ook enkele versteeningen door den Ingenieur

C. J. VAN SCHELLE verzameld, namelijk aan de Soengei Mottong, en bij Boedoek en Sepang in de Chineesche distrikten. Het bleek uit een daaromtrent ingesteld onderzoek, dat deze versteeningen tot de geslachten *Gervillia* en *Corbula* behooren, en aangezien deze nooit in palaeozoïsche lagen voorkomen, kunnen ook de »oude schiefers" hier niet palaeozoïsch wezen. De schiefers worden bovendien door tertiaire lagen overdekt en er schiet dus niets anders over dan aan te nemen, dat zij tot het mesozoïsche tijdvak behooren. Eene verdere bevestiging dezer veronderstelling vond spreker hierin, dat het hem gelukte, in een grijzen kalksteen van den Bojan in het Boven-Kapoeas-gebied *Orbitolina lenticularis* te vinden. Aangezien dit fossiel cretaceïsch is en de bedoelde kalksteen eveneens in verband met kleischiefers gevonden wordt, komt spreker tot de conclusie, dat de lagen met *Gervillia* en *Corbula* van gelijken ouderdom zijn als die met *Orbitolina* en dat alle tot de krijtperiode behooren. Spreker houdt zich overtuigd, dat de krijtformatie in den Indischen Archipel zeer verspreid is en, wegens gebrek aan fossielen, gedeeltelijk onder de »oude schiefers", gedeeltelijk ook onder het »tertiair" begrepen is geworden.

— De Heer SCHOLS biedt, namens den Heer VAN DEN BERG, voor de Verslagen en Medeelingen een opstel aan, getiteld: »Nogmaals over de Bernoulliaansche coëfficiënten".

— De Heer SCHOUTE biedt voor de Verslagen en Medeelingen aan een opstel, getiteld »Equianharmonie en harmonie bij poolstelsels van binaire vormen, enz.".

— De Vergadering wordt gesloten.

VERSLAG

OMTRENT DE VERHANDELING

VAN DEN HEER **Dr. J. DE VRIES.**

OVER VLAKKE CONFIGURATIES, DIE UIT DE OSCULATIE-GROEPEN DER KUBISCHE KROMME KUNNEN WORDEN AFGELEID.

(Uitgebracht in de Vergadering van 20 April 1889).

De verhandeling, die bovenstaanden titel voert, brengt verband tusschen twee vroeger door den heer DE VRIES behandelde vraagpunten, de involuties op kromme lijnen en de configuraties. Het zij ons geoorloofd met een enkel woord het onderwerp nader aan te wijzen, en de voornaamste der verkregen uitkomsten te vermelden.

Alle krommen K^n van den n^{den} graad, die een gegeven kubische kromme K^3 in een gegeven punt A $3n-1$-puntig aanraken, snijden deze verder in een zelfde punt B, dat door het aannemen van A bepaald is. Bij elk punt A der kromme K^3 behoort dus een enkel punt B, dat men naar SYLVESTER het *restpunt* der n^{de} orde van A noemen kan. Valt het snijpunt B in een bijzonder geval met het aangenomen raakpunt A samen, dan heeft men met een punt van volledige aanraking van K^3 met een kromme K^n te doen, dat door SYLVESTER een *plethorisch punt* ($\pi\lambda\acute{\eta}\vartheta\omega$ = vol zijn), door anderen een *buigpunt* van de n^{de} orde genoemd is.

Behoort nu bij een aangenomen punt A een enkel restpunt B, omgekeerd is elk punt B restpunt van $(3n-1)^2$ punten A, zoo als dit het eerst door CLEBSCH met behulp van elliptische functies is aangewezen. Deze $(3n-1)^2$ pun-

ten A vormen gezamenlijk, wat men de *osculatiegroep* van het aangenomen punt B zou kunnen noemen. In engeren zin verstaat de heer DE VRIES onder de osculatiegroep O_n van het punt B echter alleen de bestaanbare punten A, die tot het restpunt B voeren. Hierdoor is hij genoodzaakt vooraf te onderzoeken, hoe het aantal dier bestaanbare punten vooreerst afhangt van het een- of tweetakkig zijn der kromme K^3, in het laatste geval verder van het oneven of even zijn van n en in het laatste dezer gevallen verder weer van de ligging van B op het *ovaal* of op de *serpentine*. Daarbij worden dan gelijkloopende onderzoekingen van HART en KÖTTER vermeld.

Het eerste der vier hoofdstukken, waarin de verhandeling verdeeld is, draagt het opschrift *osculatiegroepen*. Daarin heeft het bovengenoemde onderzoek naar het aantal bestaanbare punten dier groepen plaats en wordt de stelling bewezen, dat de punten, die drie collineaire punten A tot osculatiegroepen O_n aanvullen, met deze drie punten een configuratie $\{(9n-3)_{3n-1}, (3n-1)^2{}_3\}$ vormen. Deze belangrijke uitkomst kan beschouwd worden als de rationeele uitbreiding van het bekende theorema, volgens hetwelk de drie toegevoegde punten van drie collineaire punten eener K^3 genomen in een zelfde der drie stelsels met de drie collineaire punten de zes hoekpunten eener volledige vierzij, d. w. z. de configuratie $(6_2, 4_3)$, vormen. Verder worden eenige gevallen, waarbij osculatiegroepen van hoogeren graad uit osculatiegroepen van lageren graad samengesteld zijn, nader onderzocht.

Het tweede hoofdstuk handelt over *plethorische groepen*, d. w. z. over osculatiegroepen O_n, die een buigpunt tot restpunt hebben. Wijl de kromme K^3 drie bestaanbare buigpunten bezit, zijn er drie plethorische groepen; al de punten dier groepen zijn plethorische punten. Zoo als door STORY, PICQUET, KÖTTER en den eersten ondergeteekende is aangewezen, komen onder deze als n deelers heeft de op die deelers betrekking hebbende plethorische punten van lageren graad en, zelfs als n ondeelbaar is, de gewone buigpunten voor. Terwijl nu, als men deze plethorische punten van lageren

graad meetelt, elke plethorische groep uit $3n$ punten bestaat, bewijst Dr. DE VRIES in het voetspoor van KÖTTER, dat n van deze nader met elkaar tot een groep P_n verbonden kunnen worden; van zulk een groep heeft elk der punten de overige punten der groep tot restpunten van verschillenden graad.

Het derde hoofdstuk is gewijd aan de bespreking der *tangentiaalveelhoeken*, der veelhoeken die terzelfder tijd in en om K^3 beschreven zijn. Van deze tangentiaalveelhoeken, over welke men DURÈGE en PICQUET raadplegen kan, zijn de hoekpunten plethorische punten van de orde $\frac{1}{3}\{2^n - (-1)^n\}$, als n het aantal zijden van den veelhoek aanduidt. Zij worden door den schrijver in verband gebracht met de *inflexie-tripels* van K^3, d. w. z. met drietallen van punten der kromme, die zich met de drie bestaanbare buigpunten door drie in een punt der kromme samenkomende lijnen laten vereenigen. Daarbij maakt hij gebruik van de elders door hem bewezen stelling, die zegt, dat de aanvulling van de hoekpunten eens tangentiaalveelhoeks van n zijden tot de configuratie $3\,n_3$ voert, die bestaat uit de hoekpunten van n driehoeken, die een reeks vormen, van welke elke driehoek in den voorgaanden en om den volgenden beschreven is. Zoo komt hij tot een reeks van samenhangende configuraties, waarvan de opsomming hier achterwege blijven moet.

Het laatste hoofdstuk bevat algemeene beschouwingen omtrent de configuraties, die uit plethorische punten bestaan. Deze beschouwingen betreffen in hoofdzaak de configuraties ontleend aan de plethorische groepen van den graad 3^t en aan die van den graad $18q-3$. Daarbij treden dan algebraïsche congruenties op den voorgrond.

Het is onze meening, dat deze nieuwe studie van Dr. DE VRIES zich op verdienstelijke wijze bij de voorgaanden aansluit. Omtrent het algemeene vraagpunt der configuraties opent zij naar ons oordeel verscheidene nieuwe gezichtspunten. Wij schromen daarom niet U voor te stellen haar in de *Verslagen en Mededeelingen* te doen opnemen.

Amsterdam, P. H. SCHOUTE.
17 April 1889. D. BIERENS DE HAAN.

OVER VLAKKE CONFIGURATIES,

WELKE UIT DE

OSCULATIEGROEPEN DER KUBISCHE KROMME KUNNEN GEVORMD WORDEN.

DOOR

JAN DE VRIES.

In zijne verhandeling »Anwendung der Abelschen Functionen auf die Geometrie" heeft CLEBSCH *) aangetoond, dat eene algemeene vlakke kubische kromme K_3 m^2 punten bezit, waar zij m-puntig aangeraakt wordt door krommen K_n, welke $(3n - m)$ vaste punten met haar gemeen hebben. Deze uitkomst is in 1884 aangevuld door KÖTTER †) met den regel, dat van deze m^2 punten m bestaanbaar zijn, als K_3 uit *een* trek bestaat, terwijl voor de tweetakkige K_3 dit aantal m bedraagt, als m oneven is, $2m$, wanneer m even is en een even aantal vaste punten op het ovaal ligt, *nul*, als het ovaal voor even waarde van m een oneven aantal vaste punten bevat. In het bizonder onderzoekt KÖTTER de punten van volledige, dus $3n$-puntige, aanraking met krommen der n^{de} orde en construeert daarna stelsels van zulke punten, of deelen van zoodanige stelsels, voor $n = 2$ tot $n = 15$.

---

*) *Journal* von CRELLE, Band 63.

†) Beiträge zur Theorie der Osculationen bei ebenen Curven dritter Ordnung. *Inauguraldissertation*. Berlin 1884.

In het volgende opstel beschouw ik de configuraties, welke uit groepen van punten der K_3 kunnen gevormd worden, welke eene $(3n - 1)$-puntige aanraking met krommen K_n door een vast punt der K_3 toelaten, en daarna groepen van punten van volledige aanraking. Terwijl mijne beschouwingen over het algemeen van KÖTTER's handelwijze verschillen, heb ik gemeend zijne methode voor de bepaling van het aantal bestaanbare punten in zulke groepen in het verband te moeten opnemen; zij is trouwens eene uitbreiding van de wijze, waarop HART *) het aantal punten van volledige aanraking met krommen der derde orde heeft gevonden.

---

§ I.

OSCULATIEGROEPEN.

Alle krommen K_n, welke K_3 in het punt a_0 $(3n - 1)$-puntig osculeeren, snijden haar in een en hetzelfde punt, r_n, dat ik het *restpunt der* n^{de} *orde* zal noemen. Een stelsel van krommen K_n, die in a_0 $(3n - 2)$ punten met K_n gemeen hebben, snijdt haar dus volgens eene centrale involutie I_2 †). Tot dit stelsel behoort elke kromme, die uit eene $(3n - 4)$-puntig rakende K_{n-1} en de raaklijn van a_0 is samengesteld; het restpunt r_{n-1} en het tangentiaalpunt $a_1 \equiv r_1$ vormen dus een paar der I_2, zoodat de lijn $r_1\, r_{n-1}$ de K_3 in het centrum s_n der involutie snijdt. Daar a_0 en r_n ook een paar van I_2 leveren, wordt r_n door de lijn $a_0\, s_n$ ingesneden. Op deze wijze wordt de bepaling van r_k tot de

*) On the nine-punct contact of cubic curves. (*Trans. Royal Irish Academy*, Dublin 1875).

†) WEYR heeft in zijne verhandeling „Ueber eindeutige Beziehungen auf einer allgemeinen ebenen Curve 3. O." (*Sitz. ber. Wiener Akad.* April 1883) aangetoond, dat K_3 slechts twee soorten van I_2 bezit, n. l. de drie fundamentale, gevormd uit paren van correspondeerende punten, en de centrale, van welke alle paren met een vast punt der K_3 collineair zijn.

constructie van r_{k-1} teruggebracht, komt dus ten slotte neer op het trekken der raaklijn in a_0. Tabel (I, geeft een overzicht van alle lijnen, welke, volgens deze beschouwing, voor de constructie van r_n vereischt worden.

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & a_0 & a_0 & r_1 \\ r_1 & r_1 & s_2 & a_0 & s_2 & r_2 \\ r_1 & r_2 & s_3 & a_0 & s_3 & r_3 \\ r_1 & r_3 & s_4 & a_0 & s_4 & r_4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_1 & r_{n-1} & s_n & a_0 & s_n & r_n \end{array} \quad \ldots\ldots \quad (I)$$

De punten r_p en r_{n-p}, welke K_3 achtereenvolgens gemeen heeft met eene $(3p-1)$-puntig osculeerende K_p en eene $(3n-3p-1)$-puntig osculeerende K_{n-p}, vormen ook een paar der I_2: s_n is dus het snijpunt der lijnen $r_p\, r_{n-p}$ ($p = 1$ tot $\frac{1}{2}n$ of tot $\frac{1}{2}(n-1)$).

Door het teeken

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array} \right\}$$

zal ik te kennen geven, dat de door de cijfers 1 tot 9 aangewezen punten der K_3 eene atrigonische $(9_2, 6_3)$ met de lijnen 123, 456, 789; 147, 258, 369 vormen.

Daar het bestaan van vijf dezer zes lijnen de zesde noodzakelijk maakt, volgt uit:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} r_1 & a_0 & a_0 \\ r_{i-1} & r_k & s_{i+k-1} \\ s_i & s_k & r_{i+k-1} \end{array} \right\}$$

dat de punten s_i, s_k en r_{i+k-1} steeds collineair zijn. Derhalve is r_{2i-1} het tangentiaalpunt van s_i, terwijl uit het bovenstaande volgt, dat s_{2k} het tangentiaalpunt van r_k is. Stelt a_i het i^{de} tangentiaalpunt van a_0 voor, dan blijkt, dat:

$a_1 \equiv r_1$	$a_2 \equiv s_2$	
$a_3 \equiv r_3$	$a_4 \equiv s_6$	
$a_5 \equiv r_{11}$	$a_6 \equiv s_{22}$	. . . . . . (II)
$a_7 \equiv r_{43}$	$a_8 \equiv s_{86}$	
$a_9 \equiv r_{171}$	$a_{10} \equiv s_{342}$	
. . . .	. . . .	
$a_{2k-1} \equiv r_{\frac{1}{3}(2^{2k-1}+1)}$	$a_{2k} \equiv s_{\frac{1}{3}(2^{2k}+2)}$	

De juistheid der algemeene formule kan gemakkelijk door inductie bewezen worden.

De punten $r_1 \equiv a_1$ en $s_2 \equiv a_2$ liggen steeds op de serpentine der tweetakkige K_3, onverschillig of a_0 tot het ovaal of de serpentine behoort; r_2 en a_0 zijn dus punten van denzelfden tak. Algemeen volgt uit tabel (I): *r_{2m} ligt op het ovaal of op de serpentine, naarmate a_0 zich op ovaal of serpentine bevindt*; *r_{2m+1} behoort altoos tot de serpentine.*

Terwijl elk punt a_0 alle restpunten ondubbelzinnig bepaalt, behoort bij het willekeurig gekozen punt r_n eene groep van punten a_0, waarvan ik, in het voetspoor van HART en KÖTTER, het aantal bestaanbare punten zal zoeken.

In denzelfden tijd, waarin a_0 het ovaal of de serpentine doorloopt, beweegt a_1 zich tweemaal, in tegengestelde richting, langs de serpentine *); $a_2 \equiv s_2$ verplaatst zich derhalve $(+4)$ maal, d. w. z. 4 maal in dezelfde richting met a_0, langs de serpentine, zoodat zijne projectie p uit het vaste punt r_2, dat op den door a_0 doorloopen tak wordt aangenomen, dezen tak (-4) maal beschrijft. Gedurende een omloop komt a_0 het punt p dus 5 maal tegen, zoodat a_0 en s_2 5 maal met r_2 collineair liggen; elk punt r_2 is dus het *restpunt* van eene uit vijf punten a_0 gevormde *osculatiegroep der tweede orde*, O_2.

Stelt $\omega(2m)$ het aantal bestaanbare punten eener osculatiegroep der orde $2m$ voor, dan zullen gedurende een

*) Dit wordt uitvoerig aangetoond door SCHOETER in zijn „Theorie der ebenen Kurven 3. O." bl. 250.

omloop van a_0 langs een der takken van K_3 (of langs eene eentakkige K_3) de punten r_{2m} en r_2 denzelfden tak — $\omega(2m)$ maal en (— 5) maal afleggen. Het met hen collineaire punt s_{2m+2} verricht dus $\omega(2m) + 5$ positieve omloopen langs de serpentine, zijne projectie p uit het met a_0 op één tak geplaatste punt r_{2m+2} beschrijft dezen tak dan $\omega(2m) + 5$ maal in negatieven zin, valt dus $\omega(2m) + 6$ maal met a_0 samen; even vaak zijn a_0, s_{2m+2} en r_{2m+2} collineair, zoodat $\omega(2m+2) = \omega(2m) + 6$. Uit deze recursieformule volgt gemakkelijk, dat $\omega(2m) = 6m - 1$.

1. *Elk punt van K_3 behoort tot eene uit $(6m-1)$ punten gevormde osculatiegroep O_{2m}; alle punten der groep liggen met hun gemeenschappelijk restpunt der orde $2m$ op denzelfden tak der kromme.*

Doorloopt a_0 in eene bepaalde richting het ovaal, dan beschrijft r_{2m} dien tak $(6m-1)$ maal in tegengestelden zin; daar tegelijk r_1 zich (— 2) maal over de serpentine verplaatst, gaat s_{2m+1} $+(6m+1)$ maal langs het ovaal; zijne projectie p uit het op de serpentine willekeurig aangenomen vaste punt r_{2m+1} beschrijft derhalve $-(6m+1)$ maal het ovaal, ontmoet a_0 dus $(6m+2)$ maal; even vaak worden a_0, s_{2m+1} en r_{2m+1} collineair. Beweegt a_0 zich langs de serpentine, dan verrichten de genoemde punten evenveel omloopen, maar nu alle langs *dezen* tak, zoodat a_0 ook op dezen $(6m+2)$ maal met s_{2m+1} en r_{2m+1} door eene rechte verbonden wordt.

2. *Elk punt der serpentine van K_3 is het restpunt der orde $(2m+1)$ voor $(6m+2)$ punten van het ovaal en voor $(6m+2)$ punten der serpentine. Voor de eentakkige K_3 bestaat alleen de tweede groep.*

Wordt elke dezer $(6m+2)$-puntige groepen als eene O_{2m+1} (osculatiegroep der orde $2m+1$) aangeduid, dan geldt de algemeene regel:

3. *Elk punt eener algemeene kubische kromme behoort met $(3n-2)$ andere punten van denzelfden tak tot eene osculatiegroep O_n.*

Voor drie collineaire punten a_0, a_0', a_0'' heeft men blijkbaar:

$$\left\{\begin{matrix} a_0 & a_0' & a_0'' \\ s_2 & s_2' & s_2'' \\ r_2 & r_2' & r_2'' \end{matrix}\right\}$$

Immers de tweede tangentiaalpunten (s_2) van drie collineaire punten zijn mede collineair. Uit het collineair liggen ven r_2, r_2', r_2'' volgt nu:

$$\left\{\begin{matrix} r_1 & r_1' & r_1'' \\ r_2 & r_2' & r_2'' \\ s_3 & s_3' & s_3'' \end{matrix}\right\}$$

zoodat ook s_3, s_3', s_3'' door eene rechte kunnen vereenigd worden. Zoo voortgaande leidt men uit

$$\left\{\begin{matrix} r_1 & r_1' & r_1'' \\ r_{n-1} & r'_{n-1} & r''_{n-1} \\ s_n & s'_n & s''_n \end{matrix}\right\}$$

het collineair liggen van s_n, s'_n, s''_n, en hieruit, blijkens

$$\left\{\begin{matrix} a_0 & a'_0 & a''_0 \\ s_n & s'_n & s''_n \\ r_n & r'_n & r''_n \end{matrix}\right\}$$

de collineaire ligging van r_n, r'_n, r''_n af.

De lijn, welke een punt a_0 eener O_n met een punt a'_0 eener tweede O_n verbindt, ontmoet K_3 dus in een a''_0 van eene derde O_n, waarvan het restpunt r''_n met de restpunten r_n en r'_n der eerste en tweede groep collineair ligt. M. a. w.

4. *Vult men drie collineaire punten eener K_3 tot osculatiegroepen der n^{de} orde aan, dan ontstaat eene cf.*

$$((9n-3)_{3n-1},\ (3n-1)^2{}_3).$$

Daar s_{2n} het tangentiaalpunt van r_n is, hebben de punten eener O_n hetzelfde punt s_{2n}, en wegens $r_{4n-1} \equiv$ tang. s_{2n}, ook hetzelfde punt r_{4n-1}. Elke O_n maakt dus deel uit van eene O_{4n-1}; de $(12n-4)$ punten der laatste groep kunnen derhalve in vier O_n gerangschikt worden, waarvan de vier

restpunten r_n de (op de serpentine gelegen) antitangentiaalpunten van r_{4n-1} zijn.

Deze eigenschap kan uitgebreid worden: de punten met gemeenschappelijk r_n hebben ook het eerste, tweede, . . . k^{de} tangentiaalpunt van r_{4n-1} gemeen, dus de punten s_{8n-2}, r_{16n-5}, s_{32n-10}, r_{64n-21} enz. Het ordegetal o van elk in deze reeks voorkomend restpunt kan blijkbaar afgeleid worden uit de formule $o = 4^i \,.\, n - (4^{i-1} + 4^{i-2} + \ldots \ldots + 4 + 1) = \frac{1}{3}[4^i(3n - 1) + 1]$. Dus:

5. *Elke osculatiegroep der orde* $\frac{1}{3}[4^i(3n - 1) + 1]$ *bestaat uit* 4^i *osculatiegroepen der orde* n.

Verder hebben de punten eener O_n ook gemeen het punt s met den index $\frac{1}{3}[4^i + 4^k)(3n - 1) + 2]$, dat collineair ligt met de restpunten der orden $\frac{1}{3}[4^i(3n - 1) + 1]$ en $\frac{1}{3}[4^k(3n - 1) + 1]$; het tangentiaalpunt van dit punt s is dus voor alle punten der O_n het restpunt der orde $\frac{1}{3}[4^i + 4^k)(6n - 2) + 1]$.

6. *Elke osculatiegroep der orde* $\frac{1}{3}[(4^i + 4^k)(6n - 2) + 1]$ *bestaat uit* $2(4^i + 4^k)$ *osculatiegroepen der orde* n.

Bovendien kan elke osculatiegroep O_{2n+1} van oneven orde in twee groepen gescheiden worden, overeenkomende met de beide hier in aanmerking komende antitangentiaalpunten van r_{2m+1}, die elk voor de helft der groep als s_{m+1} dienst doen. Het stelsel der bestaanbare punten van K_3, welke het centrum s_{m+1} gemeen hebben, zal ik als *centraalgroep der* $(m + 1)^{\text{ste}}$ *orde*, S_{m+1} aanduiden.

7. *Elke uit drie osculatiegroepen der orde* $(2m + 1)$ *samengestelde cf.* $((18m + 6)_{6m+2}, (6m + 2)^2{}_3)$ *bevat vier cf.* $((9m + 3)_{3m+1}, (3m + 1)^2{}_3)$, *die elk gevormd worden door drie centraalgroepen. De punten* s_{m+1} *dezer zes centraalgroepen zijn de toppen eener volledige vierzijde.*

Overeenkomstige eigenschappen gelden voor de splitsing van osculatiegroepen in osculatiegroepen van lager orde.

Van de cf. onder 4 en 7 kan men gebruik maken, om uit cf., in K_3 beschreven, meer samengestelde cf. af te leiden:

8. *Vult men de punten eener in* K_3 *beschreven* $(3x_q, qx_3)$ *tot osculatiegroepen der* n^{de} *orde aan, dan ontstaat er eene*

$((9n - 3)\,x_{(3n-1)q},\ (3n-1)^2\,q\,x_3)$. *Voegt men aan elk punt der oorspronkelijke cf. de punten toe, welke het tot eene centraalgroep der* $(m+1)^{\text{ste}}$ *orde aanvullen, dan verkrijgt men eene* $((9m+3)\,x_{(3m+1)q},\ (3m+1)^2\,q\,x_3)$.

Zijn a_0 en b_0 twee correspondeerende punten van denzelfden tak, dan hebben zij r_1 en s_2, en dientengevolge r_{2p-1} en s_{2p} gemeen. Immers, gesteld, dat, voor eenige waarde van den index, r_{2p-1} aan a_0 en aan b_0 toekomt, dan geldt dit ook voor het met r_1 en r_{2p-1} collineair gelegen punt s_{2p}, dus ook voor het met s_2 en s_{2p} collineair gelegen punt r_{2p+1}. Elke O_{2p-1} bestaat dus uit $(3p-2)$ paren van correspondeerende punten.

De tangentiaalpunten van O_n behooren blijkbaar tot eene tweede O_n, waarvan r_n met het tangentiaalpunt van het restpunt der eerste groep samenvalt. Voor even waarden van n vindt men zoodoende alle punten der tweede groep; voor oneven n, blijkens het bovenstaande, slechts de helft. Tot de punten dezer tweede O_n komt men ook door de snijpunten op te zoeken van K_3 met de zijden van den door de eerste groep bepaalden volledigen $(3n-1)$hoek; immers drie collineaire punten hebben hunne restpunten der n^{de} orde in eene rechte, die hier eene raaklijn der K_3 wordt.

De groep, waartoe de tangentiaalpunten van O_n behooren, wordt met O_n identiek, zoodra r_n met zijn tangentiaalpunt samenvalt, dus een buigpunt is. Daar een buigpunt i met alle zijne restpunten samenvalt, behoort i ook tot de O_n, waarvoor het als r_n dienst doet. Voor deze bijzondere O_n snijdt $a_0 i$ de K_3 in s_n: daar i ook het punt s_{2n} (tangentiaalpunt van r_n) vertegenwoordigt, is a_0 dus identiek met het steeds op de lijn $s_n\,s_{2n}$ gelegen punt r_{3n-1}, d. w. z. a_0 is een punt van volledige aanraking der K_3 met een stelsel van K_{3n-1}; ik zal zulk een punt, in navolging van SYLVESTER, een *plethorisch punt* der orde $(3n-1)$ noemen.

9. *Elke der drie* O_n, *welke door de drie bestaanbare buigpunten bepaald worden, bestaat uit plethorische punten der orde* $(3n-1)$.

Is het punt s_n met i vereenigd, dan vervangt i voor de overeenkomstige centraalgroep ook het punt s_{4n-2} (tweede

tangentiaalpunt van s_n). De lijn $a_0\, i$ snijdt K_3 dan in r_n, dus is $a_0 \equiv r_{3n-2}$.

10. *Elk bestaanbaar buigpunt bepaalt eene centraalgroep der n^{de} orde, die uit plethorische punten der orde* $(3n - 2)$ *bestaat, en waarvoor het buigpunt tevens de punten s_n en r_{2n-1} vervangt.*

---

§ II.

Plethorische groepen.

Daar, gedurende een omloop van a_0 langs een tak van K_3, het punt r_{2m} denzelfden tak $(6\,m - 1)$maal in tegengestelden zin aflegt, zullen deze beide punten $6m$ maal samenvallen in een plethorisch punt der orde $2m$.

11. *Eene tweetakkige K_3 bezit $12m$ plethorische punten der orde $2m$, waarvan $6m$ op het ovaal en $6m$ op de serpentine liggen.*

Omdat r_{2m+1} steeds tot de serpentine behoort, bevat het ovaal geen plethorische punten van oneven orde. Beweegt a_0 zich eens langs de serpentine, dan verplaatst r_{2m+1} zich $(6\,m + 2)$ maal in tegengestelde richting over dien tak, zoodat de beide punten $(6\,m + 3)$ maal samenkomen.

12. *Eene K_3 heeft* $(6\,m + 3)$ *plethorische punten der orde* $(2\,m + 1)$, *die alle tot de serpentine behooren.*

Vat men de plethorische punten der n^{de} orde, die tot denzelfden tak behooren, tot eene *plethorische groep P_n* samen, dan geldt de algemeene regel:

13. *Elk plethorisch punt der n^{de} orde vormt met* $(3\,n - 1)$ *andere punten van denzelfden tak eene plethorische groep der n^{de} orde.*

Tot de krommen der orde $(n\,p + k)$, die in een plethorisch punt a_0 der n^{de} orde $3\,(n\,p + k) - 1$ punten met K_3 gemeen hebben, behoort elke kromme, die uit eene p-maal getelde, volledig rakende K_n en eene $(3\,k - 1)$—puntig osculeerende K_k is samengesteld; hieruit volgt, dat $r_{n\,p + k} \equiv r_k$.

In het bijzonder kan een plethorisch punt der orde n steeds beschouwd worden als plethorisch punt der orde np. De $3n$ punten eener groep zijn dan ook niet alle eigenlijke plethorische punten der orde n; steeds bevinden zich onder hen de drie buigpunten. Kötter heeft aangetoond, dat het aantal eigenlijke plethorische punten der n^{de} orde $\varphi(n)$ bepaald wordt door eene der formules:

$$\varphi\,(2m+1) = 3\,\tau\,(2m+1)$$
$$\varphi\,(4m+2) = 9\,\tau\,(2m+1)$$
$$\varphi\,[2^p\,(2m+1)] = 2^p \cdot 3\,\tau\,(2m+1)$$

waar τ het teeken voor het totient is *).

Daar r_1, r_n, s_{n+1} steeds collineair zijn, volgt uit $a_0 \equiv r_n$ en $r_1 \equiv a_1$, dat $s_{n+1} = a_0$; daar dan verder s_{n+1}, s_k, r_k in eene rechte liggen, wordt $s_k \equiv r_{n+1-k}$.

14. *Voor een plethorisch punt der n^{de} orde is $s_{np+k} \equiv s_k$, $r_{np+k} \equiv r_k$, $s_k \equiv r_{n+1-k}$ en zijn r_k, r_l en $r_{n+1-k-l}$ collineair.*

Duidt men het punt $s_k \equiv r_{n+1-k}$ door α_0, het restpunt der p^{de} orde van α_0 door ϱ_p, het centrum der p^{de} orde door σ_p aan, dan heeft men $\varrho_1 \equiv$ tang. $\alpha_0 \equiv r_{2k-1}$,
en $\sigma_2 \equiv$ tang. $\varrho_1 \equiv s_{4k-2}$; voorts,
omdat $\alpha_0\ \sigma_2\ \varrho_2$ collineair zijn, $\varrho_2 \equiv r_{5k-3}$,
$\sigma_3 \equiv$ tang. $\varrho_2 \equiv s_{7k-4}$,
$\varrho_3 \equiv$ tang. $\gamma_2 \equiv r_{8k-5}$.

Algemeen is

15. $\varrho_p \equiv r_{2k-1+(p-1)(3k-2)} \equiv r_{p(3k-2)-(k-1)}$.

Immers, neemt men aan, dat deze betrekking voor eenige waarde van p geldt, dan blijkt uit de collineaire ligging van ϱ_1, ϱ_p en γ_{p+1}, dat $\gamma_{p+1} \equiv s_{2(2k-1)+(p-1)(3k-2)} \equiv s_{k+p(3k-2)}$, en uit de collineaire ligging van α_0, γ_{p+1} en ϱ_{p+1}, dat $\varrho_{p+1} \equiv r_{2k-1+p(3k-2)}$; daar 15. voor $p = 1$ waar is, geldt zij dus algemeen.

Nu is $\varrho_n \equiv r_{n(3k-2)-(k-1)} \equiv r_{n+1-k} \equiv \alpha_0$. Omdat elk restpunt van α_0 tevens een restpunt van a_0 is, volgt hieruit:

---

*) T. a. p. bl. 46.

16. *De* $(n-1)$ *verschillende restpunten van een plethorisch punt der* n^{de} *orde zijn eveneens plethorische punten der* n^{de} *orde en vormen met het eerste eene uit n punten samengestelde groep* R_n. *)

Is het bij $a_0 \equiv r_{mp}$ behoorende punt $s_k \equiv r_{mp+1-k}$ een plethorisch punt der p^{de} orde, dus $\varrho_p \equiv r_{p(3k-2)-(k-1)} \equiv r_{mp+1-k}$, dan heeft men $p(3k-2)-(k-1) \equiv mp+1-k$ (mod mp) of $3k \equiv 2$ (mod m).

Voor $m = 3q+1$ wordt dus $k \equiv q+1$ (mod $3q+1$), voor $m = 3q-1$ wordt $k \equiv 2q$ (mod $3q-1$), voor $m = 3q$ heeft de congruentie geen wortel.

Hieruit blijkt, dat de plethorische punten der orde 3^s, wier aantal 2. 3^s bedraagt, verdeeld zijn over twee gelijkwaardige groepen R_{3^s}; eene derde groep wordt gevormd door de plethorische punten der orden 3^t, ($t = 0, 1, 2$ tot $(s-1)$); zij bestaat uit groepen R van lager orde.

17. R_{3^s} *bevat enkel eigenlijke plethorische punten;* $R_{9q\pm3}$ *bevat drie plethorische punten der derde orde;* $R_{3q\pm1}$ *bezit een buigpunt.*

Is $a_0 \equiv r_{2m}$ en $\alpha_0 \equiv s_{2m} \equiv r_1$, dan wordt $\varrho_m \equiv r_{2m(3m-2)+1} \equiv a_1$; a_1 is dus een plethorisch punt der orde m. Stelt men $s_{m+1} \equiv \alpha'_0$ dan wordt $\varrho'_m \equiv r_{2m+1+(m-1)(3m+1)} \equiv r_{3m^2}$, d. w. z. ϱ'_m is identiek met r_m of met r_{2m} naar gelang m oneven of even is; in het eerste geval is r_m een plethorisch punt der m^{de} orde, in het tweede een plethorisch punt der orde $2m$.

18. *De plethorische punten der orde* $2m$ *zijn de antitangentiaalpunten van de plethorische punten der* m^{de} *orde; naar mate m oneven of even is, geeft elk punt der* m^{de} *orde drie of vier punten der orde* $2m$.

---

*) Kötter, t. a. p. bl. 47: „Aus einem eigentlichen Wendepunct n^{ter} Ordnung kann man mit Hülfe des Lineals $(n-1)$ andere eigentliche oder uneigentliche Wendepuncte derselben Ordnung ableiten." De groep R_n verschilt natuurlijk van de boven beschouwde groep P_n.

§ III.

Tangentiaalveelhoeken.

Blijkens tabel (II) zal een plethorisch punt der orde $\frac{1}{3}$ $(2^{2k-1} + 1)$ met zijn $(2k-1)^{\text{ste}}$ tangentiaalpunt, een plethorisch punt der orde $\frac{1}{3}$ $(2^{2k} - 1)$ met zijn $2k^{\text{de}}$ tangentiaalpunt samenvallen; daarbij is het onverschillig of het bedoelde punt een eigenlijk of oneigenlijk plethorisch punt der genoemde orde is. In beide gevallen ontstaat een veelhoek, die tegelijk *in* en *om* K_3 is beschreven, en *tangentiaalveelhoek* zal genoemd worden. Kötter *) vat deze beide gevallen samen tot den regel:

19. *Elk hoekpunt van een tangentiaalveelhoek met n zijden is een eigenlijk of oneigenlijk plethorisch punt der orde* $\frac{1}{3}$ $(2^n - (-1)^n)$.

Doorloopt a_0 de serpentine in eene bepaalde richting, dan verplaatst a_{2k-1} zich 2^{2k-1} maal in tegengestelden zin, valt dus $(2^{2k-1} + 1)$ maal met a_0 samen, terwijl a_{2k} dien tak 2^{2k} maal in dezelfde richting beschrijft, derhalve $(2^{2k} - 1)$ maal met a_0 vereenigd wordt. Zoo komt men tot de door Durège †) in anderen vorm gegeven eigenschap:

20. *Het aantal toppen van tangentiaal-n-hoeken bedraagt* $2^n - (-1)^n$; *daaronder zijn evenwel punten, behoorende tot veelhoeken met een aantal zijden gelijk aan een deeler van n, en bovendien de drie buigpunten.*

Daar $a_4 \equiv s_6$ en $a_0 \equiv s_{n+1}$, is elk hoekpunt van een tangentiaalvierhoek een plethorisch punt der 5de orde. §) Het buigpunt a_5, dat met de toppen van dien vierhoek eene R_5 vormt, is hun gemeenschappelijk restpunt r_2; wegens de collineaire ligging van a_0, a_2, en r_2 is het in het snijpunt van $a_0 a_2$ en $a_1 a_3$ gelegen. De twaalf eigenlijke plethorische punten der vijfde orde vormen eene 12_3, welke

---

*) t. a. p. bl. 50. In plaats van plethorisch punt staat daar Wendepunct.

†) „Ueber fortgesetztes Tangentenziehen” (*Math. Ann.* I).

§) De beide tangentiaaldriehoeken vormen met de buigpunten eene desmische 9_3. (J. de Vries „Over de desmische cf. 9_3.” *Versl. en Meded.* deel VI, bl. 175).

uit een der tangentiaalvierhoeken T_4 ontstaat door toepassing van de door mij elders *) bewezen eigenschap:

21. *Vult men de toppen van een tangentiaal-n-hoek tot inflexietripels aan, dan vormen deze n tripels eene cf.* $3n_3$, *welke uit een cyclus van n driehoeken zoodanig is samengesteld, dat elke driehoek in den voorafgaanden en om den volgenden is beschreven, terwijl de* $2n$ *toegevoegde punten tot twee nieuwe tangentiaal-n-hoeken behooren. Deze* $3n_3$ *is tetratrigonisch en levert door afscheiding van eene hoofd-n-zijde eene cf.* $(3n_2, 2n_3)$.

In het vervolg zal ik deze $3n_3$ als *splitsbare* tetratrigonische cf. aanduiden om haar te onderscheiden van de *onsplitsbare* tetratrigonische $3n_3$, welke slechts neven-$(n-1)$-zijden bezit, en waarvan de lijnen door $a_i\ b_i\ c_{i+1}$, $b_i\ c_i\ a_{i+1}$, $c_i\ a_i\ b_{i+1}$, $(i = 1$ tot $n-1)$ met de drie lijnen $a_n\ b_n\ a_1$, $b_n\ c_n\ b_1$, $c_n\ a_n\ c_1$ worden voorgesteld.

De drie bestaanbare T_4 eener K_3 vormen, volgens N⁰. 21, de splitsbare tetratrigonische 12_3 van tabel (III).

$a_1\ b_1\ c_2$	$a_2\ b_1\ c_1$	$a_1\ b_2\ c_1$	
$a_2\ b_2\ c_3$	$a_3\ b_2\ c_2$.	$a_2\ b_3\ c_2$	. . . . (III).
$a_3\ b_3\ c_4$	$a_4\ b_3\ c_3$	$a_3\ b_4\ c_3$	
$a_4\ b_4\ c_1$	$a_1\ b_4\ c_4$	$a_4\ b_1\ c_4$	

Blijkbaar zijn $a_1\ b_1\ c_1$ en $a_3\ b_3\ c_3$ connexe inflexietripels, en geldt hetzelfde voor $a_2\ b_2\ c_2$ en $a_4\ b_4\ c_4$. Tabel (IV) bevat de beide desmische 9_3, welke door de twee connexe paren met de buigpunten $a_5\ b_5\ c_5$ worden gevormd.

$a_1\ a_3\ a_5$	$a_1\ b_3\ c_5$	$a_1\ b_5\ c_3$	
$b_1\ b_3\ b_5$	$a_3\ b_5\ c_1$	$a_3\ b_1\ c_5$	
$c_1\ c_3\ c_5$	$a_5\ b_1\ c_3$	$a_5\ b_3\ c_1$	
			. . . (IV).
$a_2\ a_4\ a_5$	$a_2\ b_4\ c_5$	$a_2\ b_5\ c_4$	
$b_2\ b_4\ b_5$	$a_4\ b_5\ c_2$	$a_4\ b_2\ c_5$	
$c_2\ c_4\ b_5$	$a_5\ b_2\ c_4$	$a_5\ b_4\ c_2$	

*) t. a. p. bl. 183.

Samen stellen de tabellen (III) en (IV) eene cf. $(15_6, 30_3)$ met driepuntige diagonaal $a_5\ b_5\ c_5$ voor.

22. *De twaalf plethorische punten der vijfde orde behooren tot eene splitsbare tetratrigonische* 12_3, *waaruit door toevoeging van de drie buigpunten eene* $(15_6, 30_3)$ *ontstaat.*

De cf. $(15_5, 25_3)$, welke uit de bedoelde $(15_6, 30_3)$ te voorschijn komt, als de zes diagonalen der drie T_4 weggelaten worden en men de punten a_5, b_5 en c_5 in de figuur opneemt, is blijkens 9. uit drie osculatiegroepen der tweede orde samengesteld; tabel (V) geeft dus de notatie voor *elke* uit drie O_2 gevormde $(15_5, 25_3)$.

$a_1\ b_1\ c_2$	$a_2\ b_2\ c_3$	$a_3\ b_3\ c_4$	$a_4\ b_4\ c_1$	$a_5\ b_5\ c_5$	
$a_1\ b_2\ c_1$	$a_2\ b_3\ c_2$	$a_3\ b_4\ c_3$	$a_4\ b_5\ c_2$	$a_5\ b_1\ c_3$	
$a_1\ b_3\ c_5$	$a_2\ b_4\ c_5$	$a_3\ b_5\ c_1$	$a_4\ b_1\ c_4$	$a_5\ b_2\ c_4$	(V).
$a_1\ b_4\ c_4$	$a_2\ b_5\ c_4$	$a_3\ b_1\ c_5$	$a_4\ b_2\ c_5$	$a_5\ b_3\ c_1$	
$a_1\ b_5\ c_3$	$a_2\ b_1\ c_1$	$a_3\ b_2\ c_2$	$a_4\ b_3\ c_3$	$a_5\ b_4\ c_2$	

Elke lijn dezer cf. heeft tot restfiguur eene met de cf. van tabel (III) gelijksoortige 12_3.

Laat men c_1 met a_1, c_2 met a_2, c_3 met a_3, c_4 met a_4, c_5 met a_5 samenvallen, waardoor b_2, b_3, b_4, b_1, b_5 achtereenvolgens de tangentiaalpunten van a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 worden, dan gaat tabel (V) over in (VI), welke de punten b_i als neventoppen van den volledigen vijfhoek a_i doet kennen.

$a_1\ a_2\ b_1$	$a_3\ a_4\ b_3$	
$a_1\ a_3\ b_5$	$a_2\ a_4\ b_5$	
$a_1\ a_4\ b_4$	$a_2\ a_3\ b_2$	. . . (VI).
$a_1\ a_5\ b_3$	$a_3\ a_5\ b_1$	
$a_2\ a_5\ b_4$	$a_4\ a_5\ b_2$	

23. *Elke in* K_3 *beschreven splitsbare tetratrigonische* 12_3 *behoort tot eene door drie osculatiegroepen der tweede orde gevormde* $(15_5, 25_3)$.

Immers, snijdt K_3 de lijn $b_1\,c_3$ in a_5, dan volgt uit:

$$\left\{\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_2 \\ b_2 & c_3 & a_2 \\ c_1 & a_5 & b_3 \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix} a_2 & b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 & a_4 \\ c_2 & a_5 & b_4 \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_2 \\ b_4 & c_3 & a_3 \\ c_4 & a_5 & b_2 \end{matrix}\right\},$$

dat de lijnen $b_3\,c_1$, $b_4\,c_2$, $b_2\,c_4$ door a_5 gaan. Op dergelijke wijze blijkt, dat de lijnen $a_1\,c_3$, $a_2\,c_4$, $a_3\,c_1$ en $a_4\,c_2$ in een punt b_5 van K_3, en de lijnen $a_1\,b_3$, $a_2\,b_4$, $a_3\,b_1$, $a_4\,b_2$ in een c_5 van K_3 samenkomen. Ten slotte zijn blijkens

$$\left\{\begin{matrix} b_1 & c_2 & a_1 \\ c_3 & a_4 & b_3 \\ a_5 & b_5 & c_5 \end{matrix}\right\}$$

de punten a_5, b_5, c_5 collinair met eene lijn, die de figuur tot eene $(15_5, 25_3)$ aanvult. Verder leert

$$\left\{\begin{matrix} b_1 & c_2 & a_1 \\ c_1 & b_2 & a_1 \\ a_2 & a_3 & tg a_1 \end{matrix}\right\}$$

dat het tangentiaalpunt van a_1 op $a_2\,a_3$, dus algemeen het tangentiaalpunt van p_i op de lijn $p_{i+1}\,p_{i+2}$ ligt, waar $p = a$, b of c en $i = 1, 2, 3, 4$ is.

Blijkens

$$\left\{\begin{matrix} a_1 & a_2 & tg.\,a_4 \\ tg.\,tg.\,a_1 & tg.\,a_2 & tg.\,a_3 \\ r_2 & a_2 & tg.tg.a_2 \end{matrix}\right\}$$

hebben a_i en a_k hetzelfde tweede restpunt, behooren dus tot eene O_2; en hierdoor is de waarheid van N⁰. 22 gestaafd.

Door afscheiding van de hoofdvijfzijde

$$(a_1\;b_1\;c_2,\; a_2\;b_2\;c_3,\; a_3\;b_3\;c_4,\; a_4\;b_4\;c_1,\; a_5\;b_5\;c_5)$$

ontstaat uit de $(15_5, 25_3)$ van tabel (V) eene $(15_4, 20_3)$, waaruit door afzondering der hoofdvijfzijde

$(a_1\ b_5\ c_3,\ a_2\ b_4\ c_5,\ a_3\ b_2\ c_2,\ a_4\ b_1\ c_4,\ a_5\ b_3\ c_1)$

eene 15_3 kan gevonden worden.

Is $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5$ een tangentiaalvijfhoek, dan snijdt $a_1\ a_3$ de K_3 in een punt α_5, dat met zijn vijfde tangentiaalpunt moet samenvallen, omdat dit het geval is voor a_1 en a_3; het behoort dus tot een tweeden tangentiaalvijfhoek $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5$. De uit $a_1\ a_2$ en $a_3\ a_4$ gevormde K_2 snijdt K_3 nog in a_1 en a_3, dus is α_5 het tegenpunt van $a_1\ a_2\ a_3\ a_4$; derhalve liggen de punten a_2 en α_3, welke K_3 nog gemeen heeft met de uit $a_2\ a_3$ en $a_4\ a_1$ samengestelde K_2, met α_5 collineair. De beide vijfhoeken a_i en α_i vormen dus de door tabel (VII) voorgestelde 10_3.

$a_1\ a_3\ \alpha_5$	$\alpha_1\ \alpha_3\ a_5$	
$a_2\ a_4\ \alpha_1$	$\alpha_2\ \alpha_4\ a_1$	
$a_3\ a_5\ \alpha_2$	$\alpha_3\ \alpha_5\ a_2$	. . . . . (VII).
$a_4\ a_1\ \alpha_3$	$\alpha_4\ \alpha_1\ a_3$	
$a_5\ a_2\ \alpha_4$	$\alpha_5\ \alpha_2\ a_4$	

Daar elk punt dezer 10_3 tot restfiguur heeft een cf. driehoek, is zij identiek met de door KANTOR *) als $10_3\ A$ beschreven cf.

Is $\mathfrak{a}_i$ het snijpunt van K_3 met $a_i\ \alpha_i$ ($i = 1$ tot 5) dan volgt uit:

$$\left\{\begin{matrix} a_1 & \alpha_1 & \mathfrak{a}_1 \\ \alpha_2 & a_2 & \mathfrak{a}_2 \\ \alpha_4 & a_4 & \mathfrak{a}_4 \end{matrix}\right\},$$

dat $\mathfrak{a}_1\ \mathfrak{a}_2\ \mathfrak{a}_4$ collineair zijn; dit geldt dan voor alle drietallen van punten $\mathfrak{a}_i$, die door cyclische verschuiving uit dit drietal ontstaan; alle punten $\mathfrak{a}_i$ zijn dus tot een buigpunt $\mathfrak{a}$ vereenigd.

De zes tangentiaalvijfhoeken, welke blijkens $a_5 \equiv r_{11}$,

---

*) *Die Conf.* $(3, 3)_{10}$ (*Wiener Sitz. ber.* Bd. 84). KANTOR bewijst, dat elke in eene K_3 beschreven 10_3 *A* uit twee tangentiaalvijfhoeken bestaat.

uit de dertig eigenlijke plethorische punten de 11de orde kunnen samengesteld worden, behooren tot twee cf. 15_3, die door toepassing van N^0. 21 uit de punten a_i en α_i ontstaan en achtereenvolgens door

$$\left\{\begin{matrix} a_i\ b_i\ c_{i+1} \\ a_{i+1}\ b_i\ c_i \\ a_i\ b_{i+1}\ c_i \end{matrix}\right. \quad \text{en} \quad \left\{\begin{matrix} \alpha_i\ \beta_i\ \gamma_{i+1} \\ \alpha_{i+1}\ \beta_i\ \gamma_i \\ \alpha_i\ \beta_{i+1}\ \gamma_i \end{matrix}\right. \quad (i = 1 \text{ tot } 5)(\text{VIII})$$

worden voorgesteld.

De vijf paren van connexe inflexietripels $a_i\ b_i\ c_i$, $\alpha_i\ \beta_i\ \gamma_i$, bepalen met de buigpunten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ vijf door tabel (IX) voorgestelde desmische 9_3.

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_i & \mathfrak{a} & \alpha_i & a_i & \mathfrak{b} & \gamma_i & a_i & \mathfrak{c} & \beta_i \\ b_i & \mathfrak{b} & \beta_i & b_i & \mathfrak{c} & \alpha_i & b_i & \mathfrak{a} & \gamma_i \\ c_i & \mathfrak{c} & \gamma_i & c_i & \mathfrak{a} & \beta_i & c_i & \mathfrak{b} & \alpha_i \end{array} \quad (\text{IX}).$$

$$(i = 1 \text{ tot } 5).$$

De punten der beide cf. 15_3 worden nog door 10 andere desmische 9_3 verbonden. Immers de lijnen $a_i\ a_{i+2}\ \alpha_{i+4}$, $b_i\ b_{i+2}\ \beta_{i+4}$ en $c_i\ c_{i+2}\ \gamma_{i+4}$ van tabel (VII) geven aanleiding tot de cf. van tabel (X), waar $i = 1$ tot 5.

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_i & a_{i+2} & \alpha_{i+4} & a_i & b_{i+2} & \gamma_{i+4} & a_i & \beta_{i+4} & c_{i+2} \\ b_i & b_{i+2} & \beta_{i+4} & a_{i+2} & \beta_{i+4} & c_i & a_{i+2} & b_i & \gamma_{i+4} \\ c_i & c_{i+2} & \gamma_{i+4} & \alpha_{i+4} & b_i & c_{i+2} & \alpha_{i+4} & b_{i+2} & c_i \end{array} \quad (\text{X}).$$

Vervanging van a door α, van b door β, van c door γ geeft de tabel voor de overige vijf 9_3.

24. *De dertig plethorische punten der elfde orde vormen twee splitsbare cf.* 15_3, *die deel uitmaken van eene* $(30_{12}, 120_3)$, *welke behalve hen tien desmische* 9_3 *bevat.*

Verwijdert men uit de $(30_9, 90_3)$, waartoe deze tien 9_3 vereenigd zijn, de tien hoofddriezijden:

$$\begin{array}{lll|l} a_i & a_{i+2} & \alpha_{i+4} & \alpha_i \;\; \alpha_{i+2} \;\; a_{i+4} \\ b_i & b_{i+2} & \beta_{i+4} & \beta_i \;\; \beta_{i+2} \;\; b_{i+4} \;\; (i=1 \text{ tot } 5), \\ c_i & c_{i+2} & \gamma_{i+4} & \gamma_i \;\; \gamma_{i+2} \;\; c_{i+4}, \end{array}$$

dan ontstaat eene $(30_6, 60_3)$, welke door toevoeging van de beide 15_3, (tabel VIII), van de vijf desmische 9_3 van (IX) (met uitzondering van de lijnen a_i 𝔞 α_i, b_i 𝔟 β_i, c_i 𝔠 γ_i) en de lijn 𝔞 𝔟 𝔠, in eene $(33_{11}, 121_3)$ verandert. Volgens N⁰. 9 vormen deze 33 punten drie O_4 met de collineaire restpunten 𝔞 𝔟 𝔠.

25. *De cf.* $(33_{11}, 121_3)$, *welke uit drie osculatiegroepen der vierde orde kan samengesteld worden, geeft aanleiding tot de tabel:*

$$\begin{array}{|lll|lll|lll|lll|} a_i & b_{i+2} & \gamma_{i+4} & \alpha_i & \beta_{i+2} & c_{i+4} & a_i & b_{i-2} & \gamma_{i+2} & \alpha_i & \beta_{i-2} & c_{i+2} \\ b_i & c_{i+2} & \alpha_{i+4} & \beta_i & \gamma_{i+2} & a_{i+4} & b_i & c_{i-2} & \alpha_{i+2} & \beta_i & \gamma_{i-2} & a_{i+2} \\ c_i & a_{i+2} & \beta_{i+4} & \gamma_i & \alpha_{i+2} & b_{i+4} & c_i & a_{i-2} & \beta_{i+2} & \gamma_i & \alpha_{i-2} & b_{i+2} \end{array}$$

(XI)

$$\begin{array}{|lll|lll|lll|lll|} a_i & b_i & c_{i+1} & \alpha_i & \beta_i & \gamma_{i+1} & a_i & 𝔟 & \gamma_i & a_i & 𝔠 & \beta_i \\ a_i & b_{i+1} & c_i & \alpha_i & \beta_{i+1} & \gamma_i & b_i & 𝔠 & \alpha_i & b_i & 𝔞 & \gamma_i \\ a_{i+1} & b_i & c_i & \alpha_{i+1} & \beta_i & \gamma_i & c_i & 𝔞 & \beta_i & c_i & 𝔟 & \alpha_i \end{array}$$

| 𝔞 𝔟 𝔠 |

$(i = 1 \text{ tot } 5)$.

Daar $a_6 \equiv s_{22}$, zullen a_6 en $a_0 \equiv s_1$ samenvallen, zoodra $a_0 \equiv r_{21}$, dus wanneer a_0 een plethorisch punt der 21ste of der 7de orde is. In elk dezer beide gevallen zijn de plethorische punten in tangentiaalzeshoeken gerangschikt, en is de lijn $a_i\ a_{i+3}$ identiek met haar derde satelliet $a_{i+3}\ a_i$, zoodat haar snijpunt met K_3 òf een buigpunt, òf een plethorisch punt der 3de orde is.

Volgens N⁰. 17 bestaat R_7 uit 6 eigenlijke plethorische punten en een buigpunt, en bevat R_{21} een driehoek van Hart, zoodat de overige 18 punten drie tangentiaalzeshoeken moeten vormen.

Voor R_7 heeft men $r_5 \equiv \mathfrak{a}$ (buigpunt) en

$a_0 \equiv r_7$	$a_3 \equiv r_3$
$a_1 \equiv r_1$	$a_4 \equiv r_2$
$a_2 \equiv r_6$	$a_5 \equiv r_4$

Blijkens N°. 14 volgt hieruit dat $a_1\ a_3\ a_5$ en evenzoo $a_2\ a_4\ a_6$ collineair zijn.

26. *De achttien plethorische punten der zevende orde vormen drie paren van connexe inflexietripels, welke tot eene splitsbare tetratrigonische* 18_3 *met de lijnen* $a_i\ b_i\ c_{i+1}$, $a_i\ b_{i+1}\ c_i$, $a_{i+1}\ b_i\ c_i$ $(i = 1$ *tot* $6)$ *en twee desmische* 9_3 *met de lijnen*

$a_i\ a_{i+2}\ a_{i+4}$	$a_i\ b_{i+2}\ c_{i+4}$	$a_i\ b_{i+4}\ c_{i+2}$
$b_i\ b_{i+2}\ b_{i+4}$	$a_{i+2}\ b_{i+4}\ c_i$	$a_{i+2}\ b_i\ c_{i+4}$
$c_i\ c_{i+2}\ c_{i+4}$	$a_{i+4}\ b_i\ c_{i+2}$	$a_{i+4}\ b_{i+2}\ c_i$

vereenigd zijn; deze drie cf. vormen samen eene $(18_6, 36_3)$.

De lijnen $a_i\ a_{i+3}\ \mathfrak{a}$, $b_i\ b_{i+3}\ \mathfrak{b}$, $c_i\ c_{i+3}\ \mathfrak{c}$ bepalen drie desmische 9_3, welke behalve deze lijnen de lijnen

$a_i\ \mathfrak{b}\ c_{i+3}$	$a_i\ \mathfrak{c}\ b_{i+3}$
$b_i\ \mathfrak{c}\ a_{i+3}$	$b_i\ \mathfrak{a}\ c_{i+3}$
$c_i\ \mathfrak{a}\ b_{i+3}$	$c_i\ \mathfrak{b}\ a_{i+3}$

bevatten.

De drie centraalgroepen S_3, waaruit volgens N°. 10 de drie R_7 bestaan, vormen eene $(21_7, 49_3)$, waartoe behalve de lijn $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}$, de genoemde lijnen, met uitzondering van de zes lijnen $p_i\ p_{i+2}\ p_{i+4}$ $(p = a, b, c$ en $i = 1$ en $2)$, behooren.

27. *Drie centraalgroepen der derde orde, waarvoor de punten* s_3 *collineair liggen, vormen eene* $(21_7, 49_3)$ *met de lijnen* $a_i\ b_{i+2}\ c_{i+4}$, $a_i\ b_{i+4}\ c_{i+2}$, $a_i\ \mathfrak{b}\ c_{i+3}$, $b_i\ \mathfrak{c}\ a_{i+3}$, $c_i\ \mathfrak{a}\ b_{i+3}$, $a_i\ b_i\ c_{i+1}$, $a_{i+1}\ b_i\ c_i$, $a_i\ b_{i+1}\ c_i$, $(i = 1$ *tot* $6)$ *en de lijn* $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}$.

Voor $a_0 \equiv r_{21} \equiv a_6$ heeft men:

$a_1 \equiv r_1$	$b_1 \equiv r_8$	$c_1 \equiv r_{15}$
$a_2 \equiv r_{20}$	$b_2 \equiv r_6$	$c_2 \equiv r_{13}$
$a_3 \equiv r_3$	$b_3 \equiv r_{10}$	$c_3 \equiv r_{17}$
$a_4 \equiv r_{16}$	$b_4 \equiv r_2$	$c_4 \equiv r_9$
$a_5 \equiv r_{11}$	$b_5 \equiv r_{18}$	$c_5 \equiv r_4$
$a_6 \equiv r_{21}$	$b_6 \equiv r_7$	$c_6 \equiv r_{14}$
$h_1 \equiv r_5$	$h_2 \equiv r_{12}$	$h_3 \equiv r_{19}$

(XII)

De laatste drie punten vormen een tangentiaaldriehoek. Volgens N⁰. 14 is a_1 collineair met de puntenparen $r_i\, r_{21-i}$ ($i = 2$ tot 10). Met het oog op tabel (XII) vindt men hieruit, dat de punten a_i, b_i, c_i en h_i door de volgende lijnen verbonden worden:

$a_i \quad b_i \quad c_{i+1}$	$a_i \quad a_{i+3} \quad h_i$
$a_i \quad b_{i+1} \quad c_i$	$b_i \quad b_{i+3} \quad h_{i+1}$
$a_{i+1} \quad b_i \quad c_i$	$c_i \quad c_{i+3} \quad h_{i+2}$
$a_i \quad a_{i+2} \quad b_{i+4}$	$a_i \quad b_{i+3} \quad h_{i+2}$
$b_i \quad b_{i+2} \quad c_{i+4}$	$b_i \quad c_{i+3} \quad h_i$
$c_i \quad c_{i+2} \quad a_{i+4}$	$c_i \quad a_{i+3} \quad h_{i+1}$

. . . . (XIII).

($i = 1$ tot 6).

De lijnen $a_i\, b_i\, c_{i+1}$, $a_i\, b_{i+1}\, c_i$, $a_{i+1}\, b_i\, c_i$ vormen eene splitsbare tetratrigonische 18_3; de overige lijnen, welke $a_i\, b_i\, c_i$ onderling verbinden, bepalen twee desmische 9_3, de eene met de driehoeken $a_1\, a_3\, a_5$, $b_1\, b_3\, b_5$, $c_1\, c_3\, c_5$, de andere met $a_2\, a_4\, a_6$, $b_2\, b_4\, b_6$, $c_2\, c_4\, c_6$. Ten slotte zijn de punten $h_1\, h_2\, h_3$ met a_i, b_i en c_i tot drie desmische 9_3 vereenigd, waarvan eene de punten a_1, a_4, b_1, b_4, c_1 en c_4 bevat.

28. *Elke der beide groepen van eigenlijke plethorische punten der orde* 21 *bestaat uit drie tangentiaalzeshoeken en een tangentiaaldriehoek; de toppen van den laatsten liggen op*

de hoofddiagonalen der zeshoeken, die ten opzichte van elkander zoodanig geplaatst zijn, dat de overige diagonalen van elken zeshoek de toppen van een tweeden zeshoek dragen, zoodat zij tot een cyclus vereenigd zijn. De geheele groep geeft aanleiding tot eene $(21_9, 63_3)$, *die in eene* 18_3 *en vijf desmische* 9_3 *kan ontleed worden; zondert men den tangentiaaldriehoek af, dan ontstaat eene* $(18_6, 36_3)$.

De lijn, welke een eigenlijk plethorisch punt der orde 21 verbindt met een dergelijk punt der tweede R_{21}, gaat òf door een buigpunt, òf door een plethorisch punt der 7[de] orde. De toppen der drie tangentiaalzeshoeken der eerste soort vormen dus met de toppen van de zes tangentiaalzeshoeken der tweede soort eene $(54_{15}, 270_3)$.

Daar $a_7 \equiv r_{43}$, zijn de 126 plethorische punten der 43[ste] orde gerangschikt in drie groepen van zes tangentiaalzevenhoeken. Is $a_0 \equiv a_7$ een punt van zulk een T_7, dan valt $r_{29} \equiv tg.\ r_{29}$ met het buigpunt der R_{43} samen; de overige punten der groep behooren tot de zes in tabel (XIV) voorgestelde T_7.

$a_1 \equiv r_1$	$b_1 \equiv r_{40}$	$c_1 \equiv r_{17}$	$\alpha_1 \equiv r_{14}$	$\beta_1 \equiv r_{18}$	$\gamma_1 \equiv r_{41}$	
$a_2 \equiv r_{42}$	$b_2 \equiv r_7$	$c_2 \equiv r_{10}$	$\alpha_2 \equiv r_{16}$	$\beta_2 \equiv r_8$	$\gamma_2 \equiv r_5$	
$a_3 \equiv r_3$	$b_3 \equiv r_{30}$	$c_3 \equiv r_{24}$	$\alpha_3 \equiv r_{12}$	$\beta_3 \equiv r_{28}$	$\gamma_3 \equiv r_{34}$	
$a_4 \equiv r_{38}$	$b_4 \equiv r_{27}$	$c_4 \equiv r_{39}$	$\alpha_4 \equiv r_{20}$	$\beta_4 \equiv r_{31}$	$\gamma_4 \equiv r_{19}$	(XIV)
$a_5 \equiv r_{11}$	$b_5 \equiv r_{33}$	$c_5 \equiv r_9$	$\alpha_5 \equiv r_4$	$\beta_5 \equiv r_{25}$	$\gamma_5 \equiv r_6$	
$a_6 \equiv r_{22}$	$b_6 \equiv r_{21}$	$c_6 \equiv r_{26}$	$\alpha_6 \equiv r_{36}$	$\beta_6 \equiv r_{37}$	$\gamma_6 \equiv r_{32}$	
$a_7 \equiv r_{43}$	$b_7 \equiv r_2$	$c_7 \equiv r_{35}$	$\alpha_7 \equiv r_{15}$	$\beta_7 \equiv r_{13}$	$\gamma_7 \equiv r_{23}$	

Deze 42 punten vormen twee groepen van 21 punten, die uit het buigpunt in elkander geprojecteerd worden, en wel a_i in α_i, b_i in β_i, c_i in γ_i. Uit (XIV) blijkt gemakkelijk dat a_1 met de paren $a_3\, b_1$, $b_5\, c_2$, $c_1\, c_6$ en $a_6\, b_6$ collineair ligt.

29. *Drie tangentiaalzevenhoeken eener* R_{43} *bepalen eene* $(21_4, 28_3)$, *welke uit het buigpunt der groep in eene gelijksoortige, door de overige drie zevenhoeken gevormde cf. geprojecteerd wordt. Deze beide cf. zijn vereenigd in eene cf.*

$(42_{19}, 266_3)$. *De toppen der achttien zevenhoeken, welke* K_3 *bezit, behooren tot eene* $(126_{60}, 2520_3)$, *welke uit drie* $(42_{19}, 266_3)$, *zes splitsbare tetratrigonische* 21_3 *en* 266 *desmische* 9_3 *is samengesteld.*

Daar de afleiding der laatstgenoemde eigenschappen op het voetspoor der bij T_6 gebezigde handelwijze kan geschieden, laat ik haar hier, en in het vervolg, achterwege.

Omdat $a_8 \equiv s_{86}$, zijn de plethorische punten der orde 85 en de plethorische punten der orde 17 in tangentiaalachthoeken vereenigd; elke der drie R_{85} bevat een buigpunt, eenen T_4 (daar R_5 tot R_{85} behoort), twee T_8 der eerste soort (behoorende tot R_{17}) en acht T_8 der tweede soort, waarvan de toppen plethorische punten der orde 85 zijn.

Voor $1_0 \equiv r_{17}$ is $r_6 \equiv s_{12}$ met een buigpunt identiek, waardoor de hoofddiagonalen der beide tot R_{17} behoorende achthoeken gaan. De toppen dezer T_8 hangen op de volgende wijze samen met de restpunten van 1_0.

$$\begin{array}{ll|ll} 1_1 \equiv r_1 & & 2_1 \equiv r_{15} \\ 1_2 \equiv r_{16} & & 2_2 \equiv r_5 \\ 1_3 \equiv r_3 & & 2_3 \equiv r_8 \\ 1_4 \equiv r_{12} & & 2_4 \equiv r_2 \\ 1_5 \equiv r_{11} & & 2_5 \equiv r_{14} \\ 1_6 \equiv r_{13} & & 2_6 \equiv r_7 \\ 1_7 \equiv r_9 & & 2_7 \equiv r_4 \\ 1_8 \equiv r_{17} & & 2_8 \equiv r_{10} \end{array} \quad \ldots\ldots (XV).$$

Uit deze tabel vindt men gemakkelijk, dat de beide T_8 aanleiding geven tot eene cf. $(16_6, 32_3)$ met de lijnen:

$$\left\{ \begin{array}{lll} 1_i & 1_{i+2} & 2_{i+4} \\ 1_i & 1_{i+3} & 2_{i+1} \\ 2_i & 2_{i+2} & 1_{i+3} \\ 2_i & 2_{i+3} & 1_i \end{array} \right.$$

Volgens N°. 9 is elke der drie R_{17} tevens eene O_6 met het buigpunt als gemeenschappelijk restpunt; de samenstelling der $(51_{17}, 289_3)$, tot welke deze drie O_6 behooren, wordt langs soortgelijken weg gevonden als boven voor de uit drie O_4 bestaande cf. is geschied. Tot haar vorming dragen bij: 1°. twee splitsbare tetragonische 24_3, elke uit drie T_8 en acht inflexietripels bestaande, 2°. 32 desmische 9_3, elke van de hoofddriezijde beroofd, welke aan de drie $(16_6, 32_3)$ ontleend is, 3°. acht desmische 9_3, die door de hoofddiagonalen der achthoeken bepaald en van deze ontdaan zijn, 4°. de lijn, die de drie buigpunten draagt.

In de door het punt $a_0 \equiv r_{85}$ bepaalde R_{85} worden de punten der in haar begrepen R_5 en R_{17} aangewezen door de wortels der congruenties $k \equiv 12 \pmod{17}$ en $k \equiv 4 \pmod{5}$, welke uit de congruentie $3k \equiv 2 \pmod{m}$ van bl. 242 voortvloeien.

De toppen van T_4 zijn dus identiek met $r_6, r_{23}, r_{40}, r_{74}$; de hoekpunten 1_i, 2_i der beide T_8 der eerste soort zijn restpunten van a_0, waarvoor de indices aan de vergelijking $i = 82 - 5\alpha$ voldoen; het aan R_5 en R_{17} gemeenschappelijke buigpunt is met r_{57} vereenigd Hieruit blijkt nu, dat de diagonaal $a_1\, a_3$ een top 1_1 van eenen T_8 der eerste soort draagt, terwijl de diagonaal $a_1\, a_4$ met een plethorisch punt der orde 85 incident is, dat niet tot den achthoek a_i behoort, en door b_1 kan voorgesteld worden; $a_1\, a_5$ bevat een top van T_4, $a_1\, a_6$ het punt b_6, $a_1\, a_7$ het punt 1_7. Bij voortzetting van dit onderzoek blijkt, dat de acht tangentiaalachthoeken der tweede soort elk acht diagonalen bezitten, welke de toppen van een dergelijken T_8 dragen, zoodat zij, als het ware, tot een ring zijn vereenigd en zoodoende eene 64_3 vormen. De 82 punten, waarmede a_0 niet door raaklijnen verbonden is, liggen paarsgewijze in 41 lijnen door a_0; 20 van hen verbinden dit punt met de toppen van den T_4 en de beide T_8 der 1ste soort. Daar evenwel het tot R_{17} behoorende r_{12} met het in R_5 begrepen punt r_{74} door eene met a_0 incidente lijn wordt vereenigd, vallen twee dezer lijnen samen. Zondert men deze 19 lijnen benevens de rechte, welke a_0 met het buigpunt der groep

verbindt, van de 41 af, dan blijkt, dat de eigenlijke plethorische punten der orde 85 in elke der drie R_{85} eene $(64_{21}, 448_3)$ bepalen.

30. *Elke* K_3 *bevat zes tangentiaalachthoeken der eerste en vierentwintig achthoeken der tweede soort. De eerste groep levert eene* $(48_{21}, 336_3)$, *waarin twee* 24_3 *en tweeëndertig desmische* 9_3 *begrepen zijn; de tweede groep geeft eene* $(192_{66}, 4224_3)$, *die in acht* 24_3 *en* 448 *desmische* 9_3 *kan ontleed worden. De hoofddiagonalen van eenen achthoek der eerste soort snijden elkander in een der buigpunten, die van eenen achthoek der tweede soort bepalen op* K_3 *de toppen van eenen tangentiaalvierhoek.*

Omdat $a_9 \equiv r_{171}$ is, kan een tangentiaalnegenhoek door plethorische punten der orde 9, 19, 57 of 171 gevormd worden. Voor $a_0 \equiv r_9$ heeft men:

$a_1 \equiv r_1$	$a_4 \equiv r_4$	$a_7 \equiv r_7$
$a_2 \equiv r_8$	$a_5 \equiv r_2$	$a_8 \equiv r_5$ (XVI)
$a_3 \equiv r_3$	$a_6 \equiv r_6$	$a_9 \equiv r_9$

In overeenstemming met N⁰. 17 blijkt R_9 geen plethorische punten van lager orde te bevatten. Verder wordt a_1 collineair met de paren $a_5\, a_7$, $a_3\, a_6$, $a_4\, a_8$, zoodat alle verbindingslijnen der R_9 door $a_i\, a_{i+2}\, a_{i+5}$ kunnen voorgesteld worden. De punten a_i vormen eene 9_3 met de tabel

$a_1\ a_4\ a_8$	$a_2\ a_5\ a_9$	$a_3\ a_6\ a_1$
$a_4\ a_7\ a_2$	$a_5\ a_8\ a_3$	$a_6\ a_9\ a_4$ (XVII)
$a_7\ a_1\ a_5$	$a_8\ a_2\ a_6$	$a_9\ a_3\ a_7$

De lijnen dezer 9_3 vormen drie driehoeken $a_1\, a_4\, a_7$, $a_2\, a_5\, a_8$, $a_3\, a_6\, a_9$ in zoodanige ligging, dat elke zijde het tangentiaalpunt van het overstaande hoekpunt bevat, zoodat de toppen van elken driehoek een inflexietripel vormen. Deze onsplitsbare cf. is blijkbaar identiek met de 9_3 C van KANTOR*);

*) t. a. p. KANTOR bewijst, dat *elke* 9_3 C door de toppen en diagonalen van een tangentiaalnegenhoek wordt gevormd.

zij bestaat, evenals de desmische 9_3, steeds uit drie inflexietripels, maar onderscheidt zich van deze daardoor, dat hare punten niet de basis van een K_3-bundel zijn, en de tripels zelf uit bijzondere punten der K_3 zijn samengesteld: men zou haar de *plethorische* 9_3 kunnen noemen. Elke K_3 bezit twee door eene R_9 bepaalde 9_3.

Voor $a_0 \equiv r_{19}$ levert de beschouwing der restpunten de lijnen:

$$\begin{array}{ccc|ccc} a_i & a_{i+3} & a_{i+6} & b_i & b_{i+3} & b_{i+6} \\ a_i & a_{i+2} & b_{i-2} & b_i & b_{i-2} & a_{i-2} \\ a_i & a_{i+4} & b_{i+1} & b_i & b_{i+4} & a_{i+1} \end{array} \qquad \text{(XVIII)}$$

De beide T_9, waaruit R_{19}, na afzondering van het buigpunt r_{13}, blijkt te bestaan, onderscheiden zich van de T_9 der R_9 door het bezit van slechts drie driepuntige diagonalen $a_1\, a_4\, a_7$, $a_2\, a_5\, a_8$, $a_3\, a_6\, a_9$, die elk juist dezelfde punten bevatten, welke bij de plethorische 9_3 tot een inflexietripel vereenigd zijn. De 18 tweepuntige diagonalen van den negenhoek a_i komen paarsgewijze samen in de toppen van den tweeden T_9 der groep. De beide negenhoeken bepalen eene $(18_7,\ 42_3)$; elke van hen behoort tot eene splitsbare tetratrigonische 27_3, waarvan de 18 overige punten aan de beide andere R_{19} ontleend zijn; de beide 27_3, die door projectie uit de buigpunten in elkander overgaan, zijn met de uit de drie $(18_7,\ 42_3)$ voortgekomen $(54_{21},\ 378_3)$ tot een $(54_{24},\ 432_3)$ vereenigd.

Elke R_{57} bevat, behalve een tangentiaaldriehoek (N^0. 17), zes T_9, die van de beide bovengevonden soorten van negenhoeken verschillen, daar de lijn $a_1\, a_4$ noch met a_7, noch met a_8 incident is; van de zes diagonalen uit een hoekpunt van een dier T_9 gaan er twee door twee toppen van een tweeden, twee andere door twee toppen van een derden, de beide overige door twee hoekpunten van een vierden T_9. De zes T_9 zijn tot eene $(54_{24},\ 432_3)$ vereenigd; met de toppen van den T_3 der groep zijn zij begrepen in eene $(57_{27},\ 513_3)$.

Ten slotte blijkt door toepassing van de congruentie $3\,k \equiv 2$ (mod. 19), dat elke der beide R_{171} eene R_9 bevat, terwijl de overige punten dezer groep tot 18 tangentiaalnegenhoeken gerangschikt zijn, welke van de T_9 der R_{57} in geen enkel opzicht verschillen; samen bepalen zij eene $(162_{75}, 4050_3)$ en met de 9_3 der R_9 eene $(171_{84}, 4788_3)$.

31. *Elke K_3 bezit drie soorten van tangentiaalnegenhoeken. De beide negenhoeken der eerste soort bepalen elk eene plethorische 9_3; elke negenhoek der tweede soort levert met twee andere eene splitsbare tetratrigonische 27_3 en met eenen derden eene $(18_7, 42_3)$; elke negenhoek der derde soort is met vijf of met zeventien dergelijke veelhoeken tot eene $(54_{24}, 432_3)$ of tot eene $(162_{75}, 4050_3)$ vereenigd.*

Uit $a_{10} = s_{342}$ volgt, dat er twee soorten van T_{10} bestaan; van de eerste soort vormen er drie met een buigpunt eene R_{31}, en bepalen samen eene $(30_{13}, 130_3)$, die in eene $(30_4, 40_3)$ en eene $(30_9, 90_3)$ kan gesplitst worden; van de tweede soort komen er dertig voor in elke R_{341}, die behalve hen de drie T_{10} eener R_{31}, de beide T_5 eener R_{11}, benevens het buigpunt bevat, dat R_{11} en R_{31} gemeen hebben. Van een T_{10} der eerste soort snijden de hoofddiagonalen de K_3 in het buigpunt der groep; van eenen tienhoek der tweede soort gaan zij door de toppen van eenen T_5.

---

§ IV.

Algemeene beschouwingen over de configuraties, welke uit plethorische punten bestaan.

De plethorische groepen R der orde 3^t onderscheiden zich van de overige groepen daarin, dat zij geen plethorische punten van lager orde bevatten. Deze overeenkomst wettigt het vermoeden, dat R_{3^t}, evenals R_9, uit inflexietripels bestaat, waarvan elk tripel het tangentiaaltripel van een tweede en het antitangentiaaltripel van een derde is. Zal dit waar zijn, dan moeten de punten $|\; a_0,\ a_{3^t-1},\ a_{2\cdot 3^t-1} \;|$

een dier tripels vormen, en moet a_1 gelegen zijn op de lijn $a_{3^{t-1}}\ a_{2\cdot 3^{t-1}}$. Nu is

$$a_{3^{t-1}} \equiv r_{\frac{1}{3}}\left(2^{3^{t-1}}+1\right) \text{ en } a_{2\cdot 3^{t-1}} \equiv s_{\frac{1}{3}}\left(2^{2\cdot 3^{t-1}}+2\right);$$

de voorwaarde van de collineaire ligging der genoemde drie punten is derhalve :

$$\tfrac{1}{3}\left(2^{2\cdot 3^{t-1}}+2\right) \equiv \tfrac{1}{3}\left(2^{3^{t-1}}+1\right)+1 \pmod{3^t},$$

of

$$2^{2\cdot 3^{t-1}} - 2^{3^{t-1}} + 1 \equiv 3 \pmod{3^{t+1}},$$

of ook

$$2^{3^t} + 1 \equiv 3\left(2^{3^{t-1}}+1\right) \pmod{3^{t+1}} \quad . \; . \; . \; (1)$$

Door inductie vindt men gemakkelijk, dat $2^{3^{t-1}} + 1 \equiv o$ (mod. 3^t); immers, geldt deze congruentie voor eenige waarde van t, dan is $2^{3^t} + 1 + 3.2^{3^{t-1}}\left(2^{3^{t-1}}+1\right) \equiv o$ (mod. 3^{3t}), en daar, blijkens de onderstelling, $3.2^{3^{t-1}}\left(2^{3^{t-1}}+1\right) \equiv o$ (mod. 3^{t+1}) is, heeft men door aftrekking $2^{3^t} + 1 \equiv o$ (mod. 3^{t+1}). Daar nu $2^3 + 1 \equiv o$ (mod. 3^2), is de congruentie steeds waar, en wordt $3\left(2^{3^{t-1}}+1\right) \equiv o$ (mod. 3^{t+1}), zoodat aan (1) voldaan wordt door elke waarde van t. Tevens vindt men $\frac{1}{3}\left(2^{3^t}+1\right) \equiv o$ (mod. 3^t), zoodat $a_{3^t} \equiv a_0$.

Derhalve :

32. *De beide plethorische groepen der orde 3^t vormen elk een tangentiaalveelhoek van 3^t zijden, waarvan de toppen in 3^{t-1} inflexietripels gerangschikt zijn en eene onsplitsbare tetratrigonische $3^t{}_3$ bepalen, die uit een cyclus van 3^{t-1} driehoeken bestaat, zoodat elke driehoek in een tweeden en om een derden beschreven is en de toppen van elken driehoek de tangentiaalpunten zijn van de overstaande hoekpunten des driehoeks, waarop hij rust. Deze cf. is begrepen in eene*

$$\left(3^t_{\frac{1}{2}(3^t-3)},\ \tfrac{1}{2}.3^t\left(3^{t-1}-1\right)_3\right),$$

welke ontstaat als men alle lijnen trekt, die met drietallen van punten der groep incident zijn.

Is p een priemgetal, dan bezit K_3 twee plethorische groepen der orde $3p$, die elk uit een T_3 en $(3p-3)$ eigenlijke plethorische punten der orde $3p$ bestaan. Zullen deze $(3p-3)$ punten een tangentiaalveelhoek vormen, dan moet

$$a_{3p-3} \equiv a_0, \text{ dus } s_{\frac{1}{3}\left(2^{3p-3}+2\right)} \equiv s_1,$$

of

$$\tfrac{1}{3}(2^{3p-3}+2) \equiv 1 \text{ (mod. } 3\,p) \,\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

wezen.

Zal deze $(3p-3)$-hoek eene $(3p-3)_3$ bepalen, welke op dezelfde wijze is samengesteld als de bovengevonden $(3^t)_3$, dan moet a_1 met de lijn $a_{p-1}\ a_{2p-2}$ incident wezen; daar deze drie punten achtereenvolgens met r_1, $s_{\frac{1}{3}\left(2^{p-1}+2\right)}$ en $s_{\frac{1}{3}\left(2^{2p-2}+2\right)}$ identiek zijn, is de voorwaarde:

$$\tfrac{1}{3}(2^{2p-2}+2)+\tfrac{1}{3}(2^{p-1}+2)-1 \equiv 1 \text{ (mod. } 3p)$$

of

$$2^{2p-2}+2^{p-1} \equiv 2 \text{ (mod. } 9p) \,\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Is nu $p = 6\,q+1$, dan volgt uit $2^3 \equiv -1$ (mod. 9), dat $2^{p-1} \equiv 1$ (mod. 9) en $2^{2p-2} \equiv 1$ (mod. 9), dus, wegens $2^{p-1} \equiv 1$ (mod. p), $2^{2p-2}+2^{p-1} \equiv 2$ (mod. $9p$), zoodat aan de congruentie (3) is voldaan.

Voor $p = 6\,q-1$ volgt uit $2^3 \equiv -1$ (mod. 9), dat $2^{6q-3} \equiv -1$ en $2^{p-1} \equiv -2$ (mod. 9), dus $2^{2p-2}+2^{p-1} \equiv 2$ (mod. 9). Daar weer $2^{2p-2}+2^{p-1} \equiv 2$ (mod. p), is ook nu aan (3) voldaan.

Ook congruentie (2) wordt in beide gevallen bevredigd; immers $2^{2p-2}+2^{p-1}+1 \equiv 3$ (mod. 9) en $2^{p-1}-1 \equiv o$ of $\equiv -3$ (mod. 9), dus $2^{3p-3}-1 \equiv o$ (mod. 9), en daar $2^{p-1} \equiv 1$ (mod. p), ook $2^{3p-3} \equiv 1$ (mod. $9p$) of $\frac{1}{3}(2^{3p-3}+2) \equiv 1$ (mod. $3p$).

Schoon voor $p = 6\,q+1$ aan de beide congruenties voldaan wordt, bestaat er in dat geval toch geen $(3p-3)$-hoek;

immers $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{9p}$, dus $\frac{1}{3}(2^{p-1} + 2) \equiv 1 \pmod{3p}$, zoodat a_0 reeds met zijn $(p-1)^{\text{ste}}$ tangentiaalpunt vereenigd is, en de plethorische groep uit eene T_3 en drie T_{p-1} is samengesteld; de congruentie (3) drukt dan alleen uit, dat a_1 het tangentiaalpunt van a_0 is.

33. *Elke der beide plethorische groepen der orde* $(18q-3)$ *bestaat uit een tangentiaaldriehoek en een tangentiaal-*$(18q-6)$*-hoek, waarvan de hoekpunten eene onsplitsbare tetratrigonische, uit* $(6q-2)$ *inflexietripels samengestelde,* $(18q-6)_3$ *vormen; deze cf. is begrepen in eene* $((18q-6)_{9q-6}, (18q-6)(3q-2)_3)$, *die door het trekken van alle verbindingslijnen ontstaat, en door toevoeging van de toppen van den tangentiaaldriehoek in eene* $((18q-3)_{9q-3}, (18q-3)(3q-1)_3)$ *overgaat.*

Voor $q = 1$ volgt uit (33), dat R_{15} eenen T_{12} bevat, die eene 12_3, en met de punten van T_3, eene $(15_6, 30_3)$ levert.

Boven is gebleken, dat elke in eene R_7 begrepen T_6 en elke in eene R_{19} begrepen T_9 achtereenvolgens twee en drie gescheiden driepuntige diagonalen bezit. Heeft algemeen de T_{6q} uit eene R_n de diagonaal

$$a_0 \; a_{2q} \; a_{4q} \equiv a_0 \; s_{\frac{1}{3}(2^{2q+2})} \; s_{\frac{1}{3}(2^{4q+2})} \, ,$$

dan is voldaan aan de congruentie

$$\frac{1}{3}(2^{4q+2}) + \frac{1}{3}(2^{2q+2}) - 1 \equiv 0 \pmod{n},$$

of

$$2^{4q} + 2^{2q} + 1 \equiv 0 \pmod{3n}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Bezit eene T_{6q+3} de diagonaal

$$a_0 \; a_{2q+1} \; a_{4q+2} \equiv a_0 \; r_{\frac{1}{3}(2^{2q+1}+1)} \; s_{\frac{1}{3}(2^{4q+2}+2)} \, ,$$

dan is

$$s_{\frac{1}{3}(2^{4q+2}+2)} \equiv s_{\frac{1}{3}(2^{2q+1}+1)} \, ,$$

dus

$$2^{4q+2} - 2^{2q+1} + 1 \equiv 0 \pmod{3n}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

De congruentie (4) levert voor $q = 1$ als kleinste waarde van n het getal 7, dus den bovengenoemden tangentiaalzeshoek. Voor $q = 2$ wordt $n = 91$, zoodat elke T_{12} uit eene R_{13} of eene R_{91} de eigenschap bezit, dat de punten $a_0\, a_4\, a_8$, dus ook de groepen $a_1\, a_5\, a_9$, $a_2\, a_6\, a_{10}$, $a_3\, a_7\, a_{11}$ collineair zijn. Met behulp van de methode der restpunten vindt men gemakkelijk, dat de T_{12} eener R_{91} geen andere driepuntige diagonalen bezit, terwijl voor den T_{12} uit R_{13} de in tabel (XIX) voorgestelde $(12_4, 16_3)$ gevonden wordt.

$a_1\ a_5\ a_9$	$a_1\ a_3\ a_{10}$	$a_1\ a_8\ a_{11}$	$a_5\ a_2\ a_7$	
$a_2\ a_6\ a_{10}$	$a_2\ a_4\ a_{11}$	$a_2\ a_9\ a_{12}$	$a_5\ a_8\ a_{10}$	(XIX).
$a_3\ a_7\ a_{11}$	$a_3\ a_5\ a_{12}$	$a_3\ a_6\ a_8$	$a_6\ a_9\ a_{11}$	
$a_4\ a_8\ a_{12}$	$a_4\ a_6\ a_1$	$a_4\ a_7\ a_9$	$a_7\ a_{10}\ a_{12}$	

Deze $(12_4, 16_3)$ verschilt van de beide cf. A en B, welke ik elders *) beschouwd heb; elk van hare punten heeft tot restfiguur een cf. driehoek.

Laat men uit deze cf. de vier lijnen der eerste kolom weg, dan ontstaat eene hexatrigonische 12_3, die identiek is met de door Schönflies †) behandelde 12_3; zij kan beschouwd worden als een in zichzelven beschreven twaalfhoek, als het samenstel van twee in elkander beschreven zeshoeken en als het samenstel van drie in elkander beschreven vierhoeken. De boven gevonden 12_3 levert volgens de eerste wijze van beschouwing den twaalfhoek:

$$a_1\ a_8\ a_3\ a_{10}\ a_5\ a_{12}\ a_7\ a_2\ a_9\ a_4\ a_{11}\ a_6\ ;$$

volgens de tweede opvatting de zeshoeken:

$$a_1\ a_3\ a_5\ a_7\ a_9\ a_{11} \quad \text{en} \quad a_{10}\ a_{12}\ a_2\ a_4\ a_6\ a_8\ ;$$

---

*) *Over vlakke cf.* (*Versl. en Med.* 3, V) en *Ueber gewisse ebene Cf.* (*Acta Math.* 12).

†) Ueber die regelmässigen Cf. n_3 (*Math. Ann.* Bd. XXXI, S. 48, Figur 1).

volgens de derde opvatting de vierhoeken :

$$a_1\ a_4\ a_7\ a_{10};\quad a_6\ a_9\ a_{12}\ a_3;\quad a_{11}\ a_2\ a_5\ a_8.$$

De bovengenoemde $(12_4, 16_3)$ is regelmatig ten opzichte van hare punten; ten opzichte van de vier lijnen $a_i\ a_{i+4}\ a_{i+8}$ is zij anders samengesteld als ten opzichte van de twaalf lijnen $a_i\ a_{i+3}\ a_{i+5}$ $(i = 1$ tot $12)$. Hiermede hangt samen, dat de 12_3, welke ontstaat door afscheiding van eene hoofdvierzijde, waarvan eene lijn van den vorm $a_i\ a_{i+4}\ a_{i+8}$ is en de overige drie van den vorm $a_i\ a_{i+3}\ a_{i+5}$ zijn, niet regelmatig is, maar drie op de eerste lijn gelegen pentatrigonische punten bezit, terwijl de overige negen tetratrigonisch zijn.

Congruentie (5) levert voor $q = 1$ den bekenden T_9 der R_{19}; voor $q = 2$ vindt men $n = 331$; elke R_{31} bevat dus, behalve een buigpunt, 22 tangentiaalvijftienhoeken, waarvan de punten $a_i\ a_{i+5}\ a_{i+10}$ collineair liggen, $(i = 1$ tot $5)$. Dus:

34. *Is n het kleinste getal, waarvoor de congruentie $2^{2h} + (-2)^h + 1 \equiv o$ (mod. $3n$) waar is, dan liggen van elken tot eene plethorische groep der n^{de} orde behoorenden tangentiaal-$3h$-hoek de punten $a_i\ a_{i+h}\ a_{i+2h}$ $(i = 1$ tot $h)$ collineair.*

Door uitbreiding dezer beschouwingen kan men de voorwaarden vinden, die vervuld moeten zijn, zal een tangentiaalveelhoek eene driepuntige diagonaal $a_i\ a_{i+p}\ a_{i+q}$ bezitten. Men vindt dan den volgenden regel :

35. *Is n het kleinste getal, waarvoor de congruentie $(-2)^p + (-2)^q \equiv -1$ (mod. $3n$) waar gemaakt wordt, dan bezit elke tangentiaalveelhoek der R_n de driepuntige diagonalen $a_i\ a_{i+p}\ a_{i+q}$.*

Door toepassing van dezen regel vindt men b.v., dat de lijnen $a_i\ a_{i+2}\ a_{i+6}$ voorkomen bij elken T_{22}; de plethorische punten der R_{23} geven dus aanleiding tot eene 22_3, waarin a_i met de puntenparen $a_{i+2}\ a_{i+6}$, $a_{i+4}\ a_{i+20}$ en $a_{i+16}\ a_{i+18}$ collineair is. Trekt men alle lijnen der R_{23}, welke niet door het buigpunt gaan, dan worden er nog twee 22_3 ge-

vormd, welke met de genoemde cf. tot eene $(22_9, 66_3)$ vereenigd zijn.

In de cf., waartoe de diagonalen $a_i\ a_{i+p}\ a_{i+q}$ eener plethorische groep behooren, is het punt a_0 met de paren a_p, a_q ; a_{-p}, a_{q-p} ; $a_{-q}\ a_{p-q}$ collineair ; deze drie lijnen worden gesneden door de volgende negen cf. lijnen:

a_p	a_p	a_q	a_q	a_{-p}	a_{-p}	a_{-q}	a_{p-q}	a_{q-p}	
a_{2p}	a_{p-q}	a_{2q}	a_{q-p}	a_{-q}	a_{-2p}	a_{-2q}	a_{p-2q}	a_{q-2p}	(XX).
a_{p+q}	a_{2p-q}	a_{p+q}	a_{2q-p}	a_{-p-q}	a_{q-2p}	a_{p-2q}	a_{2p-2q}	a_{2q-2p}	

Het punt a_0 komt derhalve voor in de driehoeken

$$a_0\ a_p\ a_{p-q},\quad a_0\ a_q\ a_{q-p}\ \text{en}\ a_0\ a_{-p}\ a_{-q}.$$

36. *De regelmatige cf. met den index 3, waarvan de lijnen door* $a_i\ a_{i+p}\ a_{i+q}$ *worden voorgesteld, zijn in het algemeen genomen tritrigonisch.*

Dat het aantal cf.-driehoeken, waartoe elk punt eener zoodanige cf. behoort, soms grooter kan worden, blijkt uit het voorbeeld der boven beschouwde hexatrigonische 12_3 der R_{13}; zooals door SCHÖNFLIES is aangetoond, kan dit aantal evenwel slechts 6 of 4 zijn.

Vormen de tangentiaalveelhoeken a_i, b_i, c_i, . . . l_i eenen cyclus, zoodat de diagonalen $a_0\ a_p, b_0\ b_p$, . . . $l_0\ l_p$ achtereenvolgens de toppen b_q, c_q, . . . a_q bevatten, dan is a_0 met de paren $a_p\ b_q$, $a_{-p}\ b_{q-p}$ en $l_{-q}\ l_{p-q}$ collineair. In de cf. met index 3, welke door de diagonalen dier veelhoeken wordt bepaald, worden deze drie naar a_0 convergeerende lijnen gesneden door de lijnen:

a_p	a_p	a_{-p}	a_{-p}	b_q	b_q	b_{q-p}	l_{p-q}	
a_{2p}	l_{p-q}	a_{-2p}	l_{-q}	b_{p+q}	b_{q-p}	b_{q-2p}	a_{p-2q}	(XXI).
b_{p+q}	l_{2p-q}	b_{q-2p}	l_{-p-q}	c_{2q}	c_{2q-p}	c_{2q-2p}	a_{2p-2q}	

Uit deze tabel blijkt, dat het punt a_0 tot de driehoeken $a_0\ b_q\ b_{q-p}$, $a_0\ a_p\ l_{p-q}$ en $a_0\ a_{-p}\ l_{-q}$ behoort ; daar de cf.

uit den aard der zaak regelmatig is, zijn derhalve alle hare punten in het algemeen tritrigonisch.

37. *Elke regelmatige cf. met den index* 3, *welke door de diagonalen van eene reeks van tangentiaalveelhoeken gevormd wordt, waarin elke veelhoek op de diagonalen van den voorgaanden rust, terwijl zijne diagonalen den volgenden veelhoek dragen, is in het algemeen genomen tritrigonisch.*

De 10_3 van tabel (VII) is een voorbeeld van eene cf. der genoemde soort, waarbij het aantal cf. driehoeken in elk punt 6 bedraagt.

Kampen, 15 Februari 1889.

NOGMAALS

OVER DE

BERNOULLIAANSCHE COËFFICIËNTEN.

DOOR

F. J. VAN DEN BERG.

(Vervolg van 2de Reeks, Deel XVI, 1881, blz. 74—176, en 3de Reeks, Deel V, 1889, blz. 358—397.)



In de eerste der hierboven aangehaalde bijdragen in de *Verslagen en Mededeelingen*, Afdeeling Natuurkunde, gaf ik op blz. 113—116 eene afleiding van de beide door M. A. Stern in zijne Beiträge zur Theorie der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen, in *Abhandl. der Kön. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 23er Band, 1878, blz. 7—8, medegedeelde betrekkingen, die ter berekening van eenigen Bernoulliaanschen coëfficiënt terugloopen niet over alle, maar slechts over eenige onmiddellijk voorafgaande coëfficiënten.

Op blz. 393—395 van mijne in de tweede plaats genoemde bijdrage vond ik aanleiding meer in het bijzonder nog stil te staan bij diegene van de bedoelde onvolledig of afgebroken terugloopende betrekkingen, waarin de beide van Stern zamenvallen in het geval dat zij ieder, voor een zelfden willekeurigen Bernoulliaanschen coëfficiënt, het kleinst mogelijk aantal voorafgaande coëfficiënten bevatten. Voor deze bijzondere betrekking werd aldaar, indien als vroeger in het algemeen de q^{de} Bernoulliaansche coëfficiënt door B_{2q-1} bleef voorgesteld, gevonden

$$\sum_{0}^{\frac{q-1}{2} \text{ of } \frac{q}{2}} {}_r (-)^r \frac{2q-2r+1}{2r+1} \binom{q}{2r} B_{2q-2r-1} = \left\{ \begin{matrix} (\text{voor } q = 1) \ \frac{1}{2} \\ (\text{voor } q > 1) \ 0 \end{matrix} \right\},$$

terwijl voor $q = 1$ tot en met 8 de opvolgende betrekkingen volgens dit type voluit werden nedergeschreven.

Daar het mij niet bekend is, of door een der schrijvers over dit onderwerp reeds opmerkzaam gemaakt werd op de omstandigheid dat uit vorenstaande betrekking zonder veel moeite een paar andere kunnen worden afgeleid, die zich in meer dan één opzigt geschikter tot de werkelijke getallenberekening leenen dan vele overigen, geeft dit mij aanleiding thans nogmaals op deze zaak terug te komen.

Telt men namelijk bij die voor eene willekeurige waarde van $q \overline{\overline{>}} 1$ geldende betrekking het dubbel van de onmiddellijk voorafgaande, waarin zij zelve alzoo door vervanging van q door $q-1$ overgaat, op, en voegt men daartoe telkens elke twee gelijknamige termen $B_{2q-2r-1}$ bijeen, waarvoor dus in die voorafgaande betrekking ook iedere r door $r-1$ dient vervangen te worden, dan doet zich deze som aanvankelijk vóór onder den vorm

$$\sum_{0}^{\frac{q+1}{2} \text{ of } \frac{q}{2}} {}_r (-)^r (2q-2r+1) \left\{ \frac{1}{2r+1} \binom{q}{2r} - \frac{2}{2r-1} \binom{q-1}{2r-2} \right\} B_{2q-2r-1} =$$
$$= \left\{ \begin{matrix} (\text{voor } q = 2) \ 1 \\ (\text{voor } q > 2) \ 0 \end{matrix} \right\},$$

waarin namelijk voor oneven q de oorspronkelijke bovengrens $\frac{q-1}{2}$ van r vervangen werd door $\frac{q+1}{2}$, omdat in dát geval — maar daarentegen niet voor even q — die voorafgaande betrekking, behalve de in de oorspronkelijke zelve voorkomende coëfficiënten B, nog één lageren B bevat; terwijl, zooals in het tweede lid aangewezen, de toepasselijkheid eerst bij $q = 2$ begint, omdat meergenoemde voor-

afgaande betrekking slechts voor $q-1 \overline{\geq} 1$ geldt. De herleiding

$$\frac{1}{2r+1}\binom{q}{2r}-\frac{2}{2r-1}\binom{q-1}{2r-2}=$$

$$=\frac{1}{(2r-1)\,2r(2r+1)}\{q(q-2r+1)-4r(2r+1)\}\binom{q-1}{2r-2}=$$

$$=\frac{(q-4r)(q+2r+1)}{(2r-1)\,2r(2r+1)}\binom{q-1}{2r-2}$$

doet voorts de evengevonden betrekking overgaan in

$$\sum_{0}^{\frac{q+1}{2}\text{ of }\frac{q}{2}}{}_{r}(-)^{r}\frac{(q-4r)(q+2r+1)(2q-2r+1)}{(2r-1)\,2r(2r+1)}\binom{q-1}{2r-2}B_{2q-2r-1}=$$

$$=\left\{\begin{matrix}(\text{voor } q=2)\ 1\\ (\text{voor } q>2)\ 0\end{matrix}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

en deze vormt nu den grondslag der verdere berekening. Of liever, voor het geval van even q is zij zelve reeds, zonder eenige nadere bewerking, de beoogde einduitkomst, indien men slechts opmerkt dat alsdan telkens de coëfficiënten van twee symmetrisch wederzijds het midden geplaatste termen van het eerste lid (dat is dus van elk paar termen in r en $\frac{q}{2}-r$) óf gelijk óf tegengesteld gelijk zijn: immers, de onderlinge verwisseling van $2r$ en $q-2r$, waardoor de factor

$$\frac{1}{(2r-1)\,2r\,(2r+1)}\binom{q-1}{2r-2},$$

geschreven onder den vorm

$$\frac{(q-1)!}{(2r+1)!\,(q-2r+1)!},$$

blijkt onveranderd te blijven, geeft als coëfficiënt van den term in B_{q+2r-1} de waarde

$$(-)^{\frac{q}{2}-r}\frac{(4r-q)(2q-2r+1)(q+2r+1)}{(2r-1)\,2r\,(2r+1)}\binom{q-1}{2r-2},$$

dat is juist $(-)^{\frac{q}{2}-1}$ maal den coëfficiënt van $B_{2q-2r-1}$ zelf; en op grond hiervan de termen paarsgewijs bijeenbrengende, heeft men dus de meer beknopte formule:

$$(\text{voor even } q)\sum_{0}^{\frac{q-2}{4}\text{ of }\frac{q-4}{4}}{}_{r}(-)^{r}\frac{(q-4r)(q+2r+1)(2q-2r+1)}{(2r-1)\,2r\,(2r+1)}\binom{q-1}{2r-2}\Bigg(B_{2q-2r-1}+(-)^{\frac{q}{2}-1}B_{q+2r-1}\Bigg)=\begin{cases}(\text{voor } q=2)\ 1\\(\text{voor } q>2)\ 0\end{cases},\ldots(1)$$

waarin namelijk voor even $\frac{q}{2}$ als bovengrens van r geschreven mogt worden $\frac{q-4}{4}$ in plaats van $\frac{q}{4}$, omdat de op zich zelf staande middelste term, die alsdan voor $r=\frac{q}{4}$ in (α) zou voorkomen, blijkens zijn factor $q-4r=0$ van zelf komt te verdwijnen.

Heeft men daarentegen met het geval van oneven q te doen, dan is de in het algemeen gevonden betrekking (α) zelve niet voor eene dergelijke vereenvoudiging als zoo even vatbaar, omdat in dat geval al hare coëfficiënten onderling ongelijk zijn. Toch kan men ook in dit geval uit (α) eene andere betrekking afleiden van althans bijna even beknopten vorm als (1). Vermindert men namelijk in het algemeen de betrekking (α) met de onmiddellijk voorafgaande van hetzelfde type, waarvoor dus in (α) wederom q door $q-1$ en, ten einde ook nu den aanwijzer $2q-2r-1$ van den algemeenen term in B onveranderd te laten, bovendien r door $r-1$ te vervangen is, dan geeft dit:

$$\sum_{0}^{\frac{q+1}{2}\text{ of }\frac{q+2}{2}}{}_{r}(-)^{r}(2q-2r+1)\left\{\frac{(q-4r)(q+2r+1)}{(2r-1)\,2r\,(2r+1)}\binom{q-1}{2r-2}+\right.$$
$$\left.+\frac{(q-4r+3)(q+2r-2)}{(2r-3)(2r-2)(2r-1)}\binom{q-2}{2r-4}\right\}B_{2q-2r-1}=\begin{cases}(\text{voor} q=3)-1\\(\text{voor} q>3)\ \ 0\end{cases},$$

waarin namelijk voor even q de in (α) aangewezen bovengrens $\frac{q}{2}$ van r vervangen werd door $\frac{q+2}{2}$ om dezelfde reden als bij het opmaken van (α) zelve de in het geval van oneven q oorspronkelijke bovengrens $\frac{q-1}{2}$ veranderd werd in $\frac{q+1}{2}$. En brengt men nu deze uitkomst vooreerst onder den vorm

$$\sum_{0}^{\frac{q+1}{2} \text{ of } \frac{q+2}{2}} (-)^r \frac{2q-2r+1}{(2r-3)(2r-2)(2r-1)2r(2r+1)} \Big\{$$
$$\{(q-4r)(q+2r+1)(q-1)(q-2r+2)+$$
$$+(q-4r+3)(q+2r-2)2r(2r+1)\}\binom{q-2}{2r-4}B_{2q-2r-1}=$$
$$=\begin{Bmatrix}(\text{voor } q=3)-1\\(\text{voor } q>3)\ \ 0\end{Bmatrix}$$

en herleidt men hierin verder de uitdrukking tusschen { } tot

$$\{(q-4r+1)(q+2r)-6r\}(q-1)(q-2r+2)+$$
$$+\{(q-4r+1)(q+2r)+6(2r-1)\}2r(2r+1)=$$
$$=(q-4r+1)(q+2r)\{(q-1)(q-2r+2)+2r(2r+1)\}-$$
$$-6r\{(q-1)(q-2r+2)-2(2r-1)(2r+1)\},$$

dat is, door hierin den laatsten term, onder den vorm

$$-6r(q-4r+1)(q+2r),$$

met den eersten bijeen te brengen,

$$=(q-4r+1)(q+2r)\{(q-1)(q-2r+2)+2r(2r-2)\},$$

dan is in het algemeen bewezen, wanneer men weder op

$$(q-1)(q-2r+2)\binom{q-2}{2r-4}=(2r-3)(2r-2)\binom{q-1}{2r-2}$$

let, dat

$$\sum_{0}^{\frac{q+1}{2} \text{ of } \frac{q+2}{2}} (-)^r (q-4r+1)(q+2r)(2q-2r+1) \left\{ \frac{1}{(2r-1)2r(2r+1)} \binom{q-1}{2r-2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(2r-3)(2r-1)(2r+1)} \binom{q-2}{2r-4} \right\} B_{2q-2r-1} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} (\text{voor } q = 3) - 1 \\ (\text{voor } q > 3) \quad 0 \end{matrix} \right\} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (\alpha')$$

is. Bij deze nieuwe betrekking (α') doet zich nu juist het tegengestelde voor van wat boven ten aanzien van de betrekking (α) bleek. Terwijl zij namelijk voor even q wegens de onderlinge ongelijkheid der coëfficiënten van al hare termen den gevonden vrij zamengestelden vorm behoudt, laat zij zich daarentegen voor oneven q om zoo te zeggen weder tot het halve aantal termen zamendringen. Dit valt waarschijnlijk het gemakkelijkst in het oog wanneer men, de uitdrukking die thans in (α') tusschen { } verkregen is onder haar oorspronkelijken vorm

$$\frac{(q-1)(q-2r+2)+2r(2r-2)}{(2r-3)(2r-2)(2r-1)2r(2r+1)} \binom{q-2}{2r-4}$$

of liever nog onder den vorm

$$\{(q-1)(q+2)-2r(q-2r+1)\} \frac{(q-2)!}{(2r+1)!(q-2r+2)!}$$

beschouwende, opmerkt dat deze bij onderlinge verwisseling van $2r$ en $q-2r-1$ geheel onveranderd blijft, en wanneer men hieraan de opmerking knoopt dat diezelfde verwisseling het vóór de { } staande product $(q-4r+1)(q+2r)(2q-2r+1)$ alleen van teeken doet omkeeren. Hieruit toch volgt dat de door deze verwisseling uit den coëfficiënt van $B_{2q-2r-1}$ af te schrijven coëfficiënt van B_{q+2r-2} zich van den oorspronkelijken slechts onderscheidt door voorvoeging van het teeken $(-)^{\frac{q-1}{2}}$ en dat men, op dezen grond elk paar symmetrisch

wederzijds het midden geplaatste termen van het eerste lid (dat is dus thans, voor oneven q, elk paar termen in r en $\frac{q+1}{2}-r$) weder bijeenbrengende, kan schrijven:

$$\text{(voor oneven } q) \sum_{0}^{\frac{q-3}{4} \text{ of } \frac{q-1}{4}} (-)^r (q-4r+1)(q+2r)(2q-2r+1) \left\{ \frac{1}{(2r-1)2r(2r+1)} \binom{q-1}{2r-2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(2r-3)(2r-1)(2r+1)} \binom{q-2}{2r-4} \right\} \left(B_{2q-2r-1} + \right.$$

$$\left. + (-)^{\frac{q-1}{2}} B_{q+2r-2} \right) = \left\{ \begin{matrix} (\text{voor } q=3) - 1 \\ (\text{voor } q>3) \;\; 0 \end{matrix} \right\}, \quad \ldots \ldots (1')$$

waarin namelijk voor even $\frac{q+1}{2}$ als bovengrens van r geschreven werd $\frac{q-3}{4}$, omdat de door $r = \frac{q+1}{4}$ aangewezen eerstvolgende en in dat geval tevens middelste term in (α') wegens zijn factor $q-4r+1=0$ van zelf uitvalt.

Bij de getallentoepassing zoowel van (1) als van (1′) kan het gemak geven onder anderen op de volgende bijzonderheden bedacht te zijn: 1[0] dat voor den eersten, door $r=0$ aangewezen, term $B_{2q-1} + (-)^{\frac{q}{2}-1} B_{q-1}$ in (1) en $B_{2q-1} + (-)^{\frac{q-1}{2}} B_{q-2}$ in (1′) de coëfficiënt, omdat dan

$$\frac{1}{(2r-1)2r(2r+1)} \binom{q-1}{2r-2} = \frac{(q-1)!}{(2r+1)!\,(q-2r+1)!} =$$

$$= \frac{1}{q(q+1)} \text{ en } \binom{q-2}{2r-4} = 0$$

wordt, niet anders is dan de enkele $2q+1$; 2[0] dat in het algemeen voor een willekeurigen door r aangewezen term de factor $2q-2r+1$ steeds de som is van de twee daarvóór staande factoren, hetzij dan $q-4r$ en $q+2r+1$, hetzij $q-4r+1$ en $q+2r$; 3[0] dat alle getallencoëfficiënten van de Bernoulliaansche coëfficiënten, omdat (1) en (1′) uitsluitend uit optelling of aftrekking van formulen met

geheele coëfficiënten zijn voortgekomen, ook geheelen moeten zijn. De beurtelingsche toepassing overigens van de beide gevonden formulen (1) en (1'), met voorvoeging, voor het daarin niet begrepen geval $q = 1$, van de oorspronkelijke formule waaruit zij werden afgeleid, geeft het volgende overzigt, waarin telkens de uitgerekende getallencoëfficiënten tusschen [ ] achteraan zijn geplaatst:

$$q = 1, \quad 3\,B_1 = \frac{1}{2}, [3]$$

$$q = 2, \quad 5\,(B_3 + B_1) = 1, [5]$$

$$q = 3, \quad 7\,(B_5 - B_1) = -1, [7]$$

$$q = 4, \quad 9\,(B_7 - B_3) = 0, [9]$$

$$q = 5, \quad 11\,(B_9 + B_3) - \frac{2.7.9}{1.2.3}\binom{4}{0}(B_7 + B_5) = 0, [11, 21]$$

$$q = 6, \quad 13\,(B_{11} + B_5) - \frac{2.9.11}{1.2.3}\binom{5}{0}(B_9 + B_7) = 0, [13, 33]$$

$$q = 7, \quad 15\,(B_{13} - B_5) - \frac{4.9.13}{1.2.3}\binom{6}{0}(B_{11} - B_7) = 0, [15, 78]$$

$$q = 8, \quad 17(B_{15} - B_7) - \frac{4.11.15}{1.2.3}\binom{7}{0}(B_{13} - B_9) = 0, [17, 110]$$

$$q = 9, \quad 19\,(B_{17} + B_7) - \frac{6.11.17}{1.2.3}\binom{8}{0}(B_{15} + B_9) + 2.13.15 \left\{ \frac{1}{3.4.5}\binom{8}{2} + \frac{1}{1.3.5}\binom{7}{0} \right\} (B_{13} + B_{11}) = 0, [19, 187, 208]$$

$$q = 10, \quad 21\,(B_{19} + B_9) - \frac{6.13.19}{1.2.3}\binom{9}{0}(B_{17} + B_{11}) + \frac{2.15.17}{3.4.5}\binom{9}{2}(B_{15} + B_{13}) = 0, [21, 247, 306]$$

$$q = 11, \quad 23(B_{21} - B_9) - \frac{8.13.21}{1.2.3}\binom{10}{0}(B_{19} - B_{11}) + 4.15.19 \left\{ \frac{1}{3.4.5}\binom{10}{2} + \frac{1}{1.3.5}\binom{9}{0} \right\} (B_{17} - B_{13}) = 0, [23, 364, 931]$$

$$q = 12, \quad 25\,(B_{23} - B_{11}) - \frac{8.15.23}{1.2.3}\binom{11}{0}(B_{21} - B_{13}) + \frac{4.17.21}{3.4.5}\binom{11}{2}(B_{19} - B_{15}) = 0, [25, 460, 1309]$$

$$q = 13,\quad 27\,(B_{25}+B_{11}) - \frac{10.15.25}{1.2.3}\binom{12}{0}(B_{23}+B_{13}) +$$

$$+\ 6.17.23\left\{\frac{1}{3.4.5}\binom{12}{2} + \frac{1}{1.3.5}\binom{11}{0}\right\}(B_{21}+B_{15}) -$$

$$-\ 2.19.21\left\{\frac{1}{5.6.7}\binom{12}{4} + \frac{1}{3.5.7}\binom{11}{2}\right\}(B_{19}+B_{17}) = 0,$$

[27, 625, 2737, 2299]

enz.

Het voordeel dat nu deze betrekkingen voor de opvolgende berekening van B_1, B_3, B_5, enz., B_{2q-1} uit elkander opleveren bestaat vooreerst hierin dat ter bepaling van B_{2q-1} ten naastebij slechts $\frac{q}{4}$ getallencoëfficiënten vereischt worden, die ieder op vrij eenvoudige wijze van de binomiaalcoëfficiënten van geene andere dan de $(q-1)^e$, of de $(q-1)^e$ en de $(q-2)^e$, magt afhangen; terwijl bij voorbeeld de toepassing van de terugloopende betrekking, die men het veelvuldigst voor de Bernoulliaansche coëfficiënten vermeld vindt, namelijk van de betrekking

$$\sum_{1}^{q}{}_{r}\,(-)^{r-1}\binom{2q+1}{2r}B_{2r-1} = \frac{2q-1}{2}$$

(zie onder anderen mijne eerst aangehaalde bijdrage, blz. 109, formule (4*)), welke alzoo alle voorafgaande coëfficiënten B bevat, de berekening van een aantal van q binomiaalcoëfficiënten, en wel van de zooveel hoogere $(2q+1)^e$ magt, vordert. Maar eene niet minder belangrijke vereenvoudiging vloeit naar het mij toeschijnt voort uit de eigenaardige wijze waarop in de gevonden betrekkingen de Bernoulliaansche coëfficiënten niet anders dan twee aan twee tot eene som of een verschil verbonden voorkomen. Op grond van eene stelling toch, die nagenoeg gelijktijdig door von Staudt in A. L. Crelle's *Journal für die Mathematik*, 21er Band, 1840, blz. 372—374, en door Th. Clausen in H. C. Schumacher's *Astronomische Nachrichten*, 17er Band, 1840, blz. 351—352, (beide stukken aangehaald in mijne eerste bijdrage, blz. 168) werd bekend gemaakt, bestaat, al naarmate q oneven of even

is, de algemeene Bernoulliaansche coëfficiënt B_{2q-1} uit een geheel getal vermeerderd of verminderd met de breuk $\frac{1}{2}$ en verminderd of vermeerderd met de som van alle breuken die de eenheid tot tellers hebben en tot noemers diegene uit de met de eenheid vermeerderde even deelers van $2q$ die ondeelbaar zijn. Zoo heeft men bij voorbeeld — en wij kiezen hier juist die coëfficiënten B, die ons zoo dadelijk ter verdere toelichting te stade zullen komen — de waarden

$$B_{11} = \frac{691}{2730} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{13},$$

$$B_{13} = \frac{7}{6} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3},$$

$$B_{15} = \frac{3617}{510} = 7 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{17},$$

$$B_{19} = \frac{174611}{330} = 529 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{11},$$

$$B_{21} = \frac{854513}{138} = 6192 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{23},$$

$$B_{23} = \frac{236364091}{2730} = 86580 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{13}.$$

Nu komen, voor even q, in (1) met elkander telkens verbonden vóór de $(q-r)^e$ en de $\left(\frac{q}{2}+r\right)^e$ Bernoulliaansche coëfficiënt, en wel, naarmate het verschil $\frac{q}{2}-2r$ hunner rangnummers oneven of even en dus de exponent $\frac{q}{2}-1$ aldaar even of oneven is, verbonden als som of als verschil; desgelijks treft men, voor oneven q, in (1′) met elkander telkens verbonden áán de $(q-r)^e$ en de $\left(\frac{q-1}{2}+r\right)^e$ coëfficiënt, en wel, naarmate hun rangverschil $\frac{q+1}{2}-2r$ oneven of even en dus de exponent $\frac{q-1}{2}$ in (1′) even of on-

even is, almede verbonden tot som of tot verschil. Maakt men deze sommen en verschillen dus telkens op uit de, zooals in de pas aangevoerde voorbeelden, in geheelen en in breuken gesplitste waarden der coëfficiënten B, dan zullen, op grond van het toen gezegde, daarbij niet alleen de in iederen B steeds voorkomende termen $(-)^{q-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$, maar naar omstandigheden ook sommige, of vele, of zelfs alle overige gedeeltelijke breuken elkander opheffen, hetgeen alligt — door het alsnu overbodig worden van verschillende vermenigvuldigers wier invoering noodzakelijk zou geworden zijn indien iedere coëfficiënt B zelfstandig was blijven optreden — tot eene niet onbelangrijke bekorting van de uitrekening kan leiden. Door het volgende voorbeeld vleijen wij ons het hier bedoelde voordeel voldoende te zullen toelichten. Stel dat alle zoo even geschreven waarden, met uitzondering van de laatste of B_{23}, reeds bekend zouden zijn, dan mag men voor deze, omdat onder de met de eenheid vermeerderde even deelers van 24, namelijk 3, 5, 7, 9, 13, 25, de beide deelbare 9 en 25 verworpen moeten worden, nemen

$$B_{23}=x-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{13},$$

en dan komt de berekening van het onbekende geheele getal x door toepassing der in het bovenstaande overzigt voluit geschreven betrekking voor $q=12$ op het volgende te staan:

$$25(x-0)-460\left(6192-1-\frac{1}{23}\right)+1309\left(529-7+\frac{1}{11}-\frac{1}{17}\right)=0$$

of

$$25\,x-460\,.\,6191+1309\,.\,522=-20-119+77=-62,$$

waaruit zonder veel moeite $x=86580$ en daarmede B_{23} zelf gevonden wordt.

Te vergeefs heb ik getracht om, wanneer niet de aaneengesloten reeks van alle opvolgende Bernoulliaansche coëfficiënten zou beschouwd worden, maar ieder voor zich de gedeeltelijke reeksen B_1, B_5, B_9, enz. en B_3, B_7, B_{11}, enz.

die men bij indeeling in perioden van twee termen, of de gedeeltelijke reeksen B_1, B_7, B_{13}, enz. en B_3, B_9, B_{15}, enz. en B_5, B_{11}, B_{17}, enz. die men bij perioden van drie termen zou verkrijgen -- op de wijze zooals in mijne eerste bijdrage behandeld — alsdan voor deze gedeeltelijke reeksen afgebroken periodieke terugloopende betrekkingen te ontwikkelen, die daarbij dus dezelfde rol zouden vervullen als de beide betrekkingen van Stern of de daaruit in het vorenstaande afgeleide betrekkingen (1) en (1′) bij de enkele of aaneengesloten reeks B_1, B_3, B_5, B_7, enz.

Nadat ik het voorgaande had opgesteld, viel mijne aandacht nog op een artikel van Ed. Lucas, Sur les nouvelles formules de MM. Seidel et Stern, concernant les nombres de Bernoulli, in *Bulletin de la société mathématique de France*, T. 8, 1879—1880, blz. 169—172. Door dat artikel werd ik er aan herinnerd dat juist de in mijn tegenwoordig en in mijn voorgaand opstel beschouwde bijzondere betrekking van Stern — maar niet zijne algemeene — dezelfde is die reeds vóór hem door L. Seidel als vergelijking VI—VIII werd bekend gemaakt in diens in de *Sitzungsberichte der mathem.-physik. Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München* (door Lucas wordt ten onregte aangehaald de *böhm. Academie zu Prag*), Band 7, Jahrg. 1877, blz. 157—187, opgenomen (en ook in mijn eerste opstel, van 1881, op blz. 170 vermelde) bijdrage, getiteld: Ueber eine einfache Entstehungsweise der Bernoulli'schen Zahlen und einiger verwandten Reihen. De door mij, in verband met de stelling van von Staudt-Clausen, thans besproken vervorming van de bedoelde bijzondere betrekking heb ik evenwel in deze stukken van Lucas en Seidel niet aangetroffen.

April 1889.

EQUIANHARMONIE EN HARMONIE

BIJ

POOLSTELSELS VAN BINAIRE VORMEN, ENZ.

DOOR

P. H. SCHOUTE.

1. Zooals bekend is, liggen de vier punten voorgesteld door de binaire vergelijking $p_x^4 \equiv q_x^4 \equiv r_x^4 = 0$ equianharmonisch als de invariant $i \equiv (p\,q)^4$ en harmonisch als de invariant $j \equiv (q\,r)^2\,(r\,p)^2\,(p\,q)^2$ verdwijnt *). In verband hiermee zullen, volgens een bekend overdragingsbeginsel van Clebsch †), de lijnen, die een vlakke kromme gegeven door de ternaire vergelijking $p_x^4 \equiv q_x^4 \equiv r_x^4 = 0$ volgens een equianharmonisch of harmonisch puntkwadrupel snijden, krommen omhullen, die achtereenvolgens door de tangentiëele vergelijkingen $(p\,q\,u)^4 = 0$ en $(q\,r\,u)^2\,(r\,p\,u)^2\,(p\,q\,u)^2 = 0$

---

*) Men heeft

$$i = (p\,q)^4 = 2\,(p_0\,p_4 - 4p_1\,p_3 + 3\,p_2^2),$$

$$j = (q\,r)^2(r\,p)^2(p\,q)^2 = 6 \begin{vmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ p_2 & p_3 & p_4 \end{vmatrix} = 6(p_0\,p_2\,p_4 + 2\,p_1\,p_3\,p_5 - p_2^3 - p_0 p_3^2 - p_1^2 p_4).$$

Men vergelijke Clebsch *Theorie der binären algebraïschen Formen*, blz. 135 en blz. 171, of Clebsch-Lindemann *Vorlesungen über Geometrie*, blz. 229 en blz. 239.

†) Men vergelijke Clebsch-Lindemann, t. a. p., blz. 276.

worden bepaald en waarvan dus de eerste van de vierde en de tweede van de zesde klasse is.

In het volgende zullen eenige aanverwante stellingen met betrekking tot puntstelsels en krommen van hoogeren graad ontwikkeld worden; daartoe onderzoeken we eerst door welke vergelijkingen de polen y worden bepaald, waarvan de bikwadratische poolstelsels ten opzichte van een gegeven puntstelsel $f = 0$ deze ligging vertoonen.

Het bikwadratische poolstelsel van y ten opzichte van het puntstelsel $f \equiv a_x^n \equiv b_x^n \equiv c_x^n = 0$ is voorgesteld door $a_y^{n-4} a_x^4 = 0$. De bedoelde voorwaarden worden dus gevonden door voor $p_1^k p_2^{4-k}$ en de gelijkwaardige symbolen q en r de meer samengestelde uitdrukkingen $a_1^k a_2^{4-k} a_y^{n-4}$ en de gelijkwaardige symbolen b en c in de plaats te stellen. We vinden dan

$$i \equiv (p\,q)^4 = (a\,b)^4 a_y^{n-4} b_y^{n-4} = 0\,,$$
$$j \equiv (q\,r)^2 (r\,p)^2 (p\,q)^2 = (b\,c)^2 (c\,a)^2 (a\,b)^2 a_y^{n-4} b_y^{n-4} c_y^{n-4} = 0,$$

waaruit blijkt, dat van $2(n-4)$ polen y het poolkwadrupel equianharmonisch en van $3(n-4)$ polen y het poolkwadrupel harmonisch is.

De vorm $i \equiv (a\,b)^4 a_y^{n-4} b_y^{n-4}$, die de coëfficiënten van f in den tweeden graad bevat, is blijkens zijn gedaante de vierde *overschuiving* van a_x^n over b_x^n, d. i. van f over zichzelf, en kan dus door het symbool $(f, f)^4$ worden voorgesteld. De covariant $j \equiv (b\,c)^2 (c\,a)^2 (a\,b)^2 a_y^{n-4} b_y^{n-4} c_y^{n-4}$, die in de coëfficiënten van f tot den derden graad opklimt, is op het teeken na de tweede overschuiving van i over f, d. i. $-(i, f)^2$; dit wordt gemakkelijk aangetoond door het door Gordan voor het bijzondere geval $n = 5$ gegeven bewijs *) op een willekeurige n uit te breiden.

Als toepassing van het bovenstaande bepalen we in het vlak eener gegeven kromme C^n van den n^{den} graad de meetkundige plaats van het punt Q, dat op de lijn $P\,Q$, die

---

*) Men vergelijke Dr. P. Gordan's *Vorlesungen über Invariantentheorie*, herausgegeben von Dr. G. Kerschensteiner, deel II, blz. 241.

het met een vast punt P van het vlak verbindt, met betrekking tot de snijpunten van deze lijn met C^n tot een equianharmonisch of harmonisch poolkwadrupel voert. We vonden, dat elke willekeurige lijn PQ van de eerste meetkundige plaats $2(n-4)$ en van de tweede $3(n-4)$ punten oplevert. Men vindt dus de graden dier meetkundige plaatsen door de genoemde getallen te vermeerderen met het aantal lijnen door P, waarvoor P tot zulk een poolkwadrupel leidt. Zooals uit de in den aanhef genoemde omhullenden blijkt, is dit achtereenvolgens vier en zes. Dus is de eerste meetkundige plaats een kromme van den graad $2(n-2)$ met P tot viervoudig punt, de tweede een kromme van den graad $3(n-2)$ met P tot zesvoudig punt.

2. We gaan nu een stap verder door het kubische poolstelsel van y ten opzichte van $f \equiv a_x^n \equiv b_x^n \equiv c_x^n = 0$ met het laatste poolpunt van een andere pool z ten opzichte van een ander poolstelsel $\varphi \equiv \alpha_x^\nu \equiv \beta_x^\nu \equiv \gamma_x^\nu = 0$ van den ν^{den} graad te vereenigen en de betrekking te zoeken, die er tusschen y en z bestaan moet, opdat het door deze vereeniging ontstane puntkwadrupel equianharmonisch of harmonisch zij. We hebben dan met de substituties te doen, die voortvloeien uit het overeenbrengen van p_x^4 met $a_y^{n-3}\, a_x^3\, \alpha_z^{\nu-1}\, \alpha_x$. Zij zijn

$$\left.\begin{matrix} p_0 \\ 4\,p_1 \\ 6\,p_2 \\ 4\,p_3 \\ p_4 \end{matrix}\right\} = a_y^{n-3}\ \alpha_z^{\nu-1} \left\{\begin{matrix} a_1^3\,\alpha_1 \\ (3\,a_1^2\,a_2\,\alpha_1 + a_1^3\,\alpha_2) \\ (3\,a_1\,a_2^2\,\alpha_1 + 3\,a_1^2\,a_2\,\alpha_2) \\ (a_2^3\,\alpha_1 + 3\,a_1\,a_2^2\,\alpha_2) \\ a_2^3\,\alpha_2 \end{matrix}\right\}.$$

Wij vinden dus

$$i = (f,f)^4 = a_y^{n-3}\, b_y^{n-3}\, \alpha_z^{\nu-1}\, \beta_z^{\nu-1}\, \overline{(a,b}^{\,3}\,;\, \overline{\alpha,\beta)}^{\,1} = 0,$$

$$j = -(i,f)^2 = a_y^{n-3} b_y^{n-3} c_y^{n-3} \alpha_z^{\nu-1} \beta_z^{\nu-1} \gamma_z^{\nu-1} \overline{(a,b,c}^{\,3}; \overline{\alpha,\beta,\gamma)}^{\,1} = 0,$$

waarbij onder $\overline{(a,b\ldots}^{\,k}\,;\,\overline{\alpha,\beta\ldots)}^{\,l}$ een vorm te verstaan is, die

in elk der symbolenparen a_1 en a_2, b_1 en b_2, enz. homogeen van den k^{den} en op dezelfde wijs in elk der symbolenparen α_1 en α_2, β_1 en β_2 enz. homogeen van den l^{den} graad is. Hoewel deze vormen door volledige uitvoering der aangegeven substitutie kunnen gevonden worden, zullen we ter vermijding van omslachtige berekeningen een minder rechtstreekschen weg inslaan.

Zooals bekend is, kan elke simultane covariant van twee vormen a_x^n en α_x^ν worden opgebouwd uit drie soorten van elementen, nl. determinanten $(a b)$, $(\alpha\, \beta)$, $(a\, \alpha)$, lineaire vormen a_x, α_x en identische covarianten $(y\, z)$ *). Dus kan de symbolische vorm $(\overset{3}{\overline{a,\ b}};\ \overset{1}{\overline{\alpha,\ \beta}})$ slechts twee termen bevatten, nl. $(a\, b)^3\ (\alpha\, \beta)$ en $(a\, b)^2\ (a\, \alpha)\, (b\, \beta)$. Wijl echter de met $(a\, b)^3\, (\alpha\, \beta)$ overeenkomende term van i bij de omwisseling der gelijkwaardige symbolen a en b of α en β van teeken omkeert en dus nul is, vinden we met weglating van een onbekenden getallenfactor

$$(ab)^2\, (a\alpha)\, (b\beta)\, a_y^{n-3}\, b_y^{n-3}\, \alpha_z^{\nu-1}\, \beta_z^{\nu-1} = 0.$$

Op overeenkomstige wijs laat zich $(\overset{3}{\overline{a,\ b,\ c}};\ \overset{1}{\overline{\alpha,\ \beta,\ \gamma}})$ bepalen. Hier zijn de vormen

$$\left.\begin{array}{lll} (bc)\ (ca)\,(ab) & . & (a\alpha)\,(b\beta)\,(c\gamma) \\ (bc)^2\,(ca) & . & (a\alpha)\,(a\beta)\,(b\gamma) \\ (bc)^2\,(ca)\,(ab) & .\ (\beta\gamma) & .\quad (a\alpha) \end{array}\right\}$$

mogelijk, van welke de eerste en tweede drie gemengde factoren $(a\alpha)$ bevatten en de derde slechts een. Nu is echter de term van j, die bij den laatsten vorm behoort, nul, daar zij van teeken verandert bij verwisseling van β en γ. En door de bekende identische vergelijking †)

$$(b\, \beta)\, (c\, \gamma) + (b\, \gamma)\, (\beta\, c) + (b\, c)\, (\gamma\, \beta) = 0$$

---

*) Men vergelijke CLEBSCH-LINDEMANN, t. a. p. blz. 187.

†) Men vergelijke CLEBSCH-LINDEMANN, t. a. p. blz. 193.

met $(b\,c)\,(c\,a)\,(a\,b)\,(a\,\alpha)$ te vermenigvuldigen, vindt men, dat de term van j, die bij den eersten der drie vormen behoort, half zoo groot is als de juist besprokene en dus eveneens nul. De tweede voorwaarde wordt derhalve, eveneens met weglating van een onbekenden getallenfactor *)

$$(bc)^2\,(ca)\,(a\alpha)\,(a\beta)\,(b\gamma)\;a_y^{n-3}\,b_y^{n-3}\,c_y^{n-3}\,\alpha_z^{\nu-1}\,\beta_z^{\nu-1}\,\gamma_z^{\nu-1}=0.$$

Laat men α_x^{ν} met a_x^n en z met y samenvallen, dan herleiden zich de beide vergelijkingen tot

$$(a\,b)^2\,(a\,c)\,(b\,d)\;a_y^{n-3}\,b_y^{n-3}\,c_y^{n-1}\,d_y^{n-1}=0,$$

$$(bc)^2\,(ca)\,(ad)\,(ae)\,(bf)\;a_y^{n-3}\,b_y^{n-3}\,c_y^{n-3}\,d_y^{n-1}\,e_y^{n-1}\,f_y^{n-1}=0.$$

In het voorgaande is dus een eenvoudige beteekenis begrepen van deze beide covarianten †).

Is $n=3$ en $\nu=1$, dan vallen y en z uit de vergelijkingen weg en drukken de simultane invarianten $(a\,b)^2\,(a\,\alpha)\,(b\,\alpha)$ en $(b\,c)^2\,(c\,a)\,(a\,\alpha)^2\,(b\,\alpha)$ door hun verdwijnen uit, dat het kwadrupel gevormd door de samenvoeging der punten $a_x^3=0$ en $\alpha_x=0$ equianharmonische of harmonische ligging heeft. Volgens het bekende overdragingsbeginsel van Clebsch zullen de ternaire tangentiëele vergelijkingen

$$(a\,b\,u)^2\,(a\,\alpha\,u)\,(b\,\alpha\,u)=0,$$
$$(b\,c\,u)^2\,(c\,a\,u)\,(a\,\alpha\,u)^2\,(b\,\alpha\,u)=0$$

dus de omhullenden voorstellen van de lijnen, die de kubische kromme $(a_1\,x_1+a_2\,x_2+a_3\,x_3)^{(3)}=0$ en de rechte lijn $\alpha_1\,x_1+\alpha_2\,x_2+\alpha_3\,x_3=0$ equianharmonisch of harmonisch snijden. De eerste dezer omhullenden is van de vierde klasse; zij raakt de lijn $\alpha_x=0$ in de twee punten die equianharmonisch liggen met de drie punten S_1, S_2, S_3 van $a_x^3=0$ op de lijn gelegen, de kromme $a_x^3=0$ in deze drie punten

*) Deze getallenfactoren kunnen niet nul zijn; want de gezochte betrekking is uit den aard der zaak geen identiteit.

†) De eerste der beide vormen is een der drie eerste overschuivingen van den vorm $t=(ab)^2\,(ac)\;a_y^{n-3}\,b_y^{n-2}\,c_y^{n-1}$ over $f=d_y^n$; de tweede is een dieper liggende overschuiving en wel een der eerste overschuivingen van t over een eerste overschuiving van f over $(f,f)^1$.

S en de buigraaklijnen van $a_x^3 = 0$ buiten deze kromme. De tweede der omhullenden is van de zesde klasse; zij raakt de lijn $\alpha_x = 0$ in de drie punten die harmonisch liggen met de drie punten S, heeft de drie punten S tot buigpunten en raakt in deze punten de kromme $a_x^3 = 0$, terwijl zij de buigraaklijnen van $a_x^3 = 0$ in de punten der kromme aanraakt. Dus bestaan de 24 gemeenschappelijke raaklijnen van a_x^3 met de eerste omhullende uit de drie raaklijnen s_1, s_2, s_3 in S_1, S_2, S_3 aan $a_x^3 = 0$ dubbel geteld en de negen buigraaklijnen van $a_x^3 = 0$ eveneens dubbel geteld, evenzoo de 36 gemeenschappelijke raaklijnen van $a_x^3 = 0$ en de tweede omhullende uit dezelfde twaalf lijnen driemaal geteld en eindelijk de 24 gemeenschappelijke raaklijnen der beide omhullenden uit de lijn $\alpha_x = 0$ zesmaal, de lijnen s driemaal en de buigraaklijnen van $a_x^3 = 0$ eenmaal geteld.

Zijn in een vlak twee krommen C^n en C^ν en een punt P gegeven, dan kan men weer vragen naar de meetkundige plaats van het punt Q, dat op de lijn $P\,Q$ met betrekking tot de snijpunten met C^n een kubisch poolstelsel en tot de snijpunten met C^ν een laatste poolpunt bepaalt, uit wier samenvoeging een equianharmonisch of harmonisch kwadrupel ontstaat. Op een willekeurige lijn door P liggen $2(n+\nu-4)$ punten van de eerste kromme en $3(n+\nu-4)$ van de tweede. Verder is de meetkundige plaats der kubische poolstelsels van P op de lijnen $P\,Q$ met betrekking tot de snijpunten dier lijnen met C^n de kubische poolkromme van P ten opzichte van C^n en de meetkundige plaats van het laatste poolpunt van P op de lijnen $P\,Q$ met betrekking tot de snijpunten dier lijnen met C^ν de poollijn van P ten opzichte van C^ν. Dus volgt uit de voor het geval $n = 3$ en $\nu = 1$ gevonden omhullenden, dat P viermaal op de eerste en zesmaal op de tweede kromme ligt. De eerste kromme is dus van den graad $2(n+\nu-2)$ en heeft P tot viervoudig punt, de tweede is van den graad $3(n+\nu-2)$ en heeft P tot zesvoudig punt.

3. De vereeniging van het kwadratische poolstelsel van y ten opzichte van $f = 0$ met het kwadratische poolstelsel

van z ten opzichte van $\varphi = 0$ geeft meer symmetrische uitkomsten. Zij leidt tot de substituties, die den vorm $p_x{}^4$ in $a_y{}^{n-2}\, a_x{}^2\, \alpha_z{}^{\nu-2}\, \alpha_x{}^2$ doen overgaan, nl.

$$\left.\begin{matrix} p_0 \\ 4\,p_1 \\ 6\,p_2 \\ 4\,p_3 \\ p_4 \end{matrix}\right\} = a_y{}^{n-2}\,\alpha_z{}^{\nu-2} \left\{\begin{matrix} a_1{}^2\,\alpha_1{}^2 \\ (2\,a_1\,a_2\,\alpha_1{}^2 + 2\,a_1{}^2\,\alpha_1\,\alpha_2) \\ (a_2{}^2\,\alpha_1{}^2 + 4\,a_1\,a_2\,\alpha_1\,\alpha_2 + a_1{}^2\,\alpha_2{}^2) \\ (2\,a_2{}^2\,\alpha_1\,\alpha_2 + 2\,a_1\,a_2\,\alpha_2{}^2) \\ a_2{}^2\,\alpha_2{}^2 \end{matrix}\right\},$$

die ons voeren tot de voorwaarden

$$i = a_y{}^{n-2}\, b_y{}^{n-2}\, \alpha_z{}^{\nu-2}\, \beta_z{}^{\nu-2}\, \overline{(a,\, b}^{\,2};\ \overline{\alpha,\, \beta)}^{\,2} = 0,$$

$$j = a_y{}^{n-2} b_y{}^{n-2} c_y{}^{n-2} \alpha_z{}^{\nu-2}\, \beta_z{}^{\nu-2}\, \gamma_z{}^{\nu-2}\, \overline{(a, b, c}^{\,2};\ \overline{\alpha, \beta, \gamma)}^{\,2} = 0.\ *)$$

Het symbool $\overline{(a,\, b}^{\,2};\ \overline{\alpha,\, \beta)}^{\,2}$ bevat vier vormen, nl.

$$\left.\begin{matrix} (a\,\alpha)^2\;(b\,\beta)^2 \\ (a\,\alpha)\;(b\,\beta)\;(a\,\beta)\;(b\,\alpha) \\ (a\,b).\;(a\,\alpha)\;(b\,\beta).\;(\alpha\,\beta) \\ (a\,b)^2.\;(\alpha\,\beta)^2 \end{matrix}\right\}.$$

Ook deze vier symbolen zijn echter niet onafhankelijk van elkaar. Stellen we ze kortheidshalve door P, Q, R, S voor, dan gelden de betrekkingen $P = Q + R$ en $2\,R = S$, die men vindt door de identiteit

$$(a\,\beta)\,(b\,\alpha) + (a\,\alpha)\,(\beta\,b) + (a\,b)\,(\alpha\,\beta) = 0$$

achtereenvolgens met $(a\,\alpha)\,(b\,\beta)$ en met $(a\,b)\,(\alpha\,\beta)$ te vermenigvuldigen. Hieruit volgt dus voor $\overline{(a,\, b}^{\,2};\ \overline{\alpha,\, \beta)}^{\,2}$ de waarde $k\,(a\,\alpha)^2\,(b\,\beta)^2 + l\,(a\,b)^2\,(\alpha\,\beta)^2$, waarin k en l twee nog

*) Deze beide symbolen kunnen evengoed in de gedaante $\overline{(a,\, b,\, \alpha\, \beta)}^{\,2}$ en $\overline{(a,\, b,\, c,\, \alpha,\, \beta,\, \gamma)}^{\,2}$ geschreven worden.

te bepalen getallenfactoren zijn. Nu is de coëfficiënt van $\alpha_1^2 \beta_2^2$ met dien van den gelijkwaardigen term $\alpha_2^2 \beta_1^2$ vereenigd volgens de gemaakte onderstelling $2[k a_1^2 b_2^2 + l(ab)^2]$ of $2[(k+2l)\, a_1^2 b_2^2 - 2l\, a_1 a_2 b_1 b_2]$ en in werkelijkheid $2\left(\frac{7}{6} a_1^2 b_2^2 - a_1 a_2 b_1 b_2\right)$; hieruit volgt $k = \frac{1}{6}$ en $l = \frac{1}{2}$. De eerste voorwaarde wordt dus na verdrijving der breuken

$$[(a\,\alpha)^2 (b\,\beta)^2 + 3\,(a\,b)^2\,(\alpha\,\beta)^2] \quad a_y^{n-2} b_y^{n-2} \alpha_z^{\nu-2} \beta_z^{\nu-2} = 0.$$

De uitdrukking $\overline{(a, b, c}^{\,2}; \overline{\alpha, \beta, \gamma)}^{\,2}$ brengt elf vormen mee, die we naar het aantal gemengde factoren rangschikken en, voor zoover ze niet identisch nul zijn, door een enkele letter aanduiden. Ze zijn, naar verschillende typen gerangschikt,

$$
\begin{array}{lll}
\textit{type } 6\,(a\,\alpha)\ldots\ldots & P_1 = & (a\,\alpha)^2 (b\,\beta)^2 (c\,\gamma)^2, \\
 & P_2 = & (a\,\alpha)^2 (b\,\beta)(c\,\gamma)(b\,\gamma)(c\,\beta), \\
 & P_3 = & (a\,\beta)(a\,\gamma)(b\,\gamma)(b\,\alpha)(c\,\alpha)(c\,\beta), \\
\textit{type } 4\,(a\,\alpha)\ldots\ldots & Q_1 = & (b\,c)\,.\,(a\,\alpha)^2 (b\,\beta)(c\,\gamma)\,.\,(\beta\,\gamma), \\
 & & (b\,c)\,.\,(a\,\beta)(a\,\gamma)(b\,\alpha)(c\,\alpha)\,.\,(\beta\,\gamma), \\
 & Q_2 = & (b\,c)\,.\,(a\,\beta)(b\,\gamma)(a\,\alpha)(c\,\alpha)\,.\,(\beta\,\gamma), \\
\textit{type } 2\,(a\,\alpha)\ldots\ldots & R_1 = & (a\,b)(a\,c)\,.\,(b\,\beta)(c\,\gamma)\,.\,(\alpha\,\beta)(\alpha\,\gamma), \\
 & R_2 = & (b\,c)^2\,.\,(a\,\beta)(a\,\gamma)\,.\,(\alpha\,\beta)(\alpha\,\gamma), \\
 & R_3 = & (a\,b)(a\,c)\,.\,(b\,\alpha)(c\,\alpha)\,.\,(\beta\,\gamma)^2, \\
 & R_4 = & (b\,c)^2\,.\,(a\,\alpha)^2\,.\,(\beta\,\gamma)^2, \\
\textit{type } 0\,(a\,\alpha)\ldots\ldots & & (b\,c)(c\,a)(a\,b)\,.\,(\beta\,\gamma)(\gamma\,\alpha)(\alpha\,\beta).
\end{array}
$$

Van deze elf vormen zijn de vijfde en de laatste nul, omdat zij bij verwisseling van b en c van teeken omkeeren. Verder is

$$2\,P_2 = 2\,P_1 - R_4,\quad Q_1 = \tfrac{1}{2}\,R_4,\qquad R_1 = \tfrac{1}{4}\,R_4,$$
$$P_3 = P_1 - \tfrac{3}{4}\,R_4,\quad Q_2 = -\tfrac{1}{4}\,R_4,\quad R_2 = R_3 = \tfrac{1}{2}\,R_4,$$

zooals gemakkelijk blijkt met behulp der identiteiten

$$(b\,\beta)(c\,\gamma) + (b\,\gamma)(\beta\,c) + (b\,c)(\gamma\,\beta) = 0,$$
$$(b\,\beta)^2(c\gamma)^2 + (b\gamma)^2(c\beta)^2 - (bc)^2(\beta\gamma)^2 = 2\,(b\beta)(b\gamma)(c\beta)(c\gamma).$$

Men kan alle overblijvende vormen dus in P_1 en R_4 uit-

drukken en voor $\overset{2}{\overline{(a, b, c}};\ \overset{2}{\overline{\alpha, \beta, \gamma)}}$ derhalve

$$(a\alpha)^2\,[k\,(b\beta)^2\,(c\gamma)^2 + l\,(bc)^2\,(\beta\gamma)^2]$$

in de plaats stellen. Ter bepaling van k en l zoeken we den coëfficiënt van den term met $\alpha_2^2\,\beta_1^2\,\gamma_1^2$ en de gelijkwaardige omwisselingen. In P_1 is $\alpha_2^2\,\beta_1^2\,\gamma_1^2$ vermenigvuldigd met $3\,a_1^2\,b_2^2\,c_2^2$, in R_4 met $4\,(a_1^2\,b_2^2\,c_2^2 - a_2^2\,b_1\,b_2\,c_1\,c_2)$ en in $\overset{2}{\overline{(a, b, c}};\ \overset{2}{\overline{\alpha, \beta, \gamma)}}$ met $3\,(11\,a_1^2\,b_2^2\,c_2^2 - 12\,a_2^2\,b_1\,b_2\,c_1\,c_2)$. We vinden dus $k = -1$, $l = 9$, zoodat de tweede voorwaarde wordt

$$(a\alpha)^2[(b\beta)^2(c\gamma)^2 - 9(bc)^2(\beta\gamma)^2]\,a_y^{n-2}\,b_y^{n-2}\,c_y^{n-2}\,\alpha_z^{\nu-2}\,\beta_z^{\nu-2}\,\gamma_z^{\nu-2} = 0.$$

Voor $\alpha_x^\nu = a_x^n$ en $z = y$ herleiden beide uitkomsten zich tot $(a\,b)^2\,a_y^{n-2}\,b_y^{n-2} = 0$, de punten van den covariant $\varphi \equiv (f, f)^2 = 0$ van HESSE. Werkelijk vormen twee punten elk dubbel geteld alleen dan een equianharmonisch en dan ook tevens een harmonisch kwadrupel als ze samenvallen en dit gebeurt met de kwadratische poolpunten van elk met den covariant van HESSE overeenkomend punt als pool.

Zijn n en ν beide twee, dan vallen y en z uit de vergelijkingen weg en drukken de betrekkingen

$$(a\,\alpha)^2\,(b\,\beta)^2 + 3\,(a\,b)^2\,(\alpha\,\beta)^2 = 0,$$
$$(a\,\alpha)^2\,[(b\,\beta)^2\,(c\,\gamma)^2 - 9\,(b\,c)^2\,(\beta\,\gamma)^2] = 0$$

uit, dat de puntenparen $a_x^2 = 0$ en $\alpha_x^2 = 0$ equianharmonisch of harmonisch liggen. Volgens het overdragingsbeginsel van CLEBSCH stellen de vergelijkingen

$$(a\,\alpha\,u)^2\,(b\,\beta\,u)^2 + 3\,(a\,b\,u)^2\,(\alpha\,\beta\,u)^2 = 0,$$
$$(a\,\alpha\,u)^2\,[(b\,\beta\,u)^2\,(c\,\gamma\,u)^2 - 9\,(b\,c\,u)^2\,(\beta\,\gamma\,u)^2] = 0$$

derhalve de omhullenden der lijnen voor, die de kegelsneden $a_x^2 = 0$ en $\alpha_x^2 = 0$ equianharmonisch of harmonisch snijden. De eerste vergelijking gaat volgens de notatie van CLEBSCH over in $F_{12}^2 + 3\,F_{11}\,F_{22} = 0$, een kromme van de vierde klasse, die de snijpunten van $a_x^2 = 0$ en $\alpha_x^2 = 0$ tot dub-

belpunten en de raaklijnen in die punten aan de beide krommen tot dubbelpuntsraaklijnen heeft. En de tweede vergelijking splitst zich in $F_{12} = 0$, de omhullende der lijnen op welke de snijpuntenparen elkaar harmonisch scheiden, en in $F_{12}^2 - 9\, F_{11}\, F_{22} = 0$, de omhullende der lijnen waarvoor de dubbelverhouding dier paren 2 of $\frac{1}{2}$ is *).

Denken we ons in een vlak nu weer twee krommen C^n en C^ν en een punt P gegeven, dan kunnen we de meetkundige plaats zoeken van het punt Q, dat met betrekking tot de snijpunten der lijn $P\,Q$ met de beide krommen twee poolparen bepaalt, die vereenigd een equianharmonisch of harmonisch kwadrupel opleveren. Langs den in art. 2 gevolgden weg vinden we, dat de eerste kromme van den graad $2\,(n + \nu - 2)$ is en viermaal door P gaat, dat de tweede kromme van den graad $3\,(n + \nu - 2)$ is en zesmaal door P gaat; hierin komen de nieuwe krommen dus met die van art. 2 overeen. Maar de tweede bestaat hier uit twee deelen, uit een tweemaal door P gaande kromme van den $n + \nu - 2^{\text{den}}$ graad en een viermaal door P gaande kromme van den $2\,(n + \nu - 2)^{\text{den}}$ graad; van deze deelen bevat het eerste de punten Q met elkaar harmonisch scheidende poolparen, enz.

4. De vereeniging van het kwadratisch poolstelsel van y ten opzichte van $f = 0$ met de laatste poolpunten van z ten opzichte van $\varphi = 0$ en van t ten opzichte van $\psi \equiv A_x^N = 0$ voert tot de substituties, die p_x^4 doen overgaan in

$$a_y^{n-2}\, a_x^2 \,.\, \alpha_z^{\nu-1}\, \alpha_x \,.\, A_t^{N-1}\, A_x\,;$$

nl. tot de substituties

$$\left.\begin{array}{r} p_0 \\ 4p_1 \\ 6p_2 \\ 4p_3 \\ p_4 \end{array}\right\} = a_y^{n-2}\alpha_z^{\nu-1}A^{N-1} \left\{\begin{array}{llll} a_1^2\alpha_1 A_1 & & & \\ a_1^2(\alpha_1 A_2+\alpha_2 A_1) & +2a_1a_2\alpha_1 A_1 & & \\ a_1^2\,\alpha_2\,A_2 & +2a_1a_2(\alpha_1 A_2+\alpha_2 A_1) & +a_2^2\alpha_1 A_1 & \\ & 2a_1a_2\,\alpha_2 A_2 & +a_2^2(\alpha_1 A_2+\alpha_2 A_1) & \\ & & a_2^2\,\alpha_2 A_2 & \end{array}\right.$$

*) Men vergelijke een vraagstuk van A. R. Johnson, M. A. in de *Wiskundige Opgaven*, deel III, blz. 295.

Het uit de vereeniging ontstane puntkwadrupel is dus equi-anharmonisch of harmonisch onder de voorwaarden

$$i = a_y^{n-2} b_y^{n-2} \alpha_z^{\nu-1} \beta_z^{\nu-1} A_t^{N-1} B_t^{N-1} \overset{2}{\overline{(a,b;}}\ \overset{1}{\overline{\alpha,\beta;}}\ \overset{1}{\overline{A,B)}} = 0,$$

$$j = a_y^{n-2} b_y^{n-2} c_y^{n-2} \alpha_z^{\nu-1} \beta_z^{\nu-1} \gamma_z^{\nu-1} A_t^{N-1} B_t^{N-1} C_t^{N-1} \times$$
$$\times \overset{2}{\overline{(a,b,c;}}\ \overset{1}{\overline{\alpha,\beta,\gamma;}}\ \overset{1}{\overline{A,B,C)}} = 0.$$

Het symbool $\overset{2}{\overline{(a,b;}}\ \overset{1}{\overline{\alpha,\beta;}}\ \overset{1}{\overline{A,B)}}$ bevat de vier vormen

$$P_1 = (a\,b)^2 . (\alpha\,A)\,(\beta\,B),$$
$$Q_1 = (a\,b) . (a\,\alpha)\,(b\,A)\,(\beta\,B),$$
$$R_1 = (a\,\alpha)\,(b\,\beta)\,(a\,A)\,(b\,B),$$
$$R_2 = (a\,\alpha)\,(a\,\beta)\,(b\,A)\,(b\,B),$$

als men de vormen weglaat, die identisch nul zijn. Tusschen deze bestaan de betrekkingen $P_1 = 2\,Q_1$, $R_2 = Q_1 + R_1$. Dus is

$$\overset{2}{\overline{(a_1 b;}}\ \overset{1}{\overline{\alpha_1 \beta;}}\ \overset{1}{\overline{A_1 B)}} = k\,(ab)^2(\alpha A)(\beta B) + l\,(a\alpha)(b\beta)(aA)(bB).$$

Zoeken we nu den coëfficiënt van $a_1\,a_2\,b_1\,b_2$, dan volgen hieruit de betrekkingen $l - 2\,k = \frac{1}{3}$, $l + 2\,k = -\frac{1}{6}$ en dus is $l = \frac{1}{12}$ en $k = -\frac{1}{8}$. De eerste voorwaarde wordt derhalve

$$[3\,(a\,b)^2\,(\alpha\,A)\,(\beta\,B) - 2\,(a\,\alpha)\,(b\,\beta)\,(a\,A)\,(b\,B)] \times$$
$$\times\ a_y^{n-2}\,b_y^{n-2}\ \alpha_z^{\nu-1}\,\beta_z^{\nu-1}\,A_t^{N-1}\,B_t^{N-1} = 0.$$

Verder kan $\overset{2}{\overline{(a,b,c;}}\ \overset{1}{\overline{\alpha,\beta,\gamma;}}\ \overset{1}{\overline{A,B,C)}}$ de termen

$$P_1 = (b\,c)^2 . (a\,\alpha)\,(a\,A)\,(\beta\,B)\,(\gamma\,C),$$
$$P_2 = (a\,b)\,(a\,c) . (b\,\alpha)\,(c\,A)\,(\beta\,B)\,(\gamma\,C),$$
$$Q_1 = (b\,c) . (a\,\alpha)\,(a\,A)\,(b\,\beta)\,(c\,B)\,(\gamma\,C),$$
$$R_1 = (a\,\alpha)\,(a\,A)\,(b\,\beta)\,(b\,B)\,(c\,\gamma)\,(c\,C),$$
$$R_2 = (a\,\alpha)\,(a\,A)\,(b\,\beta)\,(b\,\gamma)\,(c\,B)\,(c\,C)$$

bevatten. Daar de betrekkingen

$$P_1 = P_2, \; P_2 = Q_1, \; R_2 = Q_1 + R_1$$

gelden, kunnen we stellen

$$\frac{2}{(a, b, c;} \frac{1}{\alpha, \beta, \gamma;} \frac{1}{A, B, C)} =$$

$$= [k\,(b\,c)^2\,(\beta\,B)\,(\gamma\,C) + m\,(b\,\beta)\,(b\,B)\,(c\,\gamma)\,(c\,C)]\,(a\,\alpha)\,(a\,A).$$

En bepalen we den coëfficiënt van $a_1\,a_2\,b_1\,b_2\,c_1\,c_2$, dan vinden we $k = -9$ en $m = -2$, zoodat de tweede voorwaarde wordt

$$[9\,(b\,c)^2\,(\beta\,B)\,(\gamma\,C) + 2\,(b\,\beta)\,(b\,B)\,(c\,\gamma)\,(c\,C)]\,(a\,\alpha)\,(a\,A) \times$$
$$\times\, a_y^{n-2}\,b_y^{n-2}\,c_y^{n-2}\,\alpha_z^{\nu-1}\,\beta_z^{\nu-1}\gamma_z^{\nu-1}A_t^{N-1}B_t^{N-1}C_t^{N-1} = 0.$$

Voor $A_x^N = \alpha_x^\nu = a_x^n$ en $t = z = y$ herleiden beide uitkomsten, wijl de eerste term identisch nul wordt, zich tot

$$(a\,c)\,(b\,d)\,(a\,e)\,(b\,f)\,a_y^{n-2}\,b_y^{n-2}\,c_y^{n-1}\,d_y^{n-1}\,e_y^{n-1}\,f_y^{n-1} = 0,$$

$$(a\,d)\,(a\,g)\,(b\,e)\,(b\,h)\,(c\,f)\,(c\,i)\;a_y^{n-2}\,b_y^{n-2}\,c_y^{n-2} \times$$
$$\times\, d_y^{n-1}\,e_y^{n-1}\,f_y^{n-1}\,g_y^{n-1}\,h_y^{n-1}\,i_y^{n-1} = 0.$$

Als $n = 2$, $\nu = 1$, $N = 1$ is, vallen de y, z, t uit de vergelijking weg. Dan drukken de betrekkingen

$$3\,(a\,b^2)\,(\alpha\,A)^2 - 2\,(a\,\alpha)\,(b\,\alpha)\,(a\,A)\,b\,A) = 0,$$

$$(a\,\alpha)\,(a\,A)\,[9\,(b\,c)^2\,(\alpha\,A)^2 + 2\,(b\,\alpha)\,(c\,\alpha)\,(b\,A)\,(c\,A)] = 0$$

de voorwaarden uit, dat de punten $a_x^2 = 0$, $\alpha_x = 0$, $A_x = 0$ een equianharmonisch of harmonisch kwadrupel vormen. Naar behooren splitst de laatste voorwaarde zich in de twee vergelijkingen

$$(a\alpha)\,(a\,A) = 0, \quad 9\,(a\,b)^2\,(\alpha\,A)^2 + 2\,(a\,\alpha)\,(b\,\alpha)\,(a\,A)\,(b\,A) = 0,$$

waarvan de eerste betrekking heeft op het geval dat de beide punten $a_x^2 = 0$ de beide anderen harmonisch scheiden. Zoo komt men weer tot drie omhullenden

$$3\,(a\,b\,u)^2\,(\alpha\,A\,u)^2 - 2\,(a\,\alpha\,u)\,(b\,\alpha\,u)\,(a\,A\,u)\,(b\,A\,u) = 0$$

$$(a\,\alpha\,u)\,(a\,A\,u) = 0\,,$$

$$9\,(a\,b\,u)^2\,(\alpha\,A\,u)^2 + 2\,(a\,\alpha\,u)\,(b\,\alpha\,u)\,(a\,A\,u)\,(b\,A\,u) = 0\,,$$

waarvan de eerste op de equianharmonische en de beide andere op de harmonische snijding betrekking hebben. De tweede is een kegelsnee; zooals meetkundig onmiddellijk blijkt, raakt zij de gegeven lijnen en de raaklijnen aan $a_x^2 = 0$ in de punten, waar de gegeven lijnen deze snijden. Stelt men de tangentiëele vergelijkingen van de gegeven kegelsnee, de gevonden kegelsnee en het snijpunt der gegeven lijnen door $F = 0$, $F' = 0$ en $P = 0$ voor, dan zijn de drie krommen achtereenvolgens

$$3\,F\,P^2 - 2\,F'^2 = 0\,,\quad F' = 0\,,\quad 9\,F\,P^2 + 2\,F'^2 = 0.$$

Hieruit blijkt, dat de beide krommen van de vierde klasse de beide gegeven lijnen tot dubbelraaklijnen hebben.

Zijn nu eindelijk in een vlak weer drie krommen C^n, C^ν, C^N en een punt P gegeven, dan kan men de meetkundige plaats zoeken van het punt Q, dat op de lijn $P\,Q$ met betrekking tot C^n een poolpuntenpaar en met betrekking tot C^ν en C^N laatste poolpunten bepaalt, die bij vereeniging een equianharmonisch of harmonisch kwadrupel vormen. We vinden voor de eerste meetkundige plaats een kromme van den graad $2\,(n + \nu + N - 2)$ met een viervoudig punt in P, voor de tweede de vereeniging van een kromme van den graad $n + \nu + N - 2$, die P tot dubbelpunt heeft, met een kromme van den graad $2\,(n + \nu + N - 2)$, die viermaal door P gaat.

5. Zoo komen we dan nu tot vier vormen $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$ en $\chi = \bar{a}^{\bar{n}} = 0$ achtereenvolgens van de graden n, ν, N, $\bar{n}$ en zoeken we de voorwaarden, die uitdrukken dat de laatste poolpunten van y, z, t, s ten opzichte van deze stelsels een equianharmonisch of harmonisch kwadrupel vormen. We hebben dan te doen met de substituties, die

p_x^4 in $a_y^{n-1} a_x \,.\, \alpha_z^{\nu-1} \alpha_x \,.\, A_t^{N-1} A_x \,.\, \bar{a}_s^{\bar{n}-1} \bar{a}_x$ doen overgaan, nl.

$$\left.\begin{matrix} p_0 \\ 4p_1 \\ \\ 6p_2 \\ 4p_3 \\ p_4 \end{matrix}\right\} = a_y^{n-1} \alpha_z^{\nu-1} A_t^{N-1} \bar{a}_s^{\bar{n}-1} \left\{\begin{matrix} a_1 \alpha_1 A_1 \bar{a}_1 \\ a_2\alpha_1 A_1\bar{a}_1 + a_1\alpha_2 A_1\bar{a}_1 + a_1\alpha_1 A_2\bar{a}_1 \\ + a_1\alpha_1 A_1\bar{a}_2 (= \Sigma a_2\alpha_1 A_1\bar{a}_1) \\ \Sigma\, a_2\, \alpha_2\, A_1\, \bar{a}_1 \\ \Sigma\, a_2\, \alpha_2\, A_2\, \bar{a}_1 \\ a_2\, \alpha_2\, A_2\, \bar{a}_2 \end{matrix}\right\}.$$

We vinden

$$i = a_y^{n-1}\, b_y^{n-1}\, \alpha_z^{\nu-1}\, \beta_z^{\nu-1}\, A_t^{N-1}\, B_t^{N-1}\, \bar{a}_s^{\bar{n}-1}\, \bar{b}_s^{\bar{n}-1} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{a,\, b}\, ;\, \frac{1}{\alpha,\, \beta}\, ;\, \frac{1}{A,\, B}\, ;\, \frac{1}{\bar{a},\, \bar{b}}\right),$$

$$j = a_y^{n-1}\, b_y^{n-1}\, c_y^{n-1}\, \alpha_z^{\nu-1} \ldots\ldots C_t^{N-1}\, \bar{a}_s^{\bar{n}-1}\, \bar{b}_s^{\bar{n}-1}\, \bar{c}_s^{\bar{n}-1} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{a,\, b,\, c}\, ;\, \frac{1}{\alpha,\, \beta,\, \gamma}\, ;\, \frac{1}{A,\, B,\, C}\, ;\, \frac{1}{\bar{a},\, \bar{b},\, \bar{c}}\right).$$

Nu bestaat $\left(\frac{1}{a,\, b}\, ;\, \frac{1}{\alpha,\, \beta}\, ;\, \frac{1}{A,\, B}\, ;\, \frac{1}{\bar{a},\, \bar{b}}\right)$, wijl determinantenfactoren $(a\,b)$, enz. niet kunnen voorkomen, uit twee drietallen van gelijkwaardige termen, nl.:

$$\left.\begin{matrix} P_1 = (aA)\,(bB)\,.\,(\bar{a}\,\alpha)\,(\bar{b}\beta) \\ P_2 = (a\,\bar{a})\,(b\,\bar{b})\,.\,(\alpha A)\,(\beta B) \\ P_3 = (a\alpha)\,(b\beta)\,.\,(A\bar{a})\,(Bb) \end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix} Q_1 = (a\beta)\,(\alpha B)\,(A\bar{b})\,(\bar{a}\,b) \\ Q_2 = (a\,B)\,(A\bar{b})\,(\bar{a}\beta)\,(\alpha\, b) \\ Q_3 = (a\bar{b})\,(\bar{a}\,\beta)\,(\alpha\, B)\,(Ab) \end{matrix}\right\}$$

waarvan men het eerste drietal bicyclisch, het tweede monocyclisch *) zou kunnen noemen. Tusschen deze bestaan de betrekkingen

$$P_1 = Q_2 + Q_3, \quad P_2 = Q_3 + Q_1, \quad P_3 = Q_1 + Q_2.$$

Dus kunnen we stellen

$$\left(\frac{1}{a,\, b}\, ;\, \frac{1}{\alpha,\, \beta}\, ;\, \frac{1}{A,\, B}\, ;\, \frac{1}{\bar{a},\, \bar{b}}\right) = \varrho\,(P_1 + P_2 + P_3),$$

*) Deze termen zijn ontleend aan de „*groepentheorie*”.

waardoor de eerste voorwaarde overgaat in

$$(P_1+P_2+P_3)\,a_y^{n-1}\,b_y^{n-1}\,\alpha_z^{\nu-1}\,\beta_z^{\nu-1}\,A_t^{N-1}\,B_t^{N-1}\,\bar{a}_s^{\bar{n}-1}\,\bar{b}_s^{\bar{x}-1} = 0.$$

Evenzoo bestaat $\dfrac{1}{(a, b, c\,;}\ \dfrac{1}{\alpha, \beta, \gamma\,:}\ \dfrac{1}{A, B, C\,;}\ \dfrac{1}{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})}$ uit zes gelijkwaardige termen, nl.

$$\left.\begin{aligned} P_{1,1} &= (a\,A)\,(b\,B)\,.\,(\bar{a}\,\alpha)\,(\bar{b}\,\beta)\,.\,(c\,\bar{c})\,(\gamma\,C) \\ P_{2,1} &= (a\,\bar{a})\,(b\,\bar{b})\,.\,(\alpha A)\,(\beta B)\,.\,(c\,\gamma)\,(C\,\bar{c}) \\ P_{3,1} &= (a\,\alpha)\,(b\,\beta)\,.\,(A\,\bar{a})\,(B\,\bar{b})\,.\,(c\,C)\,(\bar{c}\,\gamma) \end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} P_{1,2} &= (a\,A)\,(b\,B)\,.\,(\bar{a}\,\alpha)\,(\bar{b}\,\beta)\,.\,(c\,\gamma)\,(C\,\bar{c}) \\ P_{2,2} &= (a\,\bar{a})\,(b\,\bar{b})\,.\,(\alpha A)\,(\beta B)\,.\,(c\,C)\,(\bar{c}\,\gamma) \\ P_{3,2} &= (a\,\alpha)\,(b\,\beta)\,.\,(A\,\bar{a})\,(B\,\bar{b})\,.\,(c\,\bar{c})\,(\gamma\,C) \end{aligned}\right\},$$

die onmiddellijk uit de drie boven gevonden termen P zijn gevormd.

We hebben dus voor de tweede voorwaarde

$$(P_{1,1} + P_{2,1} + P_{3,1} + P_{1,2} + P_{2,2} + P_{3,2}) \times$$
$$\times\, a_y^{n-1}\,b_y^{n-1}\,c_y^{n-1}\,\alpha_z^{\nu-1} \ldots . \, C_t^{N-1}\,\bar{a}_s^{\bar{n}-1}\,\bar{b}_s^{\bar{n}-1}\,\bar{c}_s^{\bar{n}-1} = 0.$$

Voor $\bar{a}_x^{\bar{n}} = A_x^N = \alpha_x^\nu = a_x^n$ en $s = t = z = y$ herleiden beide voorwaarden zich natuurlijk tot identiteiten.

Als $\bar{n} = N = \nu = n = 1$ is, vallen de onbekenden uit de voorwaardevergelijkingen weg. Dan drukken de voorwaarden

$$P_1 + P_2 + P_3 = 0,$$
$$P_{1,1} + P_{2,1} + P_{3,1} + P_{1,2} + P_{2,2} + P_{3,2} = 0$$

uit, dat de vier punten door de lineaire vergelijkingen $a_x = 0$, enz. gegeven een equianharmonisch of harmonisch kwadrupel vormen. Wijl we hier met lineaïre vormen te doen hebben, is het overbodig telkens nieuwe symbolen in te voeren. We kunnen ze dus door $a_x = 0$, $b_x = 0$, $c_x = 0$, $d_x = 0$ vervangen, waardoor de beide betrekkingen overgaan in

$$(a\,c)^2\,(d\,b)^2 + (a\,d)^2\,(b\,c)^2 + (a\,b)^2\,(c\,d)^2 = 0\,,$$
$$\Sigma\,(a\,b)^2\,(c\,d)^2\,(a\,c)\,(b\,d) = 0.$$

Van deze laat de eerste zich met behulp der identiteit, die men door het weglaten van alle kwadraten verkrijgt, vervormen tot

$$\left\{\frac{(a\,c)}{(a\,d)} : \frac{(b\,c)}{(b\,d)}\right\}^2 - \left\{\frac{(a\,c)}{(a\,d)} : \frac{(b\,c)}{(b\,d)}\right\} + 1 = 0\,,$$

of

$$(a\,b\,c\,d)^2 - (a\,b\,c\,d) + 1 = 0\,,$$

wat zooals men weet de voorwaarde is, dat de dubbelverhouding $(a\,b\,c\,d)$ gelijk is aan een der onbestaanbare derdemachtswortels uit de negatieve eenheid en de vier punten dus equianharmonisch liggen. En de tweede splitst zich in de drie factoren

$$\frac{(a\,c)}{(a\,d)} : \frac{(b\,c)}{(b\,d)} = -1\,, \quad \frac{(a\,d)}{(a\,b)} : \frac{(c\,d)}{(c\,b)} = -1\,, \quad \frac{(a\,b)}{(a\,c)} : \frac{(d\,b)}{(d\,c)} = -1\,,$$

die met de drie harmonische kwadrupels van verschillende paring overeenstemmen *).

Met de beide gevonden voorwaarden staan weer de omhullenden

$$(a\,c\,u)^2\,(d\,b\,u)^2 + (a\,d\,u)^2\,(b\,c\,u)^2 + (a\,b\,u)^2\,(c\,d\,u)^2 = 0,$$
$$\Sigma\,(a\,b\,u)^2\,(c\,d\,u)^2\,(a\,c\,u)\,(b\,d\,u) = 0$$

in verband; van deze splitst de tweede zich in drie verschillende kegelsneden, die de vier gegeven lijnen $a_x = 0$, $b_x = 0$, $c_x = 0$, $d_x = 0$ aanraken.

Zijn eindelijk weer vier krommen C^n, C^ν, C^N, $C^{\bar{n}}$ en een punt P in een zelfde vlak gegeven, dan is de meetkundige plaats van het punt Q, dat op $P\,Q$ met betrekking tot de snijpunten dier lijn met de krommen vier laatste poolpunten bepaalt, waarvan de vereeniging een equianharmonisch of

*) Deze bekende uitkomsten hadden het uitgangspunt van dit artikel kunnen vormen; nu dienen ze tot bevestiging van het voorgaande.

een harmonisch kwadrupel vormen, een kromme van den $2\,(n+\nu+N+\bar{n}-2)^{\text{den}}$ graad, die viermaal door P gaat, of de vereeniging van drie krommen van den $n+\nu+N+\bar{n}-2^{\text{den}}$ graad, die in P een gemeenschappelijk dubbelpunt hebben.

6. We voegen ten slotte het punt z aan de punten van $f \equiv a_x^n = 0$ toe en zoeken de betrekking, die er tusschen y en z bestaan moet, opdat het bikwadratisch poolstelsel van y ten opzichte van $a_x^n\,(x\,z) = 0$ equianharmonisch of harmonisch gelegen zij. Hiertoe bepalen we dit poolstelsel door op de vergelijking $a_x^n\,(x\,z) = 0$ het proces $y_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ der poolvorming $n-3$-maal toe te passen. Dit geeft met weglating van gemeenschappelijke getallenfactoren

$$p_x^4 = 4\, a_y^{n-3}\, a_x^3\,(x\,z) + (n-3)\, a_y^{n-4}\, a_x^4\,(y\,z)$$

en deze vergelijking levert de substitutie

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = a_y^{n-3}. \begin{pmatrix} 4\,a_1^3\,z_2 \\ (3\,a_1^2\,a_2\,z_2 - a_1^3\,z_1) \\ (2a_1\,a_2^2\,z_2 - 2a_1^2\,a_2 z_1) \\ (a_2^3 z_2 - 3a_1 a_2^2 z_1) \\ (-4a_3^3 z_1) \end{pmatrix} + (n-3)\,a_y^{n-4}(yz) \begin{pmatrix} a_1^4 \\ a_1^3\,a_2 \\ a_1^2\,a_2^2 \\ a_1\,a_2^3 \\ a_2^4 \end{pmatrix}.$$

We vinden dus voor de eerste voorwaarde

$$i = a_y^{n-4}\, b_y^{n-4} \times$$

$$\times[a_y b_y (\overset{3}{\overline{a,b}}\,;\overset{2}{\overline{z}}) + 2(n-3)a_y\,(\overset{3}{\overline{a}}\,;\overset{4}{\overline{b}}\,;\overset{1}{\overline{z}})\,(yz) + (n-3)^2\,(\overset{4}{\overline{a,\,b}})\,(yz)^2] = 0.$$

Hierin is nu

$$(\overset{3}{\overline{a,\,b}}\;;\overset{2}{\overline{z}}) = k\,(a\,b)^2\,a_z\,b_z,$$

$$(\overset{3}{\overline{a}}\,;\overset{4}{\overline{b}}\,;\overset{1}{\overline{z}}) = l\,(a\,b)^3\,b_z,\quad (\overset{4}{\overline{a,\,b}}) = m\,(a\,b)^4.$$

Nu doet echter de identiteit

$$a_y\, b_z - a_z\, b_y = (a\,b)\,(y\,z)$$

den vorm $(a\,b)\,(y\,z)\,a_y\,b_z$ overgaan in $\frac{1}{2}\,(a\,b)^2\,(y\,z)^2$. Dus wordt onze voorwaarde

$$(a\,b)^2\,a_y^{n-4}\,b_y^{n-4}\,[k\,a_y\,b_y\,a_z\,b_z + l'\,(a\,b)^2\,(y\,z)^2] = 0,$$

waarin k en l' nog onbekend zijn. Deze coëfficiënten worden gemakkelijk bepaald met behulp van de termen, die $y_1^2\,z_1^2$ en $y_1^2\,z_2^2$ bevatten; door gelijkstelling van de coëfficiënten dier termen uit den ondersteldeu vorm met die van de werkelijkheid vindt men $k = 12$ en $l' = (n+1)(n-3)$ en dus

$$(a\,b)^2 a_y^{n-4} b_y^{n-4}[12\,a_y b_y a_z b_z + (n+1)\,(n-3)\,(a\,b)^2\,(y\,z)^2] = 0.$$

Werkelijk moet $n-3$ factor zijn van den coëfficiënt van $(y\,z)^2$.

Eveneens vindt men

$$j = a_y^{n-4}\,b_y^{n-4}\,c_y^{n-4}\,[\overset{4}{\overline{(a,b,c;}}\ \overset{3}{\overline{y,z)}} + \overset{4}{\overline{(a,b,c\,;}}\ \overset{2}{\overline{y,z)}}\,(y\,z) +$$
$$+ \overset{4}{\overline{(a,b,c\,;}}\ \overset{1}{\overline{y,z)}}\,(y\,z)^2 + \overset{4}{\overline{(a,b,c)}}\,(y\,z)^3] = 0\,,$$

waarvoor men in verband met de samenstelling van j ook schrijven kan

$$a_y^{n-4}\,b_y^{n-4}\,c_y^{n-4}\,[\overset{3}{\overline{(a,b,c\,;}}\ \overset{3}{\overline{z)}}\,a_y\,b_y\,c_y + \overset{4}{\overline{(a\,;}}\ \overset{3}{\overline{b,\ c\,;}}\ \overset{2}{\overline{z)}}\,b_y\,c_y\,(y\,z) +$$
$$+ \overset{4}{\overline{(a,b\,;}}\ \overset{3}{\overline{c\,;}}\ \overset{1}{\overline{z)}}\,c_y\,(y\,z)^2 + \overset{4}{\overline{(a,b,c)}}\,(y\,z)^3] = 0.$$

Nu is

$$\overset{3}{\overline{(a,b,c\,;}}\ \overset{3}{\overline{z)}} = k_1(bc)^3 a_z^3 + l_1(b\,c)^2(c\,a)a_z^2 b_z + m_1(b\,c)(c\,a)(a\,b)a_z b_z c_z,$$
$$\overset{4}{\overline{(a\,;}}\ \overset{3}{\overline{b,c\,;}}\ \overset{2}{\overline{z)}} = k_2\,(a\,b)^2\,(a\,c)^2\,b_z\,c_z + l_2\,(b\,c)^2\,(c\,a)\,(a\,b)\,a_z^2,$$
$$\overset{4}{\overline{(a,b\,;}}\ \overset{3}{\overline{c\,;}}\ \overset{1}{\overline{z)}} = k_3\,(a\,b)^2(a\,c)^2(b\,c)b_z + l_3\,(a\,b)^3\,(a\,c)\,(b\,c)\,c_z,$$

$$\overline{(a\,,\quad b\,,\quad c)}^{\,4} = k_4 (b\,c)^2 (c\,a)^2 (a\,b)^2.$$

Dit herleidt zich tot de termen met l_1, l_2, k_2, k_3, k_4. Want de termen met k_1 en m_1 zijn nul, wijl ze bij verwisseling van b en c in de tegengestelde waarden overgaan. En de term met l_3 is eveneens nul, wijl ze van teeken verandert bij verwisseling van a en b. We vinden dus

$$a_y^{n-4} b_y^{n-4} c_y^{n-4} \left\{ \begin{array}{l} (bc)^2 (ca) b_y c_y a_z^2 [l_1\, a_y b_z + l_2 (ab)(yz)] \\ + \,(a\,b)^2 (a\,c)^2 (y\,z) \,[k_2\, b_y\, c_y\, b_z\, c_z + \\ \quad + k_3 (b\,c)\, c_y\, b_z (y\,z) + k_4 (b\,c)^2 (y\,z)^2] \end{array} \right\} = 0$$

en moeten de getallenfactoren l_1, l_2, k_2, k_3, k_4 nu nog bepalen. Uit den vorm

$$\begin{vmatrix} P_0 + Q_0\,(y\,z), & P_1 + Q_1\,(y\,z), & P_2 + Q_2\,(y\,z) \\ P_1 + Q_1\,(y\,z), & P_2 + Q_2\,(y\,z), & P_3 + Q_3\,(y\,z) \\ P_2 + Q_2\,(y\,z), & P_3 + Q_3\,(y\,z), & P_4 + Q_4\,(y\,z) \end{vmatrix} = 0\,,$$

dien de voorwaarde $j = 0$ hier aanneemt, berekent men deze getallenfactoren zonder veel moeite. Herleidt de determinant zich tot $A + B\,(y\,z) + C\,(y\,z)^2 + D\,(y\,z)^3$ als we ze uitwerken, dan vindt men achtereenvolgens voor den coëfficiënt *)

---

*) De volledige vergelijking is

$$\begin{vmatrix} a_y\,.\,4a_1^2 z_2 \quad + \mu\, a_1^4\;, & a_y\, a_1^2 (3a_2 z_2 - a_1 z_1) + \mu a_1^3 a_2\,, & 2a_y a_1 a_2 (a_2 z_2 - a_1 z_1) + \mu a_1^2 a_2^2 \\ b_y b_1^2 (3b_2 z_2 - b_1 z_1) + \mu b_1^3 b_2\,, & 2b_y b_1 b_2 (b_2 z_2 - b_1 z_1) + \mu b_1^2 b_2^2, & b_y\, b_2^2\, (b_2 z_2 - 3b_1 z_1) + \mu\, b_1\, b_2^3 \\ c_y c_1 c_2 (c_2 z_2 - c_1 z_1) + \mu c_1^2 c_2^2, & c_y\, c_2^2 (c_2 z_2 - 3c_1 z_1) + \mu c_1 c_2^3\,, & -\,4\, c_y c_2^3 z_1 + \mu\, c_2^4 \end{vmatrix} = 0,$$

als men $(n-3)\,(yz)$ kortheidshalve door μ aanduidt. Dus is de coëfficiënt van $y_1^3\, z_1^2\, z_2$ in den term met μ of $(n-3)(yz)$

$$\ldots{}^3\, b_1^2\, b_2\, c_1\, c_2^2 \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 2a_2 \\ b_1 & b_1 & 3b_2 \\ c_1 & 2c_1 & 4c_2 \end{vmatrix} + a_1^3\, a_2\, b_1^2\, c_1\, c_2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_2^2 \\ 2c_1^2 & c_2^2 & 2c_2^2 \end{vmatrix} + a_1^2 b_1 c_2 \begin{vmatrix} 0 & a_1^2 & a_2^2 \\ b_1^3 & 2b_1^2 b_2 & b_2^3 \\ 2c_1^3 & 3c_1^2\, c_2 & c_2^3 \end{vmatrix},$$

enz.

van $y_1^3 z_1^3$ in A ... $-4(bc)^2(ca)a_1^3 b_1^2 c_1$,

» $y_1^3 z_1^2 z_2$ » $B(yz)$ ... $-(n-3)\left\{\frac{3}{2}(bc)^2(ca)(ab)a_1^2 b_1 c_1 + \right.$

$\left. + (ab)^2(ac)^2 b_1^2 c_1^2\right\}$,

» $y_1^3 z_1 z_2^2$ » $C(yz)^2$... $-(n-3)^2(bc)(ab)^2(ac)^2 b_1 c_1$,

» $y_1^3 z_2^3$ » $D(yz)^3$... $\frac{1}{6}(n-3)^3$.

In verband met de aangenomen onderstelling volgt hieruit

$$l_1 = -4,\ l_2 = -\frac{3}{2}(n-3),\ k_2 = -(n-3),\ k_3 = -(n-3)^2$$

$$k_4 = \frac{1}{6}(n-3)^3.$$

We vinden dus ten slotte voor de tweede voorwaarde

$$a_y^{n-4} b_y^{n-4} c_y^{n-4} \left\{ \begin{array}{l} 3(bc)^2(ca)b_y c_y a_z^2[8a_y b_z + 3(ab)(yz)] \\ + (n-3)(ab)^2(ac)^2 y z [6 b_y c_y b_z c_z + \\ + 6(n-3)(bc)c_y b_z - (n-3)^2(bc)^2(yz)^2] \end{array} \right\} = 0.$$

Als z met y identisch is, worden deze beide uitkomsten achtereenvolgens

$$(ab)^2 a_y^{n-2} b_y^{n-2} = 0,\quad (bc)^2(ca)a_y^{n-1} b_y^{n-2} c_y^{n-3} = 0.$$

De eerste is de covariant van Hesse, $\varphi = (f, f)^2$, en de tweede is de vorm $t = (f, \varphi)^1 = \{f, (f, f)^2\}^1$. Hieruit volgt weer een eenvoudige meetkundige beteekenis van de vergelijkingen $\varphi = 0$ en $t = 0$. Zoo geeft de covariant van Hesse — en dit is, zoo we ons niet bedriegen, een nieuwe eigenschap — de punten aan, die equianharmonisch liggen met hun kubisch poolstelsel.

Natuurlijk kunnen de laatstvermelde uitkomsten ook rechtstreeks verkregen worden door het punt y te voegen bij het kubisch poolstelsel van y ten opzichte van f. De substitutie $p_x^4 = a_x^3 a_y^{n-3}(xy)$ geeft nl.

$$i = a_y^{n-3}\, b_y^{n-3}\, \overset{3}{\overline{(a, b}}\, ;\, \overset{2}{\overline{y\,)}} = 0,$$

$$j = a_y^{n-3}\, b_y^{n-3}\, c_y^{n-3}\, \overset{3}{\overline{(a, b, c}}\, ;\, \overset{3}{\overline{y)}} = 0.$$

Hieruit volgt onmiddelijk het vroeger gevondene; want voor

$$\overset{3}{\overline{(a, b}}\, ;\, \overset{2}{\overline{y)}} \quad \text{en} \quad \overset{3}{\overline{(a, b, c}}\, ;\, \overset{3}{\overline{y)}}$$

kan alleen $(a\, b)^2\, a_y\, b_y$ en $(b\, c)^2\, (c\, a)\, a_y^2\, b_y$ genomen worden.

Is nu in een plat vlak weer een kromme C^n en een punt P gegeven, dan kan men vragen naar de meetkundige plaats van het punt Q, waarvan het kubisch poolstelsel ten opzichte van de snijpunten der lijn $P\,Q$ met C^n equianharmonisch of harmonisch ligt met P. Men vindt dan, dat de eerste kromme viermaal door P gaat en van den $2(n-1)^{\text{sten}}$ graad is, terwijl de tweede kromme zesmaal door P gaat en van den $3(n-1)^{\text{sten}}$ graad is.

7. De verkregen uitkomsten, die op kromme lijnen betrekking hebben, laten zich gemakkelijk op oppervlakken en ten deele zelfs op complexen overdragen. Als voorbeeld dezer uitbreiding beschouwen we het geval van art. 3. We vinden dan onmiddellijk het volgende.

Zijn twee oppervlakken F^n en F^ν en een punt P gegeven, dan is de meetkundige plaats van het punt Q, dat met betrekking tot de snijpunten der lijn $P\,Q$ met beide oppervlakken twee poolparen bepaalt, die samen een equianharmonisch of harmonisch kwadrupel vormen, een oppervlak van den graad $2\,(n + \nu - 2)$ met een viervoudig punt in P, of de vereeniging van een oppervlak van den graad $n + \nu - 2$, dat in P een dubbelpunt heeft, met een oppervlak van den graad $2\,(n + \nu - 2)$, dat een viervoudig punt heeft in P; van de beide deelen der laatste meetkundige plaats heeft de eerste betrekking op punten Q met elkaar harmonisch scheidende poolparen, enz.

De meetkundige plaats der lijnen, die twee oppervlakken

F_1^2 en F_2^2 van den tweeden graad volgens een equiharmonisch of harmonisch kwadrupel snijden, is een complex van den vierden graad of de vereeniging van een complex van den tweeden graad met een complex van den vierden graad. Het bedoelde complex van den tweeden graad is reeds meermalen het onderwerp van wiskundige beschouwing geweest. En het onderzoek der beide complexen van den vierden graad ligt buiten het bestek van dit opstel.

VERGELIJKING,

BIJ

ZOMER- EN WINTERTEMPERATUUR, VAN TWEE GLAZEN EINDMETERS,

(BEHOORENDE RESPECTIEVELIJK AAN DE REGEERING VAN NED. OOST-INDIË EN AAN HET NATUURKUNDIG KABINET DER RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT,)

MET DEN PLATINA-IRIDIUM STREEPMETER N°. 27,

DOOR

J. A. C. OUDEMANS.



§ 1.

VROEGERE VERGELIJKING VAN DE GLAZEN METERS MET DEN OUDEN PLATINA STANDAARDMETER.

De in het opschrift dezer mededeeling bedoelde glazen meters zijn twee van de zeven, die door wijlen den Heer STAMKART en mij in September 1856 en Maart en April 1857 met den in 1838 uit Parijs door LIPKENS, UYLENBROEK en LOBATTO medegebrachten platina standaardmeter vergeleken zijn. De resultaten van die vergelijkingen zijn vermeld in de *Verslagen en Mededeelingen* dezer Afdeeling, 1e reeks, 7e deel (1858), blz. 33. Van de aldaar vermelde glazen meters is N°. 3 in 1857 door mij, in voldoening aan eene opdracht van den Minister van Koloniën, naar Batavia over-

gebracht; N°. 13 kwam aan het Natuurkundig Kabinet der Utrechtsche Hoogeschool.

De glazen meter N°. 3 heeft mij te Batavia gediend om er den normaalmeter mede te vergelijken, behoorende bij Repsold's basis-toestel, waarmede de drie *bases* op Java gemeten zijn; (zie mijn verslag: *Die Triangulation von Java, ausgeführt vom Personal des geographischen Dienstes in Niederländisch Ost-Indien*, Erste Abtheilung. Batavia, Staatsdruckerei, 1875; ook verkrijgbaar bij Martinus Nijhoff te 's Hage).

Toen het nu, ten behoeve der berekening van de triangulatie van Java, wenschelijk bleek, dien normaalmeter met den voor dat doel aangevraagden platina-iridium meter N°. 27 te vergelijken, en ik derhalve aan den Minister van Koloniën voorstelde, comparateur en normaalmeter naar Nederland te doen overzenden, voegde ik bij dit voorstel ook dat, om er den glazen meter N°. 3 bij te voegen, die dan tevens eene nieuwe vergelijking kon ondergaan, en dus daarna in Indië beter aan zijn doel, (standaard voor den ijk te zijn), zou kunnen beantwoorden.

Ter hierboven aangehaalde plaatse vindt men o. a. de volgende resultaten vermeld:

Stelt men de gemiddelde lengte der zeven glazen meters $= a$
de lengte van den platina standaardmeter . . . . $= A$

dan is gevonden door wijlen F. J. Stamkart:

September 1856, bij 15°,1 C . .:	N°. 3 $= a - 0^{\mu},35$,	m. fout	$\pm 0^{\mu},31$
	N°. 13 $= a + 1,02$,	〃	〃
Maart en April 1857, bij 7°,1 C . .:	N°. 3 $= a - 0,25$,	〃	$\pm 0^{\mu},38$
	N°. 13 $= a + 0,07$,	〃	〃

Het verschil tusschen de beide paren resultaten aan verschil aan uitzetting toeschrijvende, hebben wij voor 0°,0 C:

N°. 3 $= a - 0^{\mu},16$ midd. fout $\pm 0^{\mu},76$
N°. 13 $= a - 0,77$ » »

Verder vindt men t. a. p. de volgende resultaten vermeld van de vergelijkingen van al de zeven glazen meters met den platina meter:

	October 1856, bij 15°,6 C	m. f.	Februari 1857, bij 0°,0 C.	m.
OUDEMANS $a =$	$A - 10^{\mu},08$	$\pm\ 0^{\mu},42$	$A + 0^{\mu},34$	$\pm\ 0^{\mu},97$
STAMKART	$A - 11\ ,56$	$0\ ,36$	$A - 1\ ,35$	$\pm\ 0\ ,71$
Gemiddeld $a =$	$A - 10\ ,82$		$A - 0\ ,50$	

De gemiddelde uitzetting der glazen meters is dus:

$$\frac{10,32}{15,6} = 0^{\mu},6615$$

per graad Celsius *minder* dan die van den platina standaardmeter.

De uitzetting van dezen werd wel is waar door de commissie LIPKENS, UYLENBROEK, LOBATTO in 1838 te Parijs zelf bepaald op $9^{\mu},6$ per 1° C, (zie mijne mededeeling in de *Verslagen en Mededeelingen*, 3e reeks, Deel III, p. 225), maar dit getal verdient weinig vertrouwen, daar, zooals ik in genoemde mededeeling heb aangetoond, de vergelijking der meters door die commissie niet met de uiterste zorg verricht is.

Mijne bedoeling met deze uitspraak is niet, om de nagedachtenis dezer overigens als nauwgezette personen bekende commissieleden te benadeelen; de wegingen der standaardkilogrammen bewijst hunne zorgvuldigheid. Zij meenden zonder twijfel, dat de door hen bereikte nauwkeurigheid, (die men ongeveer daardoor kan aangeven, dat de nieuwe Nederlandsche standaard geverifieerd werd tot op een honderdste deel van een millimeter), voldoende was, en waren bovendien huiverig, hun verblijf te Parijs, dat reeds drie maanden geduurd had, nog langer te rekken.

Uit de genoemde bepaling zou volgen: gemiddelde uitzetting van den glazen meter $8^{\mu},94$ per 1° C, hetgeen zonder twijfel te groot is.

Nemen wij voor den platina meter denzelfden uitzettingscoëfficiënt als de heer BOSSCHA voor den *Mètre des Archives* heeft afgeleid, n.l, $8^{\mu},77$ per 1° C, *) dan zou die der

*) J. BOSSCHA, Relation des expériences qui ont servi à la construction de deux mètres étalons en platine iridié, comparés directement avec le mètre des Archives, 2e partie, (*Annales de l'Ecole de Delft*, Vol. II, 1e et 2e Livraison,) p. 67.

glazen meters = $8^{\mu},11$ zijn, hetgeen, zooals wij later zullen zien, zeer nabij het door mij verkregene resultaat komt.

---

§ 2.

VORM DER METERS.

1, De glazen meters, die wij G_3 en G_{13} zullen noemen, hebben den vorm van rechthoekige parallelapipeda, hoog 22, breed 12 mm. en zijn aan weerszijden conisch afgeslepen, zoodat figuur 1, zie de Plaat, de projectie en de opstand er van voorstelt.

De uiteinden zijn cirkelvormig, en hebben eene middellijn van 2 mm. Het eene uiteinde is vlak afgeslepen, zuiver rechthoekig op den as van den meter; het andere uiteinde is bol geslepen, met een kromtestraal van één meter, zoodat het een segment is van een bol, wiens middelpunt zich bevindt in het middelpunt van het andere uiteinde.

2. De platina-iridiummeter N^0. 27. Deze meter, een der beide door de Rijkscommissie STAMKART, BOSSCHA, OUDEMANS in October 1880 uit Parijs medegebrachte, heeft, zooals reeds meermalen is medegedeeld, (zie o. a. BOSSCHA, t. a. p., blz. 69) eene lengte van 102 centimeters, en, op voorstel van den heer TRESCA, eene doorsnede, zooals in figuur 6*a* zichtbaar is.

Het doel, met deze doorsnede beoogd, is om met dezelfde hoeveelheid metaal eene groote stevigheid te verkrijgen en tevens gelegenheid te hebben de twee eindstrepen te trekken op eene vlakte, (de bovenvlakte van het in de figuur zichtbare middenbalkje), waarin de neutrale vezel, *le fibre neutre*, van den meter gelegen was.

De eindstrepen zijn op spiegelend gepolijste plekjes, op één centimeter van elk uiteinde, aangebracht, elke eindstreep aan weêrszijden vergezeld door eene andere op een afstand van iets meer dan 20 mikrons. Men ziet er dus door eene sterke loep of een mikroskoop drie strepen, waarvan de middelste de eindstreep is.

Elk dezer meters wordt alleen gebruikt, liggende op twee rollen *b*, die op een afstand van 55 centimeters van elkander in de zijwanden eener ijzeren lade *c* waren aangebracht. In het midden dezer lade bevond zich eene klem, die aan den meter kon bevestigd worden, en waaraan eene inrichting was om dezen eene kleine longitudinale beweging mede te deelen; deze inrichting is echter bij onze vergelijkingen niet gebruikt geworden, en zullen wij dus met stilzwijgen voorbijgaan.

---

§ 3.

WIJZE, WAAROP DE VERGELIJKINGEN PLAATS HADDEN.

De vergelijkingen werden verricht door middel van denzelfden spiegelcomparateur, die in 1856 en 57 op het Trippenhuis gediend had. Het beginsel, waarop zijn gebruik in het algemeen berust, is door STAMKART beschreven in den *Algemeenen Konst- en Letterbode* van 1839, N°. 36, en de toepassing op het vergelijken van streepmaten met eindmaten in het *Tijdschrift voor de Wis- en Natuurkundige Wetenschappen*, uitgegeven door de Eerste Klasse van het Koninklijk Nederlandsch Instituut, Deel IV, blz. 27.

Van Amsterdam, waar hij op de bovenverdieping van het Trippenhuis bewaard werd, werd hij naar Utrecht overgebracht, en, zie figuur 4, in den »Zuidertoren" der Sterrewacht opgesteld.

Daar voor het oprichten van geïsoleerde pilaren het wegbreken van den vloer in den genoemden toren noodzakelijk zou zijn, verkoos ik liever den comparateur op twee horizontale balkjes te leggen, die door middel van een stevig samenstel van latten aan de balken der zoldering bevestigd waren.

In het kort komt de inrichting en het gebruik van den comparateur op het volgende neder: zie figuur 2, 3 en 4.

AB, figuur 2, is een volkomen horizontale balk, *C* eene fijne horizontale schroef, die op eene hoogte van enkele

centimeters boven den balk door eene moer loopt, die aan den balk bevestigd is. *D*, figuur 2, 3 en 7, is eene volkomen vertikale vlakte, (een stukje spiegelglas,) die zuiver loodrecht op de lengte-as van den balk gesteld kan worden. Zij dient tot steunpunt van een der twee stiftjes, die achter een hangend spiegeltje *E* zijn aangebracht. *F*, figuur 4, is een kijker, waarmede op zekeren afstand, in dat spiegeltje de schaal *G* afgelezen wordt.

Bij die aflezingen waren de meters beurtelings geplaatst als in figuur 2 en 3. In figuur 2 ligt N⁰. 27 »achter," steunende tegen de schroef *C*, waarvan de moer op de hiervoor noodige hoogte gebracht moet worden. Tegen N⁰. 27 aan leunt, met het bolle uiteinde, de glazen meter G_3, die dus nu »voor" is. Tegen het andere, dus het vlakke einde van G_3, rust het tweede stiftje van het hangende spiegeltje.

In figuur 3 ligt N⁰. 27 vóór, en is zijne vroegere plaats ingenomen door eene houten met metalen schenen voorziene lat van nagenoeg één meter lengte. De glazen meter is nu weggenomen.

Boven het midden van den balk is zeer stevig bevestigd een vertikaal geplaatst mikroskoop, zie figuur 5, in welks buis, ter plaatse van het brandpunt van het positief oculair, zich een diafragma met twee evenwijdige spinragdraden bevindt.

Bij de eerste ligging, (figuur 2), wordt door draaien aan de schroef *C*, de streep *b* tusschen de draden van dit mikroskoop gebracht; onmiddellijk daarop wordt, door een helper, in den kijker *F* de schaal *G* afgelezen.

Daarna wordt het hangend spiegeltje weggenomen, de glazen meter G_3 zijdelings verwijderd, en de platina-iridium meter N⁰. 27 naar voren gebracht, zoodat men de in figuur 3 aangeduide ligging verkrijgt. Zooals gezegd is, wordt tusschen de schroef *C* en N⁰. 27 nu eene lat *H* ingebracht van ongeveer één meter lengte; die, welke ik gebruikte, rustte op rollen. Het hangende spiegeltje wordt nu weer op zijne vorige plaats gebracht, met het eene stiftje leunende tegen het vertikale spiegeltje *D*, met het andere tegen het einde van den streepmeter N⁰. 27.

Beide meters worden steeds door middel van gewichten, waarvan de koorden over katrollen loopen, met eene standvastige kracht tegen hunne steunpunten aangedrukt. Het eene koordje is aan de lade van N°. 27 bevestigd, en behoeft gedurende eene reeks metingen niet losgemaakt te worden. Het andere koordje wordt met een haakje aan een knopje bevestigd, dat op zijde van eene klem zit, die op den glazen meter geschroefd wordt.

Bij die tweede ligging wordt door draaien aan schroef *C* de streep *a* onder het mikroskoop en tusschen de draden gebracht.

Bij de waarnemingen van 1856 en 57 was aan de schroef *C* een molentje aangebracht; de waarnemer moest nu, terwijl hij door het mikroskoop keek, door met een stok aan te brengen tikken, de wieken van dit molentje vooruit of achteruit draaien. Deze methode kwam mij te grof en te lastig voor. Ten einde, staande voor het mikroskoop, het omdraaien van schroef *C* met de noodige langzaamheid te kunnen bewerkstelligen, heb ik den heer Olland verzocht in plaats van het molentje aan schroef *C* een rad aan te brengen, waarin een rondsel grijpt, dat door middel eener stang, waarvan het andere eind door den waarnemer in de hand gehouden wordt, omgedraaid kan worden.

Zoodra de streep *a* juist tusschen afleesdraden in het mikroskoop is, wordt de schaal afgelezen.

De glazen eindmeter G_3 is nu blijkbaar vervangen door den afstand der eindstrepen op N°. 27. Het verschil in de beide aflezingen, tot mikrons herleid, is dus ook het verschil der beide meters.

De streepmeter moet dus in de richting van de lengte van den balk verplaatst worden, de eindmeter in eene richting loodrecht daarop; hiernaar zijn de richels ingericht, waarop de wielen rollen, die de meters medevoeren.

De streepmeter, hier N°. 27, rust met zijne lade op de vlakke bovenzijden van twee horizontale assen, die aan hare einden van losse wielen voorzien zijn, loopende op ijzeren

richels, aan weerszijden van den balk. Een en ander is in figuur 5 in doorsnede zichtbaar.

De eindmeter, hier G_3, rust op een paar rollen, die aan een wagen bevestigd zijn, die insgelijks langs ijzeren richels, *zijdelings* weggerold kan worden. Vóór dat wegrollen moet het koordje, waaraan het gewichtje hangt, waarvan zoo even sprake was, losgemaakt worden.

Eene volledige meting bestond nu uit het volgende schema :

Ingesteld onder het mikroskoop streep	Welke meter vóór
a	N⁰. 27,
b	G_3,
a	N⁰. 27,
b	G_3,
a	N⁰. 27.

Elke instelling geschiedde tweemaal achter elkander; en elke keer werd de schaal tweemaal afgelezen. Daardoor was het mogelijk de middelbare fout af te leiden, zoowel van de aflezing der schaal, als van de instelling der strepen onder het mikroskoop.

Tevens werd, zoodra de meters verlegd waren, de thermometer op den meter, die vóór lag, afgelezen, evenals een andere, die in het vertrek boven den comparateur hing; evenzoo werd, bij elke aflezing der schaal, de tijd aangeteekend. Kwam er geene stoornis, dan liep zulk eene reeks metingen in achttien minuten af.

---

§ 4.

NADERE BESCHRIJVING VAN ENKELE BIJZONDERHEDEN VAN DEN COMPARATEUR.

1. *De platina-iridium meter N⁰.* 27. De voorkant van N⁰. 27 bij streep *b*, is op mijn verzoek door den heer

Olland met veel nauwkeurigheid loodrecht afgeslepen. De loodrechtheid heb ik door terugkaatsing van het licht eener kaarsvlam onderzocht. Alleen de randen schijnen een weinig rond af te loopen, maar volgens den heer Olland is dit aan het polijsten toe te schrijven, dat ik noodzakelijk geacht had, om dat onderzoek te kunnen doen. Overigens scheen mij de eindvlakte voldoende loodrecht op de as te zijn.

2. *Het mikroskoop*, dat nog van 1856 dagteekende, had eene negatieve oogbuis, die door middel van eene stift en eene spleet, eene speling in hare hoogte had van 10 millimeters; met deze oogbuis had het eene vergrooting van 13,6 tot 15,2 maal. In 1856 en 57 was in het brandpunt van het ooglas slechts één draad van gekleurde zijde gespannen, die op de strepen gebracht moest worden.

De hier opgenoemde vergrooting kwam mij te gering voor. Door de buis van het mikroskoop, die slechts 17 centimeters lang was, met 12 cm. te verlengen, en de oogbuis te vervangen door de beide oculairen van een prismacirkel van Wegener, behoorende aan de sterrewacht, verkreeg ik vergrootingen van 63,75 en 127,5 maal. Eerstgenoemde gaf nog heldere beelden, doch gemakshalve gebruikte ik liever het sterkste oculair, dat, hoewel het de strepen wat dof vertoonde, nog voldoende licht gaf. Het diafragma kwam nu buiten het oculair.

3. De verlichting. Met de verlichting heb ik veel moeite gehad; de comparateur stond, zie figuur 4, in den zuidertoren der sterrewacht, de kijker in de meridiaanzaal, nabij den muur van den noordertoren; door die schikking alleen kon ik althans over een afstand van 8½ meter tusschen kijker en spiegeltje beschikken. Die groote afstand werd door Stamkart voor het gebruik van zijn comparateur noodig geacht; doch het zal later blijken dat hij veel minder bedragen kan.

Na verschillende proeven, ook met gloeilampjes, die alle mislukten, doordien deze te spoedig hare lichtkracht verloren, kreeg ik eindelijk door drievoudige spiegeling van uit het venster licht, dat niets te wenschen overliet.

Het mikroskoop *a*, zie figuur 5, was vastgeschroefd op eene koperen plaat *b*, en deze weer op twee vertikale plankjes *c*, die, door tusschenkomst van eene ijzeren plaat *d* stevig aan den balk *e* bevestigd waren. *f* is een hol spiegeltje, dat de heer Olland op mijn verlangen zoo ingericht heeft, dat men het met gemak alle bewegingen geven kan. Bij de waarnemingen bevindt het zich onder de helft van het objectief, aan de zijde van den waarnemer; het kaatst het licht terug naar de bovenvlakte van N^0. 27, die onder het mikroskoop ligt. Dat spiegeltje *f* ontvangt het licht, door het gat *g*, van een grooteren spiegel *h*, die om twee loodrecht op elkander staande assen kunnende draaien, alle mogelijke standen kan aannemen. Op den vloer van het vertrek is in *i* een heliostaat gezet, die het licht van het venster terugwerpt naar *h*; van daar gaat het naar *f*, en daar de richting der eindstreep parallel aan de lijn *f h* is, is de verlichting symmetriek met betrekking tot die eindstreep. Op deze wijze kon de verlichting, die donkere strepen op een licht veld geeft, altijd met het meeste gemak zoo gunstig mogelijk gemaakt worden.

4. *De thermometers.* Bij de zomerwaarnemingen, in Augustus 1889 zijn de beide thermometers Baudin, N^0. 4899 en 4896 gebruikt, die te Parijs bij den platina-iridium meter N^0. 27 waren ontvangen. Deze thermometers waren in tiende graden verdeeld, en honderdsten werden dus geschat. Acht vergelijkingen werden verricht met N^0. 4896 op N^0. 27 en N^0. 4899 op G_3, en acht vergelijkingen met N^0. 4889 op N^0. 27 en N^0. 4896 op G_3. Daardoor wordt het verschil in aanwijzing van deze thermometers geëlimineerd, en komt nog alleen de gemiddelde correctie der beide thermometers in aanmerking.

Bij het leggen der meters voor het doen dezer winterwaarnemingen, den 8sten Januari 1889, brak N^0. 4896, en werd vervangen door Baudin N^0. 7483, van de sterrewacht, die in vijfde graden verdeeld is, en waarop dus zeer gemakkelijk de vijftigste graden geschat kunnen worden.

Den 31sten Juli, dus vóór het begin der vergelijkingen, werd gemerkt dat in N^0. 4899 de kwikkolom niet geheel

doorliep; met de loep kon men eene kleine tusschenruimte ontdekken. Daar zij bij verwarming opschoof, bleek zij lucht te bevatten. Door verwarming van den thermometer werd deze luchtbel tot in de bovenste verzamelholte gebracht, en aldus verwijderd. Het nulpunt van den thermometer kon door die bewerking veranderd zijn, en het kon verwacht worden dat het slechts langzaam tot zijne vorige ligging zou terugkeeren.

Hoewel BAUDIN N⁰. 4896 en 4899 doorgaan voor standaardthermometers van de 1ste klasse, heb ik toch gemeend meer vertrouwen te moeten stellen op de beide standaardthermometers van de Sterrewacht, BAUDIN 7483 en 9797, die wel is waar slechts in vijfde graden verdeeld zijn, maar waarvan de schaal tot boven het kookpunt reikt, zoodat dit met den daarvoor dienenden toestel van REGNAULT, is knnnen geverifieerd worden.

Van de gebruikte thermometers nu is het nulpunt herhaaldelijk bepaald, wij zullen dit met een veranderd teeken, dus de correctie opgeven. Met de meeste zorgvuldigheid werd bevonden:

Correctie bij 0°.

		2 Aug.	31 Aug.	9 Sept.	
BAUDIN	7483	— 0°,10	0°,00	— 0°,04	vertikaal
„	4899	— 0 ,11	— 0 ,14	— 0 ,15	»
»	»	— 0 ,15	— 0 ,16	(— 0 ,17)	horizontaal
»	4896	— 0 ,30	— 0 ,29	— 0 ,29	vertikaal
»	»	— 0 ,40	— 0 ,35	(— 0 ,35)	horizontaal
GEISSLER	N⁰. 2	+ 0 ,01	+ 0 ,01	0 ,00	

De getallen tusschen ( ) zijn uit de andere afgeleid.

Verder gaven den 5den September, opzettelijk gedurende een ganschen morgen voortgezette proeven met behulp van een waterbak, door vergelijking met BAUDIN 7483 en 9797:

BAUDIN 4896	Correctie	van	15 tot 25°	— 0°,205
BAUDIN 4899	»	bij	16°,72	— 0°,14
	»	»	19 ,71	— 0 ,15
	»	»	22 ,23	— 0 ,14
	»	»	24 ,58	— 0 ,124
GEISSLER N⁰. 2	»	»	15—25°	+ 0 ,07

Terwijl de vroeger genomene bepalingen van kook- en vriespunt gegeven hebben:

Baudin 7483 1° = 1°,0035 *C*
Baudin 9797 1° = 1 ,0034 *C*

welke verhoudingen bij de herleiding der genoemde vergelijkingen der thermometers in den waterbak gebruikt zijn.

5. *Het hangende spiegeltje.* Dit spiegeltje zie fig. 7, was van Stamkart herkomstig. Het is in eene stevige eikenhouten lijst gevat, en van achteren zijn hierin de twee naalden bevestigd, die als steunpunten bij de vergelijkingen dienden. De nog van Stamkart's tijd afkomstige stiftjes waren van geelkoper en hadden afgeronde punten, zoodat het moeielijk was den afstand der rustpunten nauwkeurig aan te geven. Ik heb daarom den Heer Olland verzocht ze door stalen naalden te vervangen, van welker spitsen ik den afstand, die ook nog iets kleiner kon aangenomen worden dan vroeger, met alle nauwkeurigheid kon meten.

Het spiegeltje hangt aan drie draden, waarvan twee aan de achterzijde bevestigd zijn, en de derde aan de voorzijde. Deze derde is om eene schroef gewikkeld, waardoor het mogelijk is, door aan deze te draaien, aan de spiegelvlakte die helling ten opzichte der loodlijn te geven, die voor eene geschikte aflezing door den kijker noodig is.

Deze drie draden vereenigen zich boven het spiegelte tot één draad, die boven aan eene galg opgehangen is, zoodanig dat het ophangpunt in de richting loodrecht op de lengterichting van den balk verplaatst kan worden. Tevens is daar de draad om eene schroef heen gewikkeld, zoodat door hieraan te draaien, het spiegeltje rijzen en dalen kan. Eindelijk is het vertikale balkje van den galg van onderen met een drukschroef aan den balk bevestigd, en daardoor kan de geheele galg voor- en achterover gedraaid worden, waarvan eene verschuiving van het ophangpunt, in de richting der lengte-as van den balk het gevolg is.

Een gebrek van deze inrichting was alleen dit, dat het de vraag is of het spiegeltje wel onwrikbaar in zijne lijst

zit. Wegens de mogelijkheid, dat nog eenige bewegelijkheid van het spiegeltje was overgebleven, werd het, bij de vergelijkingen, altijd met de meeste voorzichtigheid afgelicht, over den vasten spiegel geheven en weêr op zijne plaats gehangen.

De afleeskijker en schaal. Door Stamkart en mij was in 1856 en 57 voor afleeskijker gebruikt een kleine handkijker van Molteni, met eene opening van 27 mm. en aardsche oogbuis, waarvan de vergrooting 12,5 maal bedraagt. Deze vergrooting kwam mij te zwak voor.

Een dergelijke handkijker van denzelfden maker, met 38 mm. opening, behoorende tot den inventaris der sterrewacht, vergroot 25 maal; deze was wel geschikt, maar voor de beschikbare ruimte te lang. Nog andere waarlooze kijkers beproefd hebbende, viel mijne keuze op den kijker van een oud altazimuth van Dollond, met eene vergrooting van 17,7 maal.

Hij werd in eene houten goot gelegd, en daarna goed vastgebonden; die goot werd met schroeven stevig bevestigd aan eene horizontale lat boven die, welke voor schaal dienen moest. De as der kijkers was, zie figuur 4, evenwijdig aan, doch iets hooger dan de as van den platina-iridium meter, als deze op den comparateur op zijne rollen lag.

Het objectief bevond zich van het hangende spiegeltje op een afstand van 8,579 meter.

De aflezing geschiedde aldus. Onder den kijker was aan de bovenste lat een zwart koord bevestigd, waaraan een gewicht hing. Op den comparateur bevond zich nog vóór het losse, hangende spiegeltje, een vaste vertikale spiegel K, (figuur 2 en 3) waarin die zwarte draad door den kijker gezien werd. Dit spiegelbeeld diende als wijzer.

Op de bovenzijde van de onderste lat was een papieren strook geplakt, met dwarsstrepen, 108,4 mm. van elkander. Deze waren van rechts naar links genommerd 1, 2, 3 . . . 10. Een houten driehoekig prisma van 2 dm. lengte, was tusschen een raam gevat, dat over die lat heen schoof en op een van de hellende vlakken van dat prisma was eene papieren strook van 108,4 mm. lengte geplakt, die in 100 gelijke deelen verdeeld was; elk deeltje bedroeg dus 1,084

mm.; deze verdeeling was genummerd van links naar rechts, en liep dus tegen de vorige in. Het nulpunt dezer verdeeling als wijzer aanziende, leest men dus onmiddelijk de honderdtallen, eenheden, en tiende deelen van eenheden af. Van het genoemde raam hing aan de voorzijde van de lat een tweede zwarte draad af, waaraan insgelijks een gewichtje hing, en wel, om de slingeringen spoedig tot stilstand te brengen, in een glas water. De afstand van die vóórzijde der lat, dus van dezen zwarten draad, tot het hangende spiegeltje was = 8,768 meters, makende met de zooeven genoemde 8,579 meters: 17,347 meters. De afstand der beide naalden achter het hangende spiegeltje is = 16,0 mm.

Nu is:

$$16 : 0{,}001 = 17347 : 1{,}084,$$

zoodat elk deeltje van onze verdeeling overeenkomt met een lengteverschil der meters van één mikron.

Het hangende spiegeltje is voor den waarnemer, die aan den kijker zit, zichtbaar *boven* den vasten spiegel. Maar daar de kijker omkeert, ziet men het in den kijker er onder. De waarnemer breugt nu, door het raam met de verdeeling over de lat te verschuiven, den bewegelijken draad in het verlengde van den vasten draad, en leest de schaal af, nl. de honderdtallen van deeltjes op de lat, de enkele deeltjes en de tiende deelen op het driehoekig prisma.

---

§ 5.

VOORZORGEN, GENOMEN OM ZOOVEEL MOGELIJK JUISTE RESULTATEN TE VERKRIJGEN.

Verschillende voorzorgen moesten genomen worden om zooveel mogelijk juiste resultaten te verkrijgen. Ten eerste moest gezorgd worden dat de afgelezene temperatuur waarschijnlijk zoo na mogelijk met die der meters overeenkwam. De sterrewacht bezit wel dubbele muren, maar de temperatuur is er toch dag en nacht niet gelijk, hoewel het ver-

schil veel geringer is dan in de opene lucht. Des zomers, bij helder weder, was de temperatuur het gelijkvormigst tijdens en onmiddelijk na het maximum, d. i. omtrent 4 uur des namiddags en onmiddelijk na het minimum, een paar uur na zons opkomst. Des winters, en des zomers bij geheel betrokkene lucht was de temperatuur over het algemeen veel gelijkmatiger. Ik nam dus des zomers, bij helder weder, op de aangegeven tijden de vergelijkingen, terwijl ik des zomers bij betrokkene lucht en voorts bij de wintervergelijkingen niet op den tijd van den dag behoefde te letten.

In de tweede plaats moesten zooveel mogelijk voorzorgen genomen worden, dat de lichaamswarmte van den waarnemer geen invloed op dien der meters kon hebben. Hiertoe waren zij beiden met karton bedekt, dat met tinfoelie beplakt was. Dit toch is door de proeven, onlangs door H. C. Vogel en Wilsing te Potsdam genomen, (*Astron. Nachrichten*, N^0. 2815, October 1887) gebleken eene zeer doelmatige manier te zijn, de stralende warmte tegen te houden. Bovendien werd telkens, zoodra de meters gesteld waren, en ik dus, kijkende door het mikroskoop, de instelling beginnen zou, een met tinfoelie beplakt bordpapieren scherm vóór den voorsten meter neergelaten. Daar overigens de vergelijkingen zeer snel in zijn werk gingen, heb ik de volle overtuiging, dat de lichaamswarmte van den waarnemer geen, althans slechts een zeer geringen nadeeligen invloed op het resultaat heeft kunnen hebben.

In de derde plaats moest gezorgd worden, dat het steunpunt van de eene stift van het losse spiegelte steeds hetzelfde was, en dat de andere stift, op de voorvlakte van N^0. 27 rustende, dezelfde plaats aanraakte, waartegen, als N^0. 27 de achterste was, (1ste stand, figuur 2,) de glazen meter met zijn bol uiteinde rustte. Voor het eerste werd gezorgd, doordien het losse spiegeltje zijdelings, aan den kant van den waarnemer, tegen een vast steunpunt rustte; (hiervoor moet dus de draad, waaraan het spiegeltje hangt, niet volkomen vertikaal hangen, maar eenigszins naar de zijde des waarnemers overhellen;) voor het tweede door de meters zeer nauwkeurig te stellen, en telkens door eene

loep goed toe te zien, waar de tweede stift van het losse spiegeltje tegen rustte. Dit was namelijk daarom raadzaam, omdat de wielen, waarop de beide meters rustten, wel eene geringe zijdelingsche verplaatsing der meters gedoogden. Het punt, waarin ik de aanraking tegen de voorvlakte van N⁰. 27 liet plaats hebben, was het middelpunt van het dwarsbalkje. Mocht er nog een klein verschil in dit aanrakingspunt zijn, dan wordt het zooveel mogelijk onschadelijk gemaakt, doordien de platinameter van voren een vlakte had, die zoo nauwkeurig doenlijk loodrecht op zijne lengteas geslepen was, bovendien was de stand van het spiegelte *D*, nl. loodrecht op de assen der meters, gerectificeerd, door te zorgen, dat de aflezing van de schaal hetzelfde bleef, als het hangende spiegeltje, hetzij zijdelings, hetzij naar de hoogte of laagte een weinig bewogen werd.

---

§ 6.

VOORBEELD VAN EENE REEKS VERGELIJKINGEN.

Als voorbeeld van eene reeks vergelijkingen zullen wij die van den 22sten Augustus 1888, des morgens, mededeelen.

idd. ijd.	Baudin N°. 4899 op N°. 27.		Baudin N°. 4896 op G_3.		Geissler N°. 2 in het vertrek.		Meter.	Afle-zing.		Afleiding van G_3—N°. 27.
44m	16°,36	16°,36			16°,32	16°,315	N°. 27	461,5	461,25	461,325
								461,0		
								461,5	461,4	
46	16 ,36				16°,31			461,3		
47			16°,50	16°,51	16°,31	16°,295	G_3	434,5	434,6	434,35
								434,7		461,30
								434,0	434,1	— 26,95
50			16°,52		16°,28			434,2		
52	16°,37	16°,385			16°,31	16°,305	N°. 27	461,0	461,0	461,275
								461,0		
								461,5	461,55	
54	16°,40				16°,30			461,6		
55			16°,55	16°,56	16°,32	16°,31	G_3	434,2	434,25	434,2
								434,3		461,54
								434,1	434,15	— 27,34
57			16°,57		16°,30			434,2		
9	16°,40	16°,42			16°,33	16°,305	N°. 27	461,8	461,85	461,8
								461,9		
								461,7	461,75	
12	16°,44				16°,28			461,8		

Gemiddeld:	Baudin 4899 op N°. 27	Baudin 4896 op G_3	Geissler N°. 2 in het vertrek	G_3 —N°. 27
	16°,373	16°,51	16°,30	— 26$^{\mu}$,95
	,403	,56	,31	— 27 ,34
	16 ,388	16 ,535	16 ,30	— 27$^{\mu}$,15

De thermometer Geissler N°. 2, (verdeeld in tiende graden,) hing boven den comparateur, links van den waarnemer, en

werd telkens mede afgelezen om de standvastigheid der temperatuur in het vertrek te kunnen beoordeelen.

---

§ 7.

LENGTE VAN DEN PLATINA-IRIDIUM METER N⁰. 27 BIJ VERSCHILLENDE TEMPERATUREN.

De vergelijkingen, in 1879 en 1880 te Parijs door de Rijks-Commissie STAMKART, BOSSCHA, OUDEMANS, bijgestaan door den heer G. TRESCA, met den Mètre des Archives verricht, hebben, in verband met de bepaling van den uitzettings-coëfficiënt, door den heer FIZEAU, (zie J. BOSSCHA »Relation des expériences, qui ont servi à la construction de deux mètres étalons en platine iridié, comparés directement avec le Mètre des Archives,'' 2de Partie, p. 67, geplaatst in het *Journal de l'Ecole Polytechnique de Delft*,) voor de lengte van den platina-iridium meter N⁰. 27 gevonden, tot de volgende formule geleid, waarin M de lengte van den Mètre des Archives bij 0° C en t de temperatuur in graden Celsius beteekent; en de eenheid de mikron of duizendste mm. is.

$$N^0.\ 27 = M + 6\mu{,}11 + 0{,}4327\,t + 0{,}0401\,t.$$

Hiermede vindt men het volgende tafeltje:

T. Celsius.		N⁰. 27 — *M*.	
0°	+	6μ,110	
			8μ,437
1		14 ,547	
			8 ,444
2		22 ,991	
			8 ,453
3		31 ,444	
			8 ,461
4	+	39 ,905	
:			
16	+	142 ,060	
			8 ,565
17		150 ,625	
			8 ,573
18	+	159 ,198	

---

§ 8.

SAMENVOEGING DER RESULTATEN BETREFFENDE DEN GLAZEN METER G_3, VAN DE NED. O. I. REGEERING.

Wij zullen nu de resultaten der afzonderlijke vergelijkingen mededeelen. Meestal bestaat elke vergelijking uit een gelijk aantal instellingen, en aflezingen, als die van 22 Augustus, die in de § 6 is uitgewerkt, nl. 2 aflezingen op den eenen en 3 op den anderen meter, gevende 2 uitkomsten, waaruit het arithmetisch midden genomen werd. Dit aantal uitkomsten is in de 6[de] kolom door den letter n aangeduid.

ZOMERVERGELIJKINGEN.

EERSTE REEKS. BAUDIN 4896 op N°. 27.

Datum.	BAUDIN 4896 op N°. 27.	BAUDIN 4899 op G_3.	(GEISSLER N°. 2 in het vertrek).	G_3—N°. 27.	n	Verschil tusschen de eerste en de laatste temperatuur-aflezing.	Welke meter het eerst en laatst vóórlag.
2 Augustus 1888	16°,62	16°,67	(16°,43)	— 24μ,5	3	— 0°,26	G_3
3 〃 〃	17 ,19	16 ,88	(17 ,05)	— 26 ,4	3	+ 0 ,30	N°. 27
4 〃 〃	16 ,42	16 ,16	(16 ,40)	— 25 ,6	2	+ 0 ,20	{G_3 N°.27
20 〃 〃	16 ,14	15 ,97	(15 ,98)	— 25 ,8	2	+ 0 ,15	N°. 27
24 〃 〃	18 ,96	18 ,85	(19 ,04)	— 25 ,65	2	+ 0 ,12	N°. 27
25 〃 〃	18 ,67	18 ,52	(18 ,40)	— 26 ,3	3	+ 0 ,11	N°. 27
30 〃 〃	16 ,54	16 ,41	(16 ,33)	— 27 ,7	2	+ 0 ,06	N°. 27
31 〃 〃	15 ,51	15 ,36	(15 ,31)	— 24 ,5	2	+ 0 ,14	N°. 27
Som. .	136 ,05	134 ,82	(134 ,94)	— 206 ,45			
8				8			
	17°,006	16°,85	(16°,87)				
Correctie. .	— 0 ,205	— 0 ,14	(+0 ,07)				
Verbeterd. .	16°,80	16°,71	(16°,94)	— 25 81,			

Tweede reeks. Baudin 4896 op G_3.

Datum.	Baudin 4899 op N°. 27.	Baudin 4896 op G_3.	(Geissler N°. 2 in het vertrek).	G_3—N°. 27.	n.	Verschil tusschen de eerste en de laatste temperatuur-aflezing.	Welke meter het eers en laats vóórlag.
22 Augustus 1888	16°,39	16°,53	(16°,30)	— 27μ,15	2	+ 0°,06	N°.2
23 〃 〃	17 ,40	17 ,50	(17 ,36)	— 23 ,2	2	+ 0 ,09	N°.2
27 〃 〃	19 ,00	19 ,10	(18 ,91)	— 25 ,9	2	+ 0 ,01	G_3
28 〃 〃	17 ,60	17 ,84	(17 ,53)	— 23 ,5	2	+ 0 ,09	N°.2
28 〃 〃	18 ,20	18 ,29	(18 ,15)	— 25 ,2	3	+ 0 ,17	N°.2
29 〃 〃	16 ,99	17 ,11	(16 ,93)	— 28 ,1	2	+ 0 ,085	N°.2
29 〃 〃	17 ,61	17 ,73	(17 ,68)	— 26 ,9	2	+ 0 ,095	N°.2
29 〃 〃	17 ,90	17 ,97	(17 ,83)	— 27 ,9	2	+ 0 ,115	N°.2
	141 ,14	142 ,09	(140 ,72)	— 207 ,75			
8				8			
	17 ,642	17 ,761	(17 ,59)				
Correctie. .	— 0 ,143	— 0 ,205	(+0 ,07)				
Verbeterd. .	17 ,50	17 ,56	(17°,66)	— 25 ,97			

Gemiddeld uit beide reeksen.

			G_3—N°. 27.	
	17°,15	17°,135	— 25μ,895	
N°. 27 is bij 17°,15		= M	+ 151 ,91	
Dus is G_3 bij 17°,135		= M	+ 126μ,015	m. f. ± 0μ,35

Wintervergelijkingen.

Eerste reeks. Baudin 4899 op N°. 27.

Datum.	Baudin 4899 op N°. 27.	Baudin 7483 op G_3.	(Geissler N°. 2 in het vertrek).	G_3—N . 27.	n.	Verschil tusschen de eerste en de laatste temperatuur-aflezing.	Welke meter het eers en laats vóórlag
8 Januari 1889	1°,52	1°,40	(1°,22)	— 18μ,5	2	+ 0°,265	N°. 2
8 Januari 1889	1 ,615	1 ,51	(1 ,56)	— 18 ,05	2	+ 0 ,265	N°.2
9 Januari 1889	1 ,32	1 ,32	(1 ,15)	— 18 ,0	2	+ 0 ,265	N°.2
9 Januari 1889	1 ,505	1 ,52	(1 ,41)	— 18 ,8	2	+ 0 ,33	N°.2
	5 ,96	5 ,75	(5 ,34)	— 73 ,3			
4				4			
	1°,49	1 ,44	(1 ,34)				
Correctie. .	— 0 ,17	— 0 ,04	(0 ,00)				
	1°,32	1°,40	(1°,34)	— 18 ,33			

Tweede reeks. Baudin 4899 op G_3.

Datum.	Baudin 7483 op N°. 27.	Baudin 4899 op G_3.	(Geissler N°. 2 in het vertrek).	G_3—N . 27.	n.	Verschil tusschen de eerste en de laatste temperatuur-aflezing.	Welke meter het eerst en laatst vóórlag.
0 Januari 1889	2°,625	2°,905	(2°,715)	— 20μ,3	2	+ 0°,15	N°. 27
1 Januari 1889	2 ,90	3 ,15	(2 ,99)	— 19 ,7	2	+ 0 ,145 + 0 ,125	G_3 N°. 27
1 Januari 1889	2 ,96	3 ,225	(3 ,03)	— 20 ,9	2	+ 0 ,42	G_2
2 Januari 1889	1 ,66	2 ,07	(1 ,80)	— 19 ,6	2	+ 0 ,345	G_3
	10 ,145	11 ,35	(10 ,535)	— 80 ,5			
4	2 ,54	2 ,84	(2 ,645)				
	— 0 ,05	—0 ,17	(+0 ,01)				
	2°,49	2°,67	(2 ,65)	— 20 ,13			

Gemiddeld uit beide reeksen.

		G_3— N°. 27.	
1°,905	2°,035	— 19μ.23	
N°. 27 is bij 1°,905 =		M + 22 ,19	m. fout.
Dus is G_3 bij 2°,035 =		M + 2μ,96	± 0μ,16

§ 9.

AFLEIDING VAN HET EINDRESULTAAT EN VERGELIJKING MET DE IN 1856, 57 GEVONDENE EN TOT NOG TOE AANGENOMENE WAARDE.

Wij hebben gevonden voor de lengte van G_3

bij 17°,135	M + 126μ,015
bij 2 ,035	M + 2 ,96
Uitzetting voor 15 ,10	123 ,055
of per 1° C	8 ,149
Derhalve in 2°,035	16 ,58
en lengte van G_3 bij 0° :	M — 13μ,62

De vergelijkingen bij 0° hadden in 1856, 57 gegeven, zie § 1 :

$$\begin{aligned} G_3 &= a - 0^{\mu},30 \\ a &= A - 0\ ,50 \\ A &= M - 1\ ,74\ ^{*)} \end{aligned}$$

derhalve: $G_3 = M - 2\ ,54$

Thans gevonden: $G_3 = M - 13\ ,62$

Het verschil in de oude en deze bepaling is dus = 11,08 mikrons; het moet zonder twijfel hoofdzakelijk toegeschreven worden aan de gebrekkige vergelijking in 1838, van den voor Nederland bestemden platina standaardmeter met den Mètre des Archives.

Wij hebben dus nu de volgende

TAFEL VOOR DE LENGTE VAN G_3, AFGEROND TOT DUIZENDSTE MILLIMETERS (MIKRONS).

C	G_3	C	G_3	C	G_3
	mm.		mm.		mm.
0°	999,986	11°	1000,076	21°	1000,158
1	999,995	12	,084	22	,166
2	1000,003	13	,092	23	,174
3	1000,011	14	,100	24	,182
4	1000,019	15	,109	25	,190
5	1000,027	16	,117	26	,198
6	1000,035	17	,125	27	,206
7	1000,043	18	,133	28	,215
8	1000,052	19	,140	29	,222
9	1000,060	20	,149	30	,231
10	1000,068				

*) Zoo werd het verschil althans door mij afgeleid uit de aanteekeningen der commissie LIPKENS, UYLENBROEK, LOBATTO. Zie *Verslagen en Mededeelingen*, 3e Reeks, Deel III, p. 226, en de noot onder aan die bladzijde.

———— ————

§ 10.

SAMENVOEGING DER RESULTATEN BETREFFENDE DEN GLAZEN METER G_{13} VAN HET NATUURKUNDIG KABINET TE UTRECHT.

ZOMERVERGELIJKINGEN.

EERSTE REEKS. BAUDIN 4899 OP G_{13}.

Datum	BAUDIN 4896 op N°. 27.	BAUDIN 4899 op G_{13}.	(GEISSLER N°. 2 in het vertrek).	G_{13}—N°.27.	n.	Verschil tusschen de eerste en de laatste temperatuur-aflezing.	Welke meter het eerst en laatst vóórlag
12 Sept. 1888	15°,64	15°,55	(15°,39)	— 23μ,1	2	+ 0°,085	N°. 27
13 〃 〃	16 ,16	15 ,97	(15 ,79)	— 20 ,4	2	+ 0 ,065	G_{13}
14 〃 〃	16 ,52	16 ,38	(16 ,25)	— 18 ,4	2	+ 0 ,08	N°. 27
15 〃 〃	16 ,88	16 ,77	(17 ,11)	— 20 ,4	2	+ 0 ,30	G_{13}
Som:	65 ,20	64 ,67	(64 ,54)	— 82 ,3			
	4	4	4	4			
	16 ,30	16 ,168	(16 ,135)				
Correctie:	— 0 ,205	— 0 ,14	(+0 ,07)				
	16°,095	16°,028	(16°,205)	— 20μ,58			

TWEEDE REEKS. BAUDIN 4899 OP N°. 27.

Datum	BAUDIN 4899 op N°. 27.	BAUDIN 4896 op G_{13}.	(GEISSLER N°. 2 in het vertrek).	G_{13}—N°.27.	n.	Verschil tusschen de eerste en de laatste temperatuur-aflezing.	Welke meter het eerst en laatst vóórlag.
17 Sept. 1888	16°,75	16°,89	(17°,01)	— 20μ,4	3	+ 0°,31	G_{13}
19 〃 〃	16 ,22	16 ,375	(16 ,28)	— 18 ,9	2	+ 0 ,20	G_{13}
20 〃 〃	15 ,97	16 ,07	(16 ,07)	— 19 ,7	{2, 2}	+ 0 ,28	{N°. 27, G_{13}}
22 〃 〃	17 ,55	16 ,70	(16 ,70)	— 23 ,9	2	+ 0 ,24	G_{13}
	65 ,49	66 ,035	(66 ,06)	— 82 ,9			
	4	4	4	4			
	16 ,37	16 ,51	(16 ,515)				
Correctie .	— 0 ,14	— 0 ,205	(+0 ,07)				
	16°,23	16°,305	(16°,59)	— 20μ,72			

Gemiddeld uit beide reeksen

			G_{13} — N°. 27
	16°,16	16°,17	— 20μ,65
N°. 27 is bij	16°,16		$= M + 143 ,44$
Dus is G_{13} bij		16°,17	$= M + 122 ,79$

Wintervergelijkingen.

Eerste reeks. Baudin 4899 op G_{13}.

Datum.	Baudin 7483 op N°. 27.	Baudin 4899 op G_{13}.	(Geissler N°. 2 in het vertrek).	G_{13}—N°.27.	n.	Verschil tusschen de eerste en de laatste temperatuur-aflezing.	Welke meter het eers en laats vóórlag
17 Jan. 1889	0°,03	0°,38	(0°,24)	— 14$^{\mu}$,05	2	+ 0°,33	G_{13}
21 " "	3 ,55	3 ,57	(3 ,39)	— 11 ,7	2	+ 0 ,33	G_{13}
22 " "	3 ,34	3 ,58	(3 ,62)	— 13 ,7	2	+ 0 ,235	G_{13}
23 " "	2 ,60	2 ,85	(2 ,64)	— 14 ,4	2	+ 0 ,42	G_{13}
	9 ,52	10 ,38	(9 ,89)	— 53 ,85			
4							
	2 ,38	2 ,595	(2 ,47)				
Correctie .	— 0 ,03	— 0 ,165	(+0 ,01)				
	2°,35	2°,43	(2°,48)	— 13μ,46			

Tweede reeks. Baudin 4899 op N°. 27.

Datum.	Baudin 4899 op N°. 27.	Baudin 7483 op G_{13}.	(Geissler N°. 2 in het vertrek).	G_{13}—N°.27.	n.	Verschil tusschen de eerste en de laatste temperatuur-aflezing	Wel mete het ee en laa vóórl
24 Jan. 1889	3°,63	3°,58	(3°,635)	— 14μ,8	2	+ 0°,26	N°.
28 " "	3 ,71	3 ,71	(3 ,68)	— 13 ,6	3	+ 0 ,455	G_{13}
29 " "	4 ,30	4 ,34	(4 ,485)	— 17 ,0	2	+ 0 ,275	N°.
30 " "	4 ,11	4 ,03	(4 ,125)	— 16 ,1	2	+ 0 ,28	N°.
	15 ,75	15 ,66	(15 ,925)	— 61 ,5			
4							
	3 ,94	3 ,915	(3 ,98)				
Correctie .	— 0 ,163	— 0 ,03	(+0 ,02)				
	3°,777	3°,885	(4°,01)	— 15μ,37			

Gemiddeld uit beide reeksen.

		G_{13}—N°.27.
3°,06	3°,16	— 14μ,42

Lengte van N°. 27 bij 3°,06 : M + 31 ,95

Lengte van G_{13} bij 3°,16 : M + 17 ,53

§ 11.

AFLEIDING VAN HET EINDRESULTAAT EN VERGELIJKING MET DE IN 1856 EN 57 GEVONDENE WAARDE.

Wij hebben gevonden voor de lengte van G_{13}:

bij 16°,17 :	$M + 122^{\mu},79$
bij 3 ,16 :	$M + 17 ,53$
Uitzetting voor 13°,01	105 ,26
of per 1° C:	8 ,0907
Derhalve in 3°,16	25 ,57
en Lengte van G_{13} bij 0° C:	$M - 8^{\mu},04$

De vergelijkingen hadden in 1856,7 gegeven; zie *Versl. en Mededeelingen*, 1ste Reeks, 7de Deel, blz. 33:

bij 15°,1 : $G_{13} = a + 1^{\mu},02$, midd. fout $\pm 0^{\mu},31$,
bij 7 ,1 $\quad a + 0 ,07$, » » $\pm 0 ,38$.

Schrijft men het verschil tusschen de beide waarden van $G_{13} - a$, (het midden der 7 glazen meters,) aan verschil in uitzetting toe, dan heeft men

bij 0° $\quad G_{13} = a - 0^{\mu},76$, midd. fout $\pm 0^{\mu},76$

$$a = A - 0 ,50$$
$$A = M - 1 ,74$$

derhalve: $\quad G_{13} = M - 3 ,00.$

Het verschil met onze bepaling is hier slechts omtrent 5 mikrons. Het is mijns inziens echter niet zeker dat het verschil tusschen de beide waarden van $G_{13} - a$ aan verschil in uitzetting moet toegeschreven worden. Beschouwt men het als toevallig, en de uitzetting van G_{13} gelijk aan de gemiddelde van al de glazen meters, dan zou men hebben

$$G_{13} = a + 0^{\mu},64 \quad \text{midd. fout} \pm 0^{\mu},24$$
$$= M - 1 ,60$$

en het verschil met onze tegenwoordige bepaling zou dan $6^{\mu},3$ bedragen, hetgeen slechts $4^{\mu},7$ van 11^{μ} verschilt.

Aan welke bepalingen dit ligt, aan die van 1856, 57 of aan die van 1888, 89 is moeielijk te beslissen. Die van 1856, 57 hebben het voordeel, dat zij in een groot lokaal verricht zijn, waar de temperatuur weinig veranderde; die van 1888, 89 dat er veel meer voorzorgen genomen zijn 1° om de metingen niet te doen lijden door de stralende warmte, die van het lichaam van den waarnemer uitgaat, 2° om de juiste correctie der thermometers voor alle temperaturen te kennen, 3° om te zorgen dat de steunpunten der beide stiftjes achter het hangende spiegeltje dezelfde bleven.

---

§ 12.

ONDERZOEK NAAR DE NAUWKEURIGHEID DER WAARNEMINGEN EN RESULTATEN.

Let men op alles, wat omtrent de gevolgde wijze van waarnemen is medegedeeld, en beschouwt men het in § 6 gegevene voorbeeld, dan ziet men dat men vier verschillende middelbare fouten te onderscheiden heeft. Wij zullen noemen:

de middelbare fout van éene aflezing der schaal door den kijker . . . . , ... m_1,

de middelbare fout van éene instelling van het mikroskoop . . . . m_2,

de middelbare fout van één verschil der beide meters, afgeleid zooals in de laatste kolom van het schema in § 6 is aangetoond, uit éene gemiddelde aflezing als de eene meter voor is, en twee gemiddelde aflezingen als de andere meter vóór is, (éene voorafgaande en éene volgende, welke middelbare fout voorondersteld wordt *a posteriori* afgeleid te zijn, dus door vergelijking van de twee of drie tot hetzelfde stel behoorende resultaten m_3,

de middelbare fout van het resultaat van één stel metingen, welke middelbare fout evenzoo verondersteld wordt *a posteriori* afgeleid te zijn door vergelijking met het midden van al de stellen . . . . m_4.

Omtrent de afleiding dezer middelbare fouten geldt het volgende:

m_1 wordt berekend uit de verschillen van de beide aflezingen, genomen na elke instelling van het mikroskoop, (zie 6[de] kolom in het schema van § 6). Noemen wij deze verschillen a. Zijn er in een stel vergelijkingen der beide meters $2p$ instellingen, dus $4p$ aflezingen, dan is:

$$2p\ m_1^2 = \tfrac{1}{2}\,[a^2],$$

b. v. voor 22 Augustus, zie § 6:

$$10\ m_1^2 = 0{,}21.$$

Derhalve voor al de stellen:

$$2\ \Sigma\, p\,.\, m_1^2 = \tfrac{1}{2}\ \Sigma\ [a^2],$$

$$m_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\Sigma\ [a^2]}{\Sigma\ p}}.$$

m_2 wordt evenzoo door de verschillen gevonden, tusschen de beide middentallen der paren aflezingen, die tot dezelfde ligging der meters behooren. Noemen wij die verschillen b, dan is evenzoo:

$$p\ (m_2^2 + \tfrac{1}{2}\ m_1^2) = \tfrac{1}{2}\ [b^2],$$

b. v. voor 22 Augustus:

$$5\ (m_2^2 + \tfrac{1}{2}\ m_1^2) = 0{,}2975.$$

En voor al de stellen:

$$\Sigma\ p.\ (m_2^2 + \tfrac{1}{2}\ m_1^2) = \tfrac{1}{2}\ \Sigma\ [b^2]$$

derhalve:

$$m_2^2 = \tfrac{1}{2}\frac{\Sigma\,[b^2]}{\Sigma\, p} - \tfrac{1}{2}\ m_1^2.$$

Wij hebben hieromtrent echter de volgende opmerking te maken: Men kan aannemen, dat er eene oorzaak is, waarom de tweede instelling doorgaans hoogere of lagere aflezingen geven moet dan de eerste. Zoo geeft 22 Augustus, zie § 6:

	Tweede aflezing N°. 27 vóór.	—	eerste aflezing G_3 vóór.
	+ 0,15		— 0,5
	+ 0,55		— 0,1
	— 0,1		
Gemiddeld :	+ 0,20		— 0,3

Het is werkelijk gebleken, dat een dergelijk, nagenoeg constant verschil bestond. Wij hebben namelijk gevonden, de gezochte overmaat $= x$ stellende:

	N°. 27 vóór.		G_3 of G_{13} vóór.	
Zomerverg. G_3 :	$50\,x = +7^{\mu},8$	$x = +0^{\mu},16$	$39x = -\ 4^{\mu},3$	$x = -0^{\mu},11$
〃 G_{13} :	22 $+3\ ,1$	$+0\ ,14$	25 $-\ 3\ ,55$	$-0\ ,14$
Winterverg. G_3 :	22 $-2\ ,1$	$-0\ ,10$	19 $-\ 1\ ,35$	$-0\ ,07$
〃 G_{13} :	21 $+2\ ,3$	$+0\ ,11$	22 $-\ 1\ ,9$	$-0\ ,09$
	$1i5x = +11\ ,1$	$x = +0\ ,10$	$105\,x = -11\ ,1$	$x = -0\ ,10$

Bij het afleiden der middelbare fouten kan en moet op een dergelijken systematischen invloed gelet worden; dit geschiedt, zooals bekend is, door in plaats van $\Sigma\,[b^2]$ te nemen :

$$\Sigma\,[b^2] - \frac{[\Sigma\, b]^2}{\Sigma\, p},$$

doch deze herleiding is bij elk der vier groepen vergelijkingen afzonderlijk uitgevoerd. Aldus is verkregen:

Uit de zomervergelijkingen van :

G_3 : $178\, m_1^2 = 2{,}56$ $\qquad 89\,(m_2^2 + \frac{1}{2}\, m_1^2) = 10{,}34$

G_{13} : $94 \qquad 0{,}57$ $\qquad 47 \qquad 3{,}65$

Uit de wintervergelijkingen van :

G_3 : $82\, m_1^2 = 0{,}965$ $\qquad 41 \qquad 6{,}00$

G_{13} : $86 \qquad 0{,}66$ $\qquad 43 \qquad 6{,}77$

$440\, m_1^2 = 4{,}755$ $\qquad 220\,(m_2^2 + \frac{1}{2}\, m_1^2) = 26{,}76$

$m_1^2 = 0{,}0108$ $\qquad m_2^2 + \frac{1}{2}\, m_1^2 = 0{,}1216$

$m_1 = \pm\, 0^{\mu},104$ $\qquad \frac{1}{2}\, m_1^2 = 0{,}0054$

$m_2^2 = 0{,}1162$

$m_2 = \pm\, 0^{\mu},34$

Is de afstand der stiftjes achter het hangende spiegeltje $= A$, en de vergrooting van den kijker $= V$, dan is de angulaire waarde van m_1:

$$= \frac{m_1}{A \sin 1''} . V = \frac{0{,}104}{16000 \sin 1''} \times 17{,}7 = 24''.$$

Is verder de afstand van duidelijk zien $= D$, de vergrooting van het mikroskoop $= V'$, dan is de angulaire waarde van m_2

$$= \frac{m_2}{D \sin 1''} . V' = \frac{0{,}34}{218000 \sin 1''} \times 127{,}5 = 41''.$$

De angulaire middelb. fout, 24″, van de aflezingen der schaal met den kijker bewijst de nauwkeurigheid der methode, om twee zwarte strepen op witten grond in elkanders verlengde te doen vallen. De beide aflezingen, die door den amanuensis der sterrewacht, den heer C. Verloop, tot op tiende deelen van de deeltjes, die = 1,084 mm. waren, verricht werden, waren meestal aan elkander gelijk; zoodat ik wel eens het vermoeden kreeg, dat de tweede aflezing niet geheel onbevoordeeld geschiedde; doch indien ik zelf, met de noodige aandacht, eene aflezing eenige malen herhaalde, d. w. z. de beelden der twee hangende draden in elkanders verlengde bracht en de schaal dan aflas, verkreeg ik ook herhaalde malen dezelfde aflezing. De tweede leden der bovenstaande vergelijkingen 2,56 enz. zijn voornamelijk te wijten aan eenige weinige groote verschillen, (tusschen de beide aflezingen,) die wellicht aan eene beweging van den voorliggenden meter te wijten zijn.

De middelbare fout $m_2 = 0^{\mu},34$ had men, de vergrooting van het mikroskoop 127,5 in aanmerking genomen, geringer kunnen verwachten. Laugier »Mémoire sur la détermination des distances polaires des étoiles fondamentales,'' *Mém. de l'Acad. des Sciences*, XXVII, 2me Partie, blz. 38) vindt de middelbare fout van het brengen van een streep tusschen twee evenwijdige strepen = 24″, en Bosscha (»Relation des expériences qui ont servi à la construction de deux mètres

en platine iridié, comparés directement avec le mètre des Archives," *Journal de l'Ecole Polytechnique de Delft*, Tome I, p. 96) vond uit het midden van vier bepalingen:

$$\text{middelbare fout} \times \text{vergrooting} = 22^{\mu},23,$$

zoodat bij eene vergrooting van 127,5 eene middelbare fout zou behooren van:

$$\frac{22,23}{127,5} = 0^{\mu},174,$$

dus ongeveer de helft van hetgeen onze waarnemingen opleverden. De reden, waarom onze middelbare fout grooter werd gevonden, kan tweeledig zijn: eensdeels was er tusschen beide instellingen een tijdsverloop van omtrent eene minuut, waarin eene werkelijke, hoezeer ook geringe, verandering in den stand der streep kon plaats hebben; anderdeels was de vergrooting sterker dan het enkelvoudige objectief van het mikroskoop verdragen kan. De strepen van den meter deden zich flauw en slecht begrensd voor. Toen ik vroeger, bij voorloopige metingen, eene oogbuis gebruikte, half zoo sterk als deze, vond ik eene middelbare fout van instelling, die slechts iets grooter was, nl. $0^{\mu},4$. Door de grootere vergrooting op het mikroskoop te plaatsen, werd wel het gemak een weinig bevorderd, maar de nauwkeurigheid niet vermeerderd.

De derde middelbare fout m_3 leiden wij af uit de twee of meer resultaten, die elk stel vergelijkingen heeft opgeleverd. Zooals uit § 6 te zien is, hebben wij de bij dergelijke bepalingen, waar systematische, maar toch veranderlijke fouten kunnen begaan worden, gebruikelijke methode gevolgd, om als er $n + 1$ aflezingen van den eenen en n aflezingen van den anderen meter elkander afwisselen, alsdan het verschil te nemen tusschen elk der n laatstbedoelde aflezingen en het arithmetisch midden der naastvoorgaande en naastvolgende aflezing van den anderen meter; men heeft dan het voordeel, twee of meer resultaten te verkrijgen, die een oordeel over de overeenkomst der vergelijkingen kunnen verschaffen, terwijl de onregelmatige fouten nog iets beter

geëlimineerd worden, dan wanneer men eenvoudig het arithmetisch midden neemt tusschen de beide categoriën van aflezingen. *) De beide resultaten zijn niet geheel onderling onafhankelijk; bepaalt men uit hunne verschillen de middelbare fout van elk resultaat, dan vindt men daarvoor eene te kleine waarde; zooals in mijne »Mededeeling betreffende betreffende de verificatie van eenige kilogrammen," *Verslagen en Mededeelingen*, 3[de] reeks, III, blz. 259, is aangetoond, moet men de gevondene (middelbare fout)^2 nog vermenigvuldigen met den factor $\frac{4n-1}{3n-1}$; deze factor is dus:

Voor $n = 2$. . . . . . $\frac{7}{5}$

» $n = 3$. . . . . . $\frac{11}{8}$

» $n = 4$. . . . . . $\frac{15}{11}$

Op deze wijze heb ik gevonden:

Uit de zomervergelijkingen van	G_3	19	m_3^2	=	8,24
» » » »	G_{13}	9			10,41
» » wintervergelijkingen »	G_3	8			6,77
» » » »	G_{13}	9			17,20
		45	m_3^2	=	42,62
			m_3^2	=	0,95
			m_3	=	± 0,97

Men ziet dus dat er bij het verwisselen der meters storende invloeden werken, want bestonden deze niet, dan zou men voor m_3^2 moeten verkregen hebben:

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)\left(m_2^2 + \tfrac{1}{2}\, m_1^2\right) = \frac{3}{4} . 0{,}1216 = 0{,}0912.$$

*) Zooals gemakkelijk te bewijzen is, worden lengteveranderingen van den vorm $m + n\,t + p\,t^2$, (waarin t den tijd voorstelt,) geëlimineerd, door, als er is afgelezen a_1, b_1, a_2, b_2 en a_3 te nemen:

$$\frac{a_1 + 6\,a_2 + a_3}{8} - \frac{b_1 + b_2}{2}.$$

Tot hetzelfde resultaat komen wij, als wij de op verschillende dagen of althans door verschillende stellen vergelijkingen verkregene uitkomsten bij het algemeene midden vergelijken. Wij vinden namelijk:

Uit de zomervergelijkingen van	G_3 :	14	m_4^2 =	32,55
» » » »	G_{13} :	6		25,74
» » wintervergelijkingen »	G_3 :	6		1,56
» » » »	G_{13} :	6		11,10
Som :		32	m_4^2 =	70,95
			m_4^2 =	2,22
			m_4 =	± 1,49

Derhalve:

middelbare font van het resultaat der zomervergelijkingen

van G_3. . . . . $\pm \frac{1,49}{\sqrt{16}} = \pm 0^{\mu},37,$

middelbare fouten der overige reeksen $\frac{1,49}{\sqrt{8}} = \quad 0\ ,52.$

Hoewel wij deze middelbare fouten gaarne kleiner gewenscht hadden, wij gelooven toch, dat voor alle doeleinden, waarvoor de glazen meter ooit gebruikt zal worden, de bereikte nauwkeurigheid voldoende is.

---

§ 13.

NADER ONDERZOEK, IN HOE VER DE LICHAAMSWARMTE VAN DEN WAARNEMER BIJ DE VERGELIJKINGEN MERKBAAR WAS.

Hetgeen boven is medegedeeld betreffende het verschil tusschen de aflezingen, behoorende bij de eerste en de tweede instelling bij dezelfde ligging der meters, gaf mij aanleiding eens na te gaan, welke in het algemeen de vermeerdering der temperatuur en der aflezingen gedurende een stel vergelijkingen geweest is. Zie hier wat dat onderzoek heeft opgeleverd. Wij hebben de zomervergelijkingen en de wintervergelijkingen afzonderlijk gehouden, en evenzoo de stellen, waarbij de platina-iridium meter, als waarbij een der glazen meters in het begin en eind voor was. Wij geven: 1^0. den

datum; 2⁰. den duur der geheele reeks vergelijkingen, 3⁰. de toeneming der aanwijzing van den thermometer, die op den meter lag, die bij het begin en eind vóór was; 4⁰. de rijzing der temperatuur in het vertrek zelf, afgeleid uit de aanwijzing van den thermometer GEISSLER N⁰. 2, die boven den comparateur, doch zoo hing, dat hij nauwelijks aan de stralende warmte van den waarnemer onderhevig was.

Van beide thermometers werd het midden der beide eerste aflezingen, behoorende bij de eerste ligging der meters, afgetrokken van het midden der beide laatste aflezingen, behoorende bij de laatste ligging der meters.

5⁰. de toeneming van de aflezing der schaal, tusschen de eerste en de laatste aflezing, zoowel

a, in de eerste, derde, vijfde ligging als *b*, in de tweede, vierde ligging.

ZOMERVERGELIJKINGEN.

De platina-iridium meter N⁰. 27 het eerst vóór.

Datum.	Duur.	Rijzing van den thermometer op N⁰. 27.	Rijzing van den thermometer in het vertrek.	Verandering der aflezing N⁰. 27 (*a*)	Verandering der aflezing G_3 of G_{13} (*b*)
3 Augustus	22ᵐ	+ 0°,30	0°,00	— 0μ,75	— 0μ,25
4 〃	16	0 ,07	+ 0 ,09	+ 0 ,78	. . .
20 〃	17	0 ,15	+ 0 ,21	+ 1 ,5	— 0 ,125
22 〃	17	0 ,06	— 0 ,01	+ 0 ,475	— 0 ,15
23 〃	17	0 ,09	— 0 ,06	— 0 ,125	+ 0 ,10
24 〃	19	0 ,12	+ 0 ,075	+ 1 ,05	— 0 ,775
28 〃	17	0 ,09	+ 0 ,16	+ 1 ,825	— 0 ,025
28 〃	28	0 ,17	+ 0 ,265	— 2 ,325	— 0 ,50
29 〃	19	0 ,085	+ 0 ,275	— 0 ,25	— 0 ,75
29 〃	19	0 ,095	+ 0 055	+ 0 ,775	+ 0 ,9
29 〃	19	0 ,115	+ 0 ,135	+ 1 ,8	— 1 ,3
30 〃	19	0 ,06	+ 0 ,16	— 0 ,75	+ 0 ,75
31 〃	17	0 ,14	+ 0 ,075	+ 0 ,425	— 0 ,125
12 September	23	0 ,085	+ 0 ,045	— 0 ,5	— 1 ,35
14 〃	20	0 ,085	— 0 ,025	+ 0 ,875	— 0 ,45
20 〃	12	0 ,10	+ 0 ,08	+ 0 ,8	— 0 ,15
Gemiddeld . .	19ᵐ	+ 0°,11	+ 0°,10	+ 0μ,35	— 0μ,28

De glazen meter G_3 of G_{13} het eerst vóór.

Datum.	Duur	Rijzing van den thermometer op N°. 27	Rijzing van den thermometer in het vertrek.	Verandering der aflezing G_3 of G_{13} (*a*)	Verandering der aflezing N°. 27 (*b*)
2 Augustus	31m	— 0°,26	— 0°,25	— 1μ,67	— 2μ,85
4 „	14	+ 0 ,13	+ 0 ,05	— 0 ,37	. . .
27 „	17	+ 0 ,01	+ 0 ,035	— 0 ,50	— 0 ,70
13 September	14	+ 0 ,06	+ 0 ,08	+ 0 ,05	— 0 ,10
15 „	21	+ 0 ,30	+ 0 ,345	— 2 ,075	+ 0 ,025
17 „	25	+ 0 ,31	+ 0 ,345	— 3 ,725	— 0 ,35
19 „	19	+ 0 ,20	+ 0 ,18	— 1 ,375	+ 1 ,3
20 „	16	+ 0 ,18	+ 0 ,30	— 0 ,325	— 0 ,625
22 „	28	+ 0 ,24	± 0 ,00	+ 0 ,125	— 0 ,20
Gemiddeld . .	21m	+ 0°,13	+ 0°,12	— 1μ,1	— 0μ,4

WINTERVERGELIJKINGEN.

De platina-iridium meter N°. 27 het eerst vóór.

Datum.	Duur.	Rijzing van den thermometer op N°. 27	Rijzing van den thermometer in het vertrek.	Verandering der aflezing N°. 27 (*a*)	Verandering der aflezing G_3 of G_{13} (*b*)
8 Januari	21m	+ 0°,265	+ 0°,11	— 0μ,05	— 1μ,50
8 „	18	0 ,265	0 ,17	+ 0 ,33	+ 0 ,525
9 „	32	0 ,265	0 ,36	— 0 ,50	— 0 ,23
9 „	22	0 ,33	0 ,355	+ 1 ,88	+ 1 ,40
10 „	21	0 ,15	0 ,35	— 0 ,70	+ 1 ,27
11 „	29	0 ,125	0 ,11	— 0 ,03	. . .
24 „	23	0 ,26	0 ,325	+ 0 ,05	+ 1 ,875
29 „	16	0 ,275	0 ,305	+ 2 ,00	+ 1 ,00
30 „	20	0 ,28	0 ,34	+ 4 ,30	+ 2 ,025
Gemiddeld . .	22m	+ 0°,24	+ 0°,27	+ 0μ,81	+ 0μ,90

De glazen meter G_3 of G_{13} het eerst vóór.

Datum.	Duur.	Rijzing van den thermometer op *G*.	Rijzing van den thermometer in het vertrek.	Verandering der aflezing G_3 of G_{13} (*a*)	Verandering der aflezing N°. 27. (*b*)
11 Januari	12m	+ 0°,145	+ 0°,21	— 0μ,15	. . .
11 〃	19	0 ,42	0 ,285	1 ,65	— 0μ,45
12 〃	17	0 ,345	0 ,47	0 ,93	+ 0 ,18
17 〃	18	0 ,33	0 ,39	0 ,6	— 0 ,725
21 〃	25	0 ,33	0 ,11	2 ,88	+ 1 ,6
22 〃	16	0 ,235	0 ,435	1 ,83	+ 0 ,85
28 〃	26	0 ,455	0 ,425	1 ,7	+ 1 ,3
Gemiddeld . .	19m	+ 0°,33	+ 0°,33	— 1μ,39	+ 0μ,46

De reden dezer verschillen is niet gemakkelijk aan te geven. Het is in de eerste plaats niet zeker, althans niet bij de zomerwaarnemingen, dat de rijzing der thermometers uitsluitend aan de tegenwoordigheid des waarnemers moet geweten worden. Na elke instelling van het mikroskoop verwijderde ik mij van den comparateur, en begaf ik mij meestal achter den zwaren pilaar, die in de boverdieping den kijker van Steinheil draagt. De bollen der thermometers waren door karton, dat met tinfoelie beplakt was, tegen stralende warmte beschut; de een lag in de bovenste holte van den X-vormigen platina-iridium meter N°. 27, de ander was op de glazen meter gebonden. Eerstgenoemde thermometer zal dus met meer waarschijnlijkheid zijne rijzing aan die van de temperatuur van N°. 27, dan aan stralende warmte van den waarnemer ontleend hebben.

Raadselachtig is vooral het verminderen der aflezing voor G_3 of G_{13} als deze het eerste vóór lag; maar ook bij die wintervergelijkingen, waarin N°. 27 het eerst vóór lag, komt de gemiddelde vermeerdering der aflezing voor G_3 of G_{13}, nl. + 0μ,90, lang niet overeen met de gemiddelde rijzing der temperatuur, (0°,27), van dienzelfden meter, daar deze

temperatuurs-vermeerdering met eene lengte-vermeerdering van ongeveer $2^{\mu},2$ zou overeenstemmen.

In één opzicht is de glazen meter bij de vergelijkingen in een anderen toestand dan N⁰. 27; hij wordt namelijk, als hij niet vóór ligt, zijdelings weggeschoven, zoodat hij zich dan niet meer boven den balk bevindt. De streepmeter N⁰. 27 blijft echter altijd boven den balk. Hierin kan een verschil van thermische werking schuilen, maar opzettelijke proeven zouden daaromtrent genomen moeten worden; voors'hands is het mij althans nog niet duidelijk hoe, bij toenemende kamertemperatuur, daardoor eene verkoeling ontstaan kan.

Men zou geneigd zijn uit het hier medegedeelde af te leiden, dat het verstandiger is enkel het resultaat der eerste vergelijking van elken dag te gebruiken en de één of twee volgende resultaten slechts als contrôle-waarnemingen te beschouwen. Ik heb dit ook gedaan, en het resultaat, dat te voorzien was, was voor N⁰. 3, dat deze zoowel voor de zomer- als de wintervergelijkingen $0^{\mu},3$ langer, en voor N⁰. 13, dat hij $0^{\mu},4$ langer werd gevonden. Het verschil is dus uiterst gering; en er blijkt wel uit dit geheele onderzoek, hoe moeielijk het is, twee meters tot op b. v. $\frac{1}{4}$ mikron met elkander te vergelijken.

Utrecht, 19 April 1889.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 25 Mei 1889.

Tegenwoordig de Heeren: van de Sande Bakhuyzen, Voorzitter, Pekelharing, Bierens de Haan, Korteweg, Forster, Kamerlingh Onnes, van der Waals, Behrens, Suringar, Martin, Lorentz, Mac Gillavry, Zaaijer, Hoffmann, Hubrecht, A. C. Oudemans jr., Franchimont, Beijerinck, Zeeman, Place, van Diesen, Michaëlis, Stokvis, de Vries, Kapteyn, van 't Hoff, Hoogewerff, Buys Ballot, J. A. C. Oudemans, Schols, Brutel de la Rivière, Rauwenhoff, Engelmann, Grinwis, Moll, Gunning en C. A. J. A. Oudemans, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige Vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1^{0}. H. Du Monceau, particulier Secretaris van Z. M. den Koning, 's Gravenhage, 20 April 1889; 2^{0}. het Ministerie van Oorlog, 's Gravenhage, 20 April 1889; 3^{0}. het Ministerie van Justitie, 's Gravenhage, 24 April 1889; 4^{0}. den Commissaris des Konings in de provincie Noord-Holland te Haarlem, 18 Mei 1889; 5^{0}. Burgemeester en Wethouders van Amsterdam, 25 April 1889; 6^{0}. Burgemeester en Wethouders van Zutphen, 26 April 1889; 7^{0}. G. F. Westerman,

Directeur van het koninklijk zoölogisch Genootschap »Natura Artis Magistra" te Amsterdam, 20 April 1889; 8°. H. C. Rogge, Bibliothecaris van de Universiteits-Bibliotheek te Amsterdam, 24 April 1889; 9°. A. J. van Pesch, Bibliothecaris vau het wiskundig Genootschap »Een onvermoeide arbeid komt alles te boven" te Amsterdam, 24 April 1889; 10°. Directeuren van de Nederlandsche Handelmaatschappij te Amsterdam, 24 April 1889; 11°. A. J. Enschedé, Bibliothecaris van de Stads-Bibliotheek te Haarlem, 27 April 1889; 12°. J. Bosscha, Secretaris van de Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen te Haarlem, 1 Mei 1889; 13°. G. C. W. Bohnensieg, Conservator van Teyler's Stichting te Haarlem, 4 Mei 1889; 14°. Curatoren van de Rijks-Universiteit te Leiden, 22 April 1889; 15°. W. P. Wolters, Bibliothecaris van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden, 25 April 1889; 16°. A. R. Arntzenius, Griffier van de Tweede Kamer der Staten-Generaal te 's Gravenhage, 25 April 1889; 17°. J. Tideman, Secretaris van het Koninklijk Instituut van Ingenieurs te 's Gravenhage, 26 April 1889; 18°. H. Vollenhoven, 's Gravenhage, 27 April 1889; 19°. B. J. Goedhart, Secretaris van het Rotterdamsch Leeskabinet te Rotterdam, 24 April 1889; 20°. J. A. Grothe, Secretaris van het historisch Genootschap te Utrecht, Mei 1889; 21°. W. F. C. van Laak Jr., Bibliothecaris van de Gemeente-Bibliotheek te Arnhem, 1889; 22°. van Naamen, Secretaris van de Overijsselsche Vereeniging tot ontwikkeling van provinciale Welvaart te Zwolle, 13 Mei 1889; 23°. Taets van Amerongen, Gouverneur van de Koninklijke militaire Akademie te Breda, 4 Mei 1889; 24°. R. D. M. Verbeek, te Buitenzorg, 18 April 1889; 25°. F. Heger, Secretaris van de anthropologische Gesellschaft te Weenen, 12 April 1889; 26°. I. S. Billings, Bibliothecaris van het Surgeon general's Office te Washington, 26 April 1889; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1°. het Ministerie van Binnenlandsche Zaken te 's Gravenhage, 2 Mei 1889; 2°. het Ministerie van Marine te 's Gravenhage, 25 April 1889; 3°. G. C. W. Bohnensieg, Conservator van Teyler's Stichting te Haarlem, 1889; 4°. Buys Ballot, Directeur van het koninklijk Nederlandsch meteorologisch Instituut te Utrecht, 7 Mei 1889; 5°. Tegner, Bibliothecaris van de Universiteits-Bibliotheek te Lund, 23 April 1889; 6°. B. A. Colonna, Directeur van het U. S. coast and geodetic Survey Office te Washington, 9 Mei 1889; 7°. I. F. Bride, Bibliothecaris van de public Library te Melbourne, 15 Januari, 25 October 1889; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behooren:

1°. de dankzegging van wege Z. M. den Koning (20 Mei 1889) voor den gelukwensch, Z. M. bij gelegenheid van H.desz. 40-jarige regeering door de Akademie aangeboden; 2°. een brief van Z. Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken (6 Mei 1889), de mededeeling behelzend, dat de benoemingen van de Heeren Dr. J. W. Moll, Directeur der H. B. S. te Utrecht, tot gewoon lid, en A. G. Vorderman, geneesheer te Batavia, tot correspondent der Akademie door den Raad van State bekrachtigd zijn; 3°. een brief van den Heer Dr. J. W. Moll, waarin hij zijn dank betuigt voor zijne benoeming tot lid der Akademie; 4°. een schrijven van den Heer Dr. Jan de Vries, leeraar aan de H. B. S. te Kampen, ter begeleiding van een opstel: »Over vlakke configuraties, waarin elk punt met twee lijnen incident is", aangeboden voor de werken der Akademie. Tot rapporteurs over dien arbeid worden door den Voorzitter aangewezen de Heeren Bierens de Haan en van den Berg; 5°. eene mededeeling van den Heer Hoek, dat hij verhinderd is de vergadering bij te wonen.

— De Heer Lorentz doet eene mededeeling over *de molekulaire beweging van opgeloste stoffen*. — De waarden, door den Heer van 't Hoff uit verschillende gegevens voor den

osmotischen druk in zeer verdunde waterige oplossingen afgeleid, maken het waarschijnlijk, dat deze druk niet anders is dan de »kinetische druk" der opgeloste stof; dat hij nl. gelijk is aan de hoeveelheid van beweging, gerekend volgens de normaal op eenig vlak, die tengevolge van de molekulaire beweging der opgeloste stof per tijdseenheid door de eenheid van dat vlak gaat, waarbij dan zou moeten worden aangenomen, dat de gemiddelde kinetische energie van een molekuul der opgeloste stof even groot is als die van een gasmolekuul bij dezelfde temperatuur. Om deze opvatting nader op de proef te stellen, kan men het molekulair evenwicht in eene oplossing, waarop uitwendige krachten werken, op twee verschillende wijzen beschouwen.

Vooreerst kan men, gelijk dit door de Heeren Gouy en Chaperon en meer in het algemeen door den Heer van der Waals gedaan is, uit de tweede wet der warmtetheorie de veranderingen afleiden, die in een dergelijk geval de concentratie van punt tot punt vertoont. De uitkomst wordt bijzonder eenvoudig, wanneer men dit verschijnsel in verband brengt met den osmotischen druk en de vloeistof onsamendrukbaar onderstelt. Neemt men nl. aan, dat de uitwendige kracht overal dezelfde grootte en richting heeft, en beschouwt men een prisma, waarvan grond- en bovenvlak $= 1$ zijn, en loodrecht op de kracht staan, dan blijkt het verschil van den osmotischen druk aan die beide vlakken, wanneer de uitwendige kracht *alleen* op de opgeloste stof werkt, gelijk te zijn aan de totale kracht, welke de inhoud van het prisma ondervindt. Werkt daarentegen de uitwendige kracht op de massaeenheid van het water even sterk als op de massaeenheid der opgeloste stof, dan wordt het bedoelde verschil gelijk aan de kracht, welke op de in het prisma aanwezige opgeloste stof werkt, verminderd met die, welke het door deze stof vervangen water ondervindt. Met het »vervangen" water wordt hier bedoeld de hoeveelheid water, die men, na de opgeloste stof verwijderd te hebben, in het prisma zou moeten brengen om dit opnieuw geheel te vullen.

In de tweede plaats kan men nagaan, aan welke voor-

waarde voldaan moet zijn, opdat de totale hoeveelheid van beweging der in het prisma aanwezige opgeloste stof niet verandert; daarbij moet zoowel op de krachten als op den kinetischen druk aan grond- en bovenvlak worden gelet.

De vergelijking der langs dezen weg verkregen uitkomsten met die, welke uit de mechanische warmtetheorie worden afgeleid, voert tot de identiteit van den osmotischen druk en den kinetischen druk, wanneer men de volgende onderstellingen maakt:

1. Indien op het water geene uitwendige kracht werkt, ondervindt eene groep molekulen der opgeloste stof van de waterdeeltjes, waartusschen zij zich bewegen, alles samengenomen, geene kracht in de eene of in de andere richting.

2. Indien daarentegen ook het water aan de uitwendige kracht is onderworpen, hebben al de krachten, die de waterdeeltjes op eene hoeveelheid der opgeloste stof uitoefenen, eene resultante, gelijk en tegengesteld aan de uitwendige kracht, die op het door deze hoeveelheid vervangen water zou werken.

— De Heer Bierens de Haan brengt, als Voorzitter der Huygens-Commissie, een 4e rapport uit over de werkzaamheden der Commissie en deelt mede dat het 2e deel van Huygens' werken weldra het licht zal zien.

— De Heer van de Sande Bakhuyzen verklaart een, volgens zijne opgave, door den Heer Repsold geconstrueerden toestel voor het uitmeten van de sterreplaatsen op photographieën, door middel van rechthoekige coördinaten, en deelt de uitkomsten mede van de uitmeting van eene photographie, welke hij van den Heer P. Henry uit Parijs ontvangen had. De waarschijnlijke fout van eene coördinaat is $\pm\ 0'',043$.

In verband met deze nauwkeurigheid wijst spreker op het belang van de photographie ter vervanging van mikrometer- en heliometer-metingen. Eene gunstige gelegenheid om de groote waarde van de photographie in dit opzicht te leeren kennen, zal binnen kort worden aangeboden bij gelegenheid van de oppositie van Victoria. De plaatsen van

de planeet zullen dan door heliometer-metingen aan de Kaap de Goede Hoop (in Yale Observatory), te Leipzig en te Göttingen worden bepaald, doch tevens zullen, gedurende die periode, op de sterrenwacht te Parijs photographieën worden vervaardigd van die planeet en de in hare nabijheid liggende vergelijkingssterren, welke te Leiden zullen worden uitgemeten.

De mededeeling geschiedde naar aanleiding van het in het licht verschijnen eener 4⁰ verhandeling van den Spreker: »Mesure des clichés d'après la méthode des coordonnées rectangulaires", waarvan een exemplaar voor de boekerij der Akademie ten geschenke wordt aangeboden.

— De Heer FORSTER doet in de eerste plaats eenige mededeelingen aangaande onderzoekingen, onder zijne leiding door den Heer DE FREYTAG, Officier van Gezondheid 1ste kl. N. I. L., gedaan over den invloed van verzadigde oplossingen van keukenzout en van zout in substantie op de ontwikkeling en het leven van pathogene bacteriën. Terwijl cholera-bacillen door keukenzout, in overmaat aangewend, spoedig gedood worden, blijven andere soorten van bacteriën, zooals typhus-bacillen, pyogene staphylokokken, erysipelkokken, de bacillen der varkensziekte (rouget des porcs) — indien zij onder zout bewaard worden — langen tijd, gedurende weken en sommige zelfs gedurende maanden, in het leven. Het onderzoek heeft in zoo verre praktisch belang, als aan Spreker bekend is, dat op sommige plaatsen vleesch van dieren, die bij het slachten aan parelziekte lijdend werden bevonden en waarvan de weeke deelen voor het gebruik als voedingsmiddel afgekeurd werden, gezouten en, na 2 à 3 weeken in den pekel gelegen te hebben, aan de eigenaars ter vrije beschikking werden teruggegeven. Tuberkelbacillen echter, die de oorzaak zijn der tuberkulose van den mensch en van de hiermede overeenkomende parelziekte van het rund, worden door het zouten of pekelen niet gedood; deze bacillen, afkomstig van kultures, zoowel als van knobbels van organen van runderen, die aan parelziekte lijdende waren, behouden onder zout zoowel hun leven als hun infecteerend vermogen,

zoodat ingezouten of gepekelde — door parelziekte ontaarde — organen, waarvan gedeelten in de buikholte van proefdieren worden gebracht, bij deze tuberkulose van het peritoneum teweeg brengen. Waarschijnlijk staat het weêrstandsvermogen dier mikroörganismen tegen het zouten in verband met het vermogen om sporen te vormen. Dit mag althans worden afgeleid uit proeven, met miltvuurbacillen genomen. Hierbij bleek, dat deze bakteriën door geconcentreerde zoutoplossingen (van ten minste 7½ procent) gedood worden, indien zij vrij van sporen zijn, terwijl kultures er van, die sporen bevatten, onder zout bewaard, na maanden nog het vermogen hebben, zich te ontwikkelen en te vermenigvuldigen.

In de tweede plaats vermeldt spreker nog de in zijn laboratorium door Dr. C. B. Tilanus Jr. gedane onderzoekingen omtrent den invloed van iodoform-dampen op tuberkelbacillen. Er werden aan de Vergadering een aantal buisjes vertoond, waarin een voor de ontwikkeling van tuberkelbacillen geschikte voedingsstof aanwezig was. Die stof was in alle buisjes ter zelfder tijd met tuberkelbacillen ingeënt. In de eene helft der buisjes had men, na het enten, boven de voedingsstof kleine buisjes met iodoform-poeder opgehangen. Alleen in die buisjes, waarin geen iodoform was gebracht, hadden zich kulturen van tuberkelbacillen gevormd; onder den invloed van de iodoform-dampen daarentegen, had geen ontwikkeling plaats gehad.

— De Heer Hoffmann deelt mede, dat hij binnen kort voor de werken der Akademie eene verhandeling hoopt aan te bieden: »Over de ontwikkeling van het gehoororgaan bij de Reptiliën".

— De Heer de Vries biedt voor de boekerij een exemplaar aan van een onlangs door hem uitgegeven werk: »Intracellulare Pangenesis.

— De Vergadering wordt gesloten.

VIERDE RAPPORT

VAN DE

HUYGENS-COMMISSIE.

(Uitgebracht in de Vergadering van 25 Mei 1889).



Nu eerstdaags het Tome II van de *Oeuvres et Correspondance de* Chr. Huygens in het licht verschijnen zal, wenscht Uwe Commissie daaromtrent eenige mededeelingen te doen.

Het eerste Deel liep over de jaren 1637—1656, het tweede loopt over het tijdvak 1657—1659, het volgende zal de jaren 1660—1662 moeten bevatten.

Het eerste Deel hield 365 brieven en nog 18 in het Supplement.

Het tweede Deel hield 337 brieven en nog 20 in het Supplement; dus 740 te zamen.

Hiernevens leggen wij U over eene lijst van de personen die in deze *Correspondance* voorkomen, in zoo verre zij door Huygens of aan hem geschreven zijn. Bovendien zijn er nog 110 andere brieven, die niet tot een dezer beide soorten behooren. Deze lijsten hebben wij opgemaakt voor het eerste en voor het tweede deel afzonderlijk, en daarop voor beide deelen te zamen.

De tweede kolom bevat de namen der briefschrijvers, de derde en vierde kolom het aantal brieven door Huygens aan hem, en door hem aan Huygens geschreven. Daaruit blijkt, dat door sommige personen niet aan Huygens is geantwoord, en eveneens dat Huygens sommige personen niet beantwoordde. Behalve deze uitzonderingen nu blijkt uit deze lijsten, dat er bij velen der genoemde personen brief-

wisseling met Huygens bestond; waar dit plaats had, is in de eerste kolom het aantal brieven van die briefwisseling opgegeven, dus de som der aantallen, die in de derde en vierde kolommen voorkomen.

Tabel I. Tome I.

Briefwisseling.		van H.	aan H.
	Fr. X. Aynscom.	1	
2	Er. Bartholin.	1	1
	A. de Bie.	1	
	Ism. Boulliau.		1
	W. Brereton.		3
	H. Bruno.		1
	Calthof.	1	
7	P. de Carcavy	4	3
2	A. C. de Chambonnière	1	1
6	J. Chapelain.	3	3
8	A. Colvius.	4	4
	N. Colvius.		1
	V. Conrart		2
	J. Elsevier.	1	
2	Etats-Généraux	1	1
	J. Golius.	2	
19	Gregorius à St. Vincentio.	10	9
8	G. van Gutschoven.	5	3
7	J. Hevelius	3	4
	G. B. Hodierna.		1
11	C. Huygens, père	7	4
42	C. Huygens, frère.	25	17
	Lodewijk Huygens.	5	
	Philips Huygens.		2
	Suzanna Huygens		1
19	G. A. Kinner à Löwenthurn.	8	11
	D. v. Leyden v. Leeuwen.	1	
5	D. Lipstorp.	3	2
15	M. Mersenne.	5	10
153		92	85

Briefwisseling.		van H.	aan H.
153		92	85
	F. B. Mocchi.	2	
	H. du Mont	1	
9	Cl. Mylon.	5	4
	Chr. Otter.		1
3	R. Paget	1	2
10	G. P. de Roberval	6	4
3	A. A. de Sarasa.	2	1
79	Fr. van Schooten	44	35
	D. Seghers	5	
	J. Stampioen		1
6	A. Tacquet	4	2
	Tassin	2	
	D. de Vogelaer	1	
	J. van Vondel.		2
12	J. Wallis	5	7
	J. Wiessel.		3
	J. de Wijck		1
	? (3)	3	
275		173	148

Tabel II. Tome II.

Briefwisseling.		van H.	aan H.
	M. H. van Andel.	1	
	D. van Baerle.	1	
	E. Bartholin		1
6	Ch. Bellair.	2	4
	A. de Bie.	1	
3	A. Boddens.	1	2
49	Ism. Boulliau.	19	30
2	C. Brunetti	1	1
9	H. Bruno	4	5
	J. van der Burch	1	
9	P. de Carcavy.	4	5
21	J. Chapelain	7	14
99		42	62

Briefwisseling.		van H.	aan H.
99		42	62
2	A. Colvius.	1	1
2	B. Conradus	1	1
	L. van Coppenol.	1	
	S. Coster		1
	A. Duyck.	1	
	Etats de Hollande et de West-Frise.	1	
3	du Gast	1	2
	Th. Gobert.	1	
8	Gregorius à St. Vincentio. . . .	4	4
	G. van Gutschoven	1	
2	N. Heinsius	1	1
2	G. Hesius	1	1
	H. van Heuraet		2
3	J. Hevelius.	2	1
	G. B. Hodierna	1	
2	J. Hudde	1	1
3	C. Huygens, père.	1	2
	C. Huygens, frère.		2
	Lodewijk Huygens	2	
	S. C. Kechelius à Hollenstein. . .	1	
3	G. A. Kinner à Löwenthurn. . .	2	1
	L. de Medicis.	1	
	M. Mersenne	3	
	H. L. H. de Monmor	1	
13	Cl. Mylon.	3	10
	Lady Newcastle		1
	R. Paget		1
6	Bl. Pascal.	1	5
9	P. Petit	2	7
	W. Piek.	1	
3	D. Rembrantz van Nierop	2	1
	Mlle van Renesse.	1	
33	Fr. van Schooten.	15	18
	D. Seghers	1	
67	R. F. de Sluse	23	44
260		120	169

Briefwisseling.		van H.	aan H.
260		120	169
	A. Tacquet		3
4	J. van Vliet	1	3
8	J. Wallis	4	4
	J. de Witt		2
	son Cousin	1	
	Mlle.	1	
	? (1).	1	
272		128	181

TABEL III. TOMES I en II.

Briefwisseling.		van H.	aan H.
	M. H. van Andel	1	
	Fr. X. Aynscom	1	
	D. van Baerle	1	
3	E. Bartholin	1	2
6	Ch. Bellair	2	4
	A. de Bie	2	
3	A. Boddens	1	2
50	Ism. Boulliau	19	31
	W. Brereton		3
2	C. Brunetti	1	1
10	H. Bruno	4	6
	J. van der Burch	1	
	Calthof	1	
16	P. de Carcavy	8	8
2	A. C. de Chambonnière	1	1
27	J. Chapelain	10	17
10	A. Colvius	5	5
	N. Colvius		1
2	B. Conradus	1	1
	V. Conrart		2
	L. van Coppenol	1	
	S. Coster		1
	A. Duyck	1	
131		62	85

Briefwisseling.		van H.	aan H.
131		62	85
	J. Elsevier.	1	
2	Etats-Généraux	1	1
	Etats de Hollande et de West-Frise.	1	
3	du Gast.	1	2
	Th. Gobert	1	
	J. Golius	2	
27	Gregorius à St. Vincentio. . . .	14	13
9	G. van Gutschoven.	6	3
2	N. Heinsius	1	1
2	G. Hesius	1	1
	H. van Heuraet		2
10	J. Hevelius	5	5
2	G. B. Hodierna	1	1
2	J. Hudde	1	1
14	C. Huygens, père	8	6
44	C. Huygens, frère.	25	19
	Lodewijk Huygens	7	
	Philips Huygens.		2
	Suzanna Huygens.		1
	S. C. Kechelius à Hollenstein. . .	1	
22	G. A. Kinner à Löwenthurn. . .	10	12
	D. v. Leyden v. Leeuwen. . . .	1	
5	D. Lipstorp.	3	2
	L. de Medicis.	1	
18	M. Mersenne	8	10
	T. B. Mocchi.	2	
	H. L. H. de Monmor	1	
	H. du Mont	1	
22	H. Mylon	8	14
	Lady Newcastle		1
	Chr. Otter.		1
4	R. Paget	1	3
6	Bl. Pascal.	1	5
9	P. Petit	2	7
	W. Pieck	1	
334		179	198

Briefwisseling.		van H.	aan H.
334		179	198
3	D. Rembrantz van Nierop . . .	2	1
	Mlle van Renesse	1	
10	G. P. de Roberval	6	4
3	A. A. de Sarasa.	2	1
112	Fr. van Schooten.	59	53
	D. Seghers	6	
67	R. F. de Sluse	23	44
	J. Stampioen		1
9	A. Tacquet	4	5
	Tassin	2	
4	J. van Vliet	1	3
	D. de Vogelaer	1	
	J. van Vondel.		2
20	J. Wallis	9	11
	J. Wiessel.		3
	J. de Witt.		2
	J. de Wijck		1
	son Cousin	1	
	Mlle	1	
	? (4)	4	
562		301	329

En nu wij deze gegevens hadden, konden wij gemakkelijk een geregeld overzicht geven, zoowel van de wederzijds niet-beantwoorde brieven, als van het aantal der personen, met wie Huygens in briefwisseling stond. Het moet niet verwonderen, dat daaromtrent alle getallen van tabel III niet de sommen zijn van de getallen, die in de tabellen I en II voorkomen; omdat het meermalen gebeurt, dat in het eene Deel een persoon onder de briefwisseling voorkomt, terwijl dezelfde in het andere Deel slechts in ééne der beide laatste kolommen te vinden is: of omgekeerd.

Tome I.

Brieven	365
Supplement.	18
	383

A. van Huygens. , ...	173	brieven
B. aan Huygens.	148	〃
C. buiten Huygens om . .	62	〃
	383	brieven.

Personen.

A. aan 36 personen, in briefwisseling 21, niet beantwoord 15;
B. van 34 〃 〃 〃 21, 〃 〃 13;

aantal personen 36 + 34 — 21 = 49 = 28 + 15 + 13.

Brieven.

147 + niet beantwoord 26
128 + 〃 〃 20

275 + niet beantwoord 46 = 321 = 173 + 148.

Tome II.

Brieven	337
Supplement.	20
	357

A. van Huygens	128	brieven
B. aan Huygens	181	〃
C. buiten Huygens om . .	48	〃
	357	brieven.

Personen.

A. aan 46 personen, in briefwisseling 25, niet beantwoord 21;
B. van 33 〃 〃 〃 25, 〃 〃 8;

aantal personen 46 + 33 — 25 = 54 = 25 + 21 + 8.

Brieven.

105 + niet beantwoord 23
167 + 〃 〃 14

272 + niet beantwoord 37 = 309 = 128 + 181.

Tome I en II.

Brieven.	702
Supplement I.	18
〃 II.	20
	740

A. van Huygens.	301	brieven	= 173 + 128
B. aan Huygens.	329	〃	= 148 + 181
C. buiten Huygens om. . .	110	〃	= 62 + 48
	740	〃	= 383 + 357.

Personen.

A. aan 68 personen, in briefwisseling 37; niet beantwoord 31;
B. van 51 〃 〃 〃 37; 〃 〃 14;

aantal personen 68 + 51 — 37 = 82 = 37 + 31 + 14.

Brieven.

256 + niet beantwoord 45 = 301
306 + 〃 〃 23 = 329

562 + niet beantwoord 86 = 630 = 301 + 329.

Belangrijk mag zulk een overzicht ook uit dien hoofde heeten, dat daaruit blijkt, hoezeer de briefwisseling in den loop der jaren zich allengs verplaatste. Komt in den aanvang M. Mersenne op den voorgrond, naderhand verschijnen G. A. Kinner à Löwenthurn en Gregorius à St. Vincentio en vooral ook Frans van Schooten; terwijl deze in den loop van het derde deel overlijdt; in het tweede deel is er eene drukke briefwisseling met R. F. de Sluse, Ism. Boulliau, J. Chapelain, en ook deze zullen wederom voor anderen moeten plaats maken. Voor den lateren biograaf van Huygens leveren deze overgangen zekere belangrijke gezichtspunten op.

Leiden, 24 Mei 1889.

D. BIERENS DE HAAN, *Voorzitter*.
H. A. LORENTZ, *Secretaris*.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 29 Juni 1889.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DER WAALS, onder-Voorzitter, RIJKE, MAC GILLAVRY, ZAAIJER, DE VRIES, FRANCHIMONT, VAN DORP, STOKVIS, BEIJERINCK, HOFFMANN, WEBER, HUBRECHT, MARTIN, MULDER, RAUWENHOFF, SURINGAR, MOLL, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, KOSTER, PEKELHARING, FORSTER, MICHAËLIS, PLACE, VAN BEMMELEN, J. A. C. OUDEMANS en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige Zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1°. J. BOSSCHA, Secretaris van de Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen te Haarlem, 23 Juni 1889; 2°. J. TIDEMAN, Secretaris van het koninklijk Instituut van Ingenieurs te 's Gravenhage, 22 Juni 1889; 3°. G. I. W. BREMER, Secretaris van het Bataafsch Genootschap der proefondervindelijke Wijsbegeerte te Rotterdam, 5 Juni 1889; 4°. L. VAN HASSELT, Secretaris van het provinciaal Genootschap van Kunsten en Wetenschappen te 's Hertogenbosch, 24 Juni 1889; 5°. de Gedeputeerde Staten van Friesland te Leeuwar-

den, 23 Mei 1889; 6^{0}. C. WINKLER, Secretaris van de Vereeniging tot bevordering der geneeskundige Wetenschappen te Batavia, 10 April 1889; 7^{0}. J. BATTY TUKE, Secretaris van het College of Physicians te Edinburg, 27 Mei 1889; 8^{0}. I. W. HOLCOMBE, Secretaris van het Bureau of Education te Washington, 1889; 9^{0}. S. P. LANGLEY, Secretaris van de Smithsonian Institution te Washington, 18 Mei 1889; 10^{0} J. C. PILLING, Secretaris van de U. S. geological Survey te Washington, 22 Mei 1889; 11^{0}. H. PAUL, Bibliothecaris van het U. S. naval Observatory te Washington, 22 Mei 1889; 12^{0}. M. DEWEY, Secretaris van de University of the State of New-York te Albany, 24 Mei 1889; 13^{0}. H. PHILLIPS JR., Secretaris van de American philosophical Society te Philadelphia, 23 Mei 1889; 14^{0}. TH. L. MONTGOMERY, Bibliothecaris van het Wagner free Institute of Science te Philadelphia, 25 Mei 1889; 15^{0}. E. C. PICKERING, Directeur van Harvard College Observatory te Cambridge, 25 Mei 1889; 16^{0}. den Secretaris van het Canadian Institute te Toronto, 25 Mei 1889; 17^{0}. W. SCHLESSEGRELL, Secretaris van de Elliot Society of Science and Art te Charleston, 28 Mei 1889; 18^{0}. CH. B.. HILL, Directeur van het Lick Observatory te Mount Hamilton, 30 Mei 1889; 19^{0}. G. VAMBACH, Bibliothecaris van de Academy of Science te St. Louis, 15 Juni 1889; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1^{0}. het Ministerie van Buitenlandsche Zaken te 's Gravenhage, 31 Mei, 5 Juni 1889; 2^{0}. I. F. SCHNEIDER, Bibliothecaris van de polytechnische School te Delft, 5 Juni 1889; 3^{0}. C. L. VAN DEN BURG, Laag-Soeren, 4 Jnni 1889; 4^{0}. E. LAMBRECHT, Secretaris van de Ecole spéciale des langues orientales vivantes te Parijs, 1 Juni 1889; 5^{0}. C. ALFIRI, Secretaris van het R. Istituto di Studi superiori te Florence, 3 Mei 1889; 6^{0}. den Secretaris van de Naturforscher-Gesellschaft te Dorpat, Maart 1889; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behooren:

1^{0}. Kennisgevingen van de Heeren van de Sande Bakhuyzen, van Diesen, Schols en Zeeman, dat zij verhinderd zijn de Vergadering bij te wonen.

2^{0}. Missive van Z. E. den Minister v. Binnenl. Zaken (23 Juni 1889) ter begeleiding van een Kon. Besluit van 23 Juni 1889, N^{0}. 21, waarbij wordt goedgekeurd, dat artikel 5 van het Reglement der Koninklijke Akakemie van Wetenschappen worde aangevuld met de volgende alinea:

> »Aan gewone Leden der Akademie, die zich in het buitenland vestigen, wordt de titel verleend van correspondeerend Lid".

3^{0}. Brief van Mevr. de Wed. Donders—Hubrecht, ter begeleiding van het photographisch portret van haar overleden echtgenoot, wijlen den Hoogleeraar Donders, Oud-Voorzitter der Akademie. Het geschenk wordt met erkentelijkheid aanvaard. Aan de geefster zal de dank der Afdeeling worden overgebracht.

— De Heer Franchimont vermeldt eerst, als vervolg op zijne mededeeling van 26 Mei 1888, dat hij sedert, met de hulp van den Heer Klobbie, door de werking van ammoniak op de nitroderivaten der monalkylurethanen, verscheidene zure nitraminen, waarvan het vroeger vermelde aethyleendinitramine het eerste voorbeeld was, verkregen heeft, die reeds in het *Recueil des travaux chimiques des Pays-Bas* beschreven zijn, terwijl later door den Heer Dekkers het tetramethyleendinitramine en door den Heer Simon Thomas propyl- en isopropylnitramine zijn bereid.

De ontleding der zure nitraminen door koken met verdund zwavelzuur was bij het pentamethyleendinitramine in het begin van dit jaar nagegaan en had tot de ontdekking van het pentamethyleenglycol, zijn oxyde, zijn bromide en een onverzadigden alcohol geleid; de publicatie was echter verschoven totdat de Heer Dekkers dezelfde ontleding bij het tetramethyleenderivaat zou hebben nagegaan, toen voor weinige dagen eene mededeeling verscheen van den Heer Gustavson uit Moskau, die het genoemde glycol en zijn

bromide langs een anderen weg heeft verkregen. In hoofdzaak stemmen de eigenschappen er van met die welke spreker gevonden heeft, overeen.

Tot zijn eigenlijk onderwerp overgaande, toont spreker aan hoe de werking van salpeterzuur op waterstofverbindingen, waarin de waterstof hetzij aan koolstof, hetzij aan stikstof gebonden is, meestal bestaat in de vorming van water en de vervanging der waterstof door de nitrogroep: dus in nitreering. Maar in beide gevallen wordt de waterstof hiertoe eerst in staat gesteld door den invloed van andere atoomgroepen of elementen, en wel van die, welke men gewoonlijk negatieve noemt. Toch kan, door de aanwezigheid van te veel of te sterke negatieve groepen, de reactie weer belet worden. Salpeterzuur werkt b.v. niet op methaan, azijnzuur, sulfonazijnzuur en cyaanazijnzuur, wel op malonzuur en zijne monalkylderivaten. Dat deze werking in nitreering bestaat, is bewezen door samengestelde aethers dezer zuren te gebruiken, die nitroderivaten geleverd hebben; de nitromalonzure aethers zijn vrij sterke zuren, die carbonaten ontleden en met ammoniak fraai kristalliseerende verbindingen geven, zonder in amiden over te gaan.

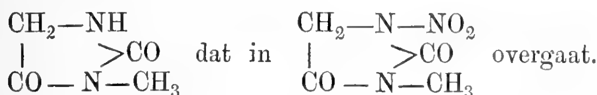
Ammoniak noch aliphatische aminen, ook niet de inwendige, zooals piperidine, werken op salpeterzuur; zij worden hiertoe echter in staat gesteld b.v. door de aanwezigheid der groep CO, want alle amiden, zelfs de inwendige, zooals die van γ- en δ-normaal amidovaleriaanzuur, werken er op. Bij aanwezigheid eener CO groep schijnt het onverschillig te zijn waar deze verder aan gebonden is; maar zijn er twee aan de stikstof gehecht, dan kan hetgeen verder aan hen gebonden is oorzaak worden dat de reactie belet wordt. In de volgende lijstjes zijn de formules van eenige lichamen onder elkaar geplaatst, ten einde de overeenkomst en het verschil in samenstelling en den invloed, door de verschillende atoomgroepen teweeggebracht, duidelijk te doen uitkomen.

	A.	B.	C.
1	$CH_3.NH.H$	$CH_3.CO.NH.H$	$CH_3O.CO.NH.H$
2	$CH_3.NH.CH_3$	$CH_3.CO.NH.CH_3$	$CH_3O.CO.NH.CH_3$
3	$CH_3.NH.CO.CH_3$	$CH_3.CO.NH.CO.CH_3$	$CH_3O.CO.NH.CO.CH_3$
4	$CH_3.NH.CO.OCH_3$	$CH_3.CO.NH.CO.OCH_3$	$CH_3O.CO.NH.CO.OCH_3$

Van de lichamen in A voorgesteld worden alleen 3 en 4 door salpeterzuur aangegrepen; 3 geeft een onbestendig, 4 een bestendig nitroderivaat. De lichamen in B voorgesteld geven allen onbestendige nitroderivaten. De gemakkelijkheid waarmede deze zich vormen en die waarmede zij ontleed worden, neemt af van 1 tot 4. Van de lichamen in C voorgesteld, geven 1 en 3 een onbestendig nitroderivaat, 1 't gemakkelijkst; 2 geeft een bestendig nitroderivaat en 4 wordt in 't geheel niet aangetast. Het blijkt dat de groep $CO.CH_3$ altijd verwijderd wordt, $CO.OCH_3$ daarentegen niet; twee groepen $CO.CH_3$ heffen de werking niet op, twee $CO.OCH_3$ wel, een $CO.CH_3$ en een $CO.OCH_3$ niet. Hetzelfde effekt dat door twee zuurstofatomen teweeggebracht wordt, wordt ook bereikt door het wegnemen van twee waterstofatomen en de vorming van een gesloten ring van atomen.



De vroeger medegedeelde en door talrijke voorbeelden gestaafde regel, dat de groep NH, geplaatst in een atomenring tusschen twee groepen CO, door salpeterzuur niet aangegrepen wordt, maar wel als zij tusschen CO en eene koolwaterstofrest staat, is door nieuwe voorbeelden bevestigd; onder anderen door methylhydantoïne



Ook de werking van salpeterzuur op dimethylaminederivaten is voortgezet. Het volgende lijstje geeft de formules, analoog aan die uit het voorgaande

1	$(CH_3)_2.N.H$
2	$(CH_3)_2.N.CH_3$
3	$(CH_3)_2.N.CO.CH_3$
4	$(CH_3)_2.N.CO.OCH_3$

Ook hier worden 1 en 2 niet aangegrepen; 3 geeft onder verlies der groep $CO.CH_3$ nitrodimethylamine, terwijl 4 eene groep CH_3 onder oxydatie verliest en tegen NO_2 ruilt.

Dit laatste feit gaf aanleiding analoge derivaten van een inwendig secundair amine te onderzoeken; waartoe voorloopig alleen het piperidine in aanmerking kon komen. Het volgende lijstje geeft de formules aan:

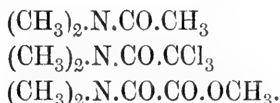
1	$(CH_2)_5.N.H$
2	$(CH_2)_5.N.CH_3$
3	$(CH_2)_5.N.CO.CH_3$
4	$(CH_2)_5.N.CO.OCH_3$
5	$(CH_2)_5.N.CO.NH_2$

Het eerste lichaam — het piperidine — wordt door salpeterzuur niet aangegrepen. Het tweede is nog niet onderzocht. Het derde geeft langzaam, onder verlies van de groep $CO.CH_3$, nitropiperidine, dat door het salpeterzuur verder ontleed wordt. Het vierde werkt zeer heftig, zelfs beneden 0^0; toch wordt de groep $CO.OCH_3$ niet uitgestooten, maar er ontstaat een nitroderivaat onder gelijktijdige oxydatie. Het product is dat, hetwelk 7 jaren geleden door Schotten langs anderen weg is verkregen en nitrodehydropiperylurethaan genaamd. Schotten gelooft dat de nitrogroep zich aan de koolstof bevindt en de piperidinekern dus nog gesloten is, terwijl uit de analogie met de hier behandelde verbindingen zou moeten volgen, dat de kern geopend is en de nitrogroep zich aan de stikstof bevindt. Daar echter alle tot nog toe onderzochte nitro-urethanen gemakkelijk door ammoniak, onder vorming van een nitramine en een urethaan, ontleed worden, en dit lichaam het niet doet, blijft de vraag onopgelost.

Het vijfde lichaam eindelijk — het piperylureum — geeft met salpeterzuur koolzuurgas, ammoniak en nitropiperidine. Het is dus vergelijkbaar met het asymmetrische dimethylureum. Het nitropiperidine wordt door salpeterzuur langzaam

aangegrepen, zoodat de invloed van de groep NO_2 geringer blijkt te zijn dan die van de groep carboxyl. Dit is ook bij koolstofverbindingen het geval, want, terwijl malonzuur genitreerd wordt, geschiedt dit niet bij nitro- en dinitromethaan.

De in de gegeven lijstjes vermelde voorbeelden zijn met tal van andere te vermeerderen, bijv. met de derivaten van trichloorazijnzuur en van oxaalzuur, waaruit de invloed van negatieve elementen of groepen aan een met de groep CO verbonden koolstofatoom blijkt. Bijv.:



$$(CH_3)_2.N.CO.CH_3$$
$$(CH_3)_2.N.CO.CCl_3$$
$$(CH_3)_2.N.CO.CO.OCH_3.$$

Het eerste verliest de groep $CO.CH_3$ en geeft nitrodimethylamine. Het tweede en het derde worden niet aangegrepen.

De invloed van andere met CO verbonden groepen, bijv. NH_2 enz., blijkt uit het gedrag der urea, terwijl de invloed van andere groepen dan CO, bijv. SO_2, uit het gedrag der sulfonzuren en sulfonamiden is af te leiden.

De Heer Franchimont biedt voor de boekerij der Akademie een exemplaar aan van de dissertatie van den Heer K. H. M. van der Zande, getiteld: *Over eenige asymmetrische dialkylurea en het di-isopropylamine.* Van belang is vooral de werking der dialkylurea op aldehyden en azijnzuuranhydride en de bereiding van het di-isopropylamine, omdat de door Jahn in de wetenschap gebrachte dwaling, als zou het di-isopropylamine niet door werking van isopropyljodide op amine te bereiden zijn, volkomen weerlegd is, terwijl tevens een nieuw voorbeeld van bestendigheid der nitrieten van aminen is geleverd in dat van het di-isopropylamine: eene eigenschap, welke het normale dipropylamine mist.

— De Heer Pekelharing spreekt over het te gronde gaan van miltvuurbacillen in het onderhuids-bindweefsel bij konijnen.

Metschnikoff toonde aan dat miltvuurbacillen, bij kikvorschen onder de huid gebracht, weldra door leucocyten

worden opgenomen. Niet alleen sterven deze dieren dan niet aan miltvuur, maar zelfs is na eenige dagen geen miltvuurvirus meer in het lichaam der geïnfecteerde kikvorschen te vinden. Worden daarentegen konijnen of andere, voor miltvuur vatbare dieren met deze bacillen ingeënt, dan vermeerderen de bacillen zich in sterke mate, terwijl zij, na den dood van het dier niet, of slechts in zeer geringen getale in cellen ingesloten gevonden worden.

Tegen het besluit, uit deze en tal van later medegedeelde bevindingen door hem getrokken, dat nl. de strijd van het dierlijk organisme tegen daarin binnengedrongen bacteriën door cellen, phagocyten, gevoerd wordt, zijn van verschillende zijden bezwaren geopperd. Zoo — om slechts een van de gewichtigste te noemen — zagen Emmerich en Mattei dat bij konijnen, die immuniteit verkregen hadden tegen de bacillen der varkensziekte, groote hoeveelheden van deze bacillen, onder de huid ingespoten, binnen kort (na 25 minuten) te gronde gingen, terwijl toch slechts zeer weinige daarvan door phagocyten opgenomen werden.

Ook bij de vernieling van miltvuurbacillen onder de huid van den kikvorsch, werd door verschillende onderzoekers opgemerkt dat de bacillen, ofschoon van virulentie beroofd, toch niet alle in cellen ingesloten gevonden worden. Om na te gaan of de bacillen door de phagocyten of door een opgeloste, voor deze organismen vergiftige stof gedood werden, maakten Metschnikoff en evenzoo Petruschky gebruik van dialysators, waarin de bacillen ingesloten werden voordat zij onder de huid werden gebracht. Deze proefnemingen echter leidden niet tot geheel duidelijke resultaten; aangezien meestal ook leucocyten den dialysator binnendringen.

Ook spreker is het in een reeks van proeven, door hem met den Heer C. M. Snellen ingesteld, niet gelukt een dialysator te vervaardigen, waardoor leucocyten buitengesloten werden. Even goed als door de fijnste spleten van de dierlijke weefsels, kunnen de leucocyten zich een weg banen door de poriën van de membranen, die als dialysatorwanden dienst kunnen doen.

Om het bezwaar langs een anderen weg te ontgaan, wer-

den nu miltvuurbacillen, in dialysators ingesloten, onder de huid gebracht bij konijnen. Hier kon vernieling van miltvuurbacillen bezwaarlijk aan de werking van phagocyten worden toegeschreven. Wel is waar zijn leucocyten van konijnen in staat levende miltvuurbacillen in zich op te nemen (wanneer een druppel lymphe, ontnomen aan het in ontsteking gebrachte oor van een konijn, met levende miltvuurbacillen vermengd, bij een temperatuur van ± 35^0 C. onder het mikroskoop wordt waargenomen, ziet men dat nu en dan een leucocyt een bacillus aantast en in zich opneemt), maar daaruit blijkt slechts dat er strijd wordt gevoerd — niet aan welke zijde de overwinning is. Dat de leucocyten van het konijn althans veel zwakker zijn in den strijd tegen de miltvuurbacillen dan die van den kikvorsch, is duidelijk. Wanneer een leucocyt van den kikvorsch zich in de nabijheid van een bacillus bevindt, kan men, indien ten minste de temperatuur niet te veel van 15^0 C. afwijkt, er bijna vast op rekenen, dat de cel langzaam maar zeker de bacterie zal naderen, haar in zich op zal nemen, en, is het staafje te lang om geheel opgenomen te worden, zich als een spoel zal uitstrekken, zoodat ten minste een zoo groot mogelijk deel van den bacillus door het lichaam van den phagocyt omsloten wordt. Eenmaal aangetast, wordt de prooi niet losgelaten. Leucocyten van het konijn daarentegen kan men niet zelden, langen tijd achtereen, in de onmiddellijke nabijheid van den miltvuurbacillus zien liggen, zonder dat de aanval beproefd wordt. Heeft de cel, dikwijls na lang dralen, zich om een draad van grootere lengte heengelegd, dan neemt zij betrekkelijk zelden den spoelvorm aan, maar behoudt den vorm van een min of meer onregelmatigen bol, die stil blijft liggen of langzaam langs den draad voortkruipt. Herhaaldelijk ook wordt een eenmaal aangetaste bacillus weer losgelaten.

Neemt men hierbij in aanmerking dat miltvuurbacillen, bij een konijn in de circulatie gebracht, zich zeer sterk vermeerderen, het dier dooden en slechts bij groote uitzondering in leucocyten opgenomen gevonden worden, terwijl er toch in het bloed, in allerlei organen, en bepaaldelijk in de

milt, een groot aantal cellen, die als phagocyten kunnen werken, voorhanden is, dan mag men wel met zeer groote waarschijnlijkheid aannemen, dat de leucocyten van het konijn niet tegen miltvuurbacillen bestand zijn.

Toch worden miltvuurbacillen, in een dialysator opgesloten onder de huid van een konijn gebracht, vernield.

De proeven werden op de volgende wijze genomen. In een platte schaal werden op een laag vleeschwater-pepton-agar-agar miltvuurbacillen gekweekt. Van de met bacillen bedekte gelei werden stukjes ingepakt in onmiddellijk te voren uitgekookt perkamentpapier. De pakjes, met gesteriliseerde draden dichtgebonden, werden bij konijnen onder de huid van den rug geschoven. De huidwond werd daarna zorgvuldig gehecht. Ter controle werd bij een konijn een stukje van dezelfde gelei, niet ingepakt, onder de huid gebracht. Terwijl nu het controledier binnen enkele dagen aan miltvuur bezweek, bleven de andere konijnen in leven. Waren de bacillen vrij van sporen, dan kon na 8 of 9 dagen het pakje onder de huid weggehaald, geopend en bij hetzelfde dier, of bij een ander konijn, of bij een Cavia cobaya onder de huid gebracht worden, zonder miltvuur-infectie teweeg te brengen. Maar ook sporen van miltvuurbacillen worden, onder de huid van het konijn, wanneer zij door inpakken in perkamentpapier slechts verhinderd worden in de circulatie te komen, gedood. Naar het schijnt is daarvoor wat meer tijd — 14 à 20 dagen — noodig.

Bij het mikroskopisch onderzoek bleken de pakjes telkens een aantal leucocyten te bevatten, maar de bacillen zoowel als de sporen waren, zoo niet alle, dan toch voor de overgroote meerderheid vrij gebleven. Soms waren andere bacteriën, micrococcen of staafjes, de pakjes binnengedrongen. Maar in andere gevallen was dit niet zoo, en was er ook in den omtrek der pakjes geen spoor van ettering te bemerken, terwijl toch de bacillen hun virulentie verloren hadden.

Men is dus, naar het spr. voorkomt, wel gedwongen aan te nemen, dat in het voedingsvocht van het onderhuids-bindweefsel bij konijnen een stof voorkomt, die in staat is milt-

vuurbacillen en zelfs miltvuursporen te dooden. Daarmede wordt de beteekenis van METSCHNIKOFF's phagocyten-leer geenszins ontkend. De hier vermelde resultaten geven enkel een bijdrage tot de meening, volgens welke de in het lichaam gedrongen miltvuurbacillen niet *uitsluitend* in cellen opgenomen behoeven te worden om te gronde te gaan.

Geheel in overeenstemming hiermede zijn de uitkomsten van de onderzoekingen, door NUTTALL en in den allerlaatsten tijd door BUCHNER medegedeeld, waaruit bleek dat in het bloed, en wel bepaaldelijk, zooals BUCHNER aantoonde, in het bloedserum van konijnen en honden, stoffen voorkomen, die op verschillende bacteriën, en in het bijzonder ook op miltvuurbacillen, een vergiftigende werking oefenen.

Eene vraag van den Heer KOSTER aangaande den toestand der bacillen na den afloop der proef, en van den Heer STOKVIS over het nemen van eene nader door hem aangeduide contrôle-proef, worden door den spreker beantwoord.

— De Heer DE VRIES spreekt over den klemdraai bij de wilde Kaardebollen (*Dipsacus sylvestris*). In tegenstelling met de heerschende meening, die de gevallen van klemdraai, door ALEXANDER BRAUN *Zwangsdrehung* genoemd, beschouwt als toevallige monstrositeiten, acht de spreker zich gerechtigd, dit verschijnsel voor eene erfelijke variatie te houden. En wel op grond van eene kultuurproef, door hem in 1885 begonnen. Op een bed met *Dipsacus sylvestris,* op het physiologisch terrein van den Hortus Botanicus te Amsterdam, werden in dat jaar twee gedraaide exemplaren gezien. Vóór deze bloeiden, werden alle overige planten derzelfde soort vernietigd. Het zaad van deze beide individuën werd in 1886 gezaaid, doch daar de plant tweejarig is, kon eerst in 1887 worden gezien, of de afwijking in enkele individuën was teruggekeerd. Dit was, op omstreeks 1650 planten, het geval in twee, en nu werden wederom alleen deze twee als zaaddragers uitgekozen; de overige werden vóór den bloeitijd weggesneden. Beide gedraaide individuën droegen rijkelijk zaad. In 1888 werd slechts van één van hen het zaad uitgezaaid. In 1889 bleek, dat onder ruim 1500 exemplaren

er 67 waren, wier hoofdstengel het verschijnsel van den klemdraai, en wel meest in zeer hoogen graad, vertoonde.

Hieruit valt dus af te leiden, dat de klemdraai erfelijk is en, evenals andere variatiën, door cultuurkeus kan worden gefixeerd. Het voornemen bestaat, in deze richting nog verder voort te gaan.

Tevens was door deze cultuur een zoo rijk materiaal voor het morphologisch en physiologisch onderzoek van het verschijnsel gewonnen, als nog nooit iemand in handen had gehad. Het gelukte daarmede de hypothetische verklaring, vóór omstreeks 40 jaren door Braun gegeven, in alle afzonderlijke punten, aan waarneming en experimenten te toetsen. De uitkomst was, dat deze verklaring volkomen juist bleek te zijn. Het microscopisch onderzoek van den groeitop van groeiende exemplaren toonde duidelijk, dat de bladstand, gewoonlijk bij deze soort een kruisgewijze, in de gedraaide planten een spiraalsgewijze is. En evenzeer, dat de bladbases in de richting dier spiraal samenhangen. Daarmede zijn de, anders afgescheiden tusschenschotten in den hollen stengel hier tot een inwendige schroeflijn vereenigd. Deze lijn is de klem, die de internodiën, bij hunnen groei, dwingt zich te draaien. Want snijdt men deze lijn tusschen de bladeren, vlak vóór dien groei, door, zoo gelukt het, het draaien ten minste hier en daar, te voorkomen. Men krijgt dan rechte internodiën in den overigens gedraaiden stengel.

De Heer Suringar, die meent dat de verklaring van het verschijnsel meer nog bij den stengel dan bij de bladeren gezocht moet worden, wordt door den spreker beantwoord.

— De Heer van Bemmelen deelde het volgende mede betreffende een onderzoek, door Dr. Bakhuis Roozeboom in het Scheikundig Laboratorium der Universiteit te Leiden verricht.

De Heer R. was aan het einde van zijn onderzoek omtrent het gedrag van zouten tegenover water tot deze slotsom gekomen: dat in het algemeen de oplosbaarheid voorgesteld kan worden door eene reeks van kromme lijnen voor de verschillende hydraten, ten laatste voor het anhydrische zout, welks oplossingslijn tot aan zijn smeltpunt kan voortgezet

worden; tenzij dan dat te voren het water ontledend gaat werken, of wel dat dit smeltpunt boven de kritische temperatuur van water ligt, waarbij een afwijkend gedrag mogelijk wordt.

Er is evenwel nog eene andere omstandigheid, die het normale beloop der oplosbaarheid storen kan, namelijk het ontstaan van eene nieuwe vloeistoflaag, veroorzaakt door het niet mengbaar zijn van het zout en het water in alle verhoudingen. De Heer Roozeboom heeft hieromtrent eenige waarnemingen gedaan.

In 't algemeen is het ontstaan van eene tweede vloeistoflaag bij het vervolgen der oplosbaarheid van eene vaste stof geene onbekende zaak. Ongetwijfeld behoort hiertoe het zoogenaamde vervroegde smelten van vele stoffen onder water, wat onmogelijk anders zijn kan dan de vorming eener nieuwe oplossing van grootere concentratie dan de reeds aanwezige. Naarmate dit verschijnsel dichter bij het smeltpunt plaats vindt, zal de gevormde laag minder water bevatten.

Alexejew heeft dit verschijnsel voor 't eerst bestudeerd bij de oplossingen van phenol en van benzoëzuur in water. Bij eene zekere temperatuur treedt als tweede vloeistoflaag eene zeer sterke oplossing dezer stoffen op. Beneden die temperatuur kan de vaste stof naast de 1ste oplossing; boven die temperatuur kan, hetzij de vaste stof naast de 2de bestaan (mogelijkerwijs tot aan haar smeltpunt), òf wel de beide vloeistoflagen nevens elkaar tot aan hun mengpunt.

Genoemde temperatuur duidt, in de voorstelling der druklijnen voor de verschillende systemen, een quadrupelpunt aan.

Soortgelijke gevallen zouden zich nu ook bij zouten kunnen voordoen. Bij sommige zouten der hoogere vetzuren zijn zelfs gevallen van afscheiding als olieachtige laag bekend, gewoonlijk echter in tegenwoordigheid van vreemde stoffen. Van andere zouten dier reeks, welke bij laag smeltpunt geringe oplosbaarheid vertoonen, onderzocht de Heer R. er twee: heptylzuurlood en nonylzuurcadmium, welwillend door Prof. Franchimont ter zijner beschikking ge-

steld. In de nabijheid van hun smeltpunt veranderen zij ook onder water. Er vormen zich echter geene nieuwe vloeistoflagen, maar taaie massa's wier verder onderzoek onmogelijk is. Zulks geschiedt ook bij het appelzuur lood: een zout, waarvan de zoogenaamde smeltbaarheid onder water sinds lang opgegeven werd. Ongetwijfeld scheiden zich in al deze gevallen basische zouten af.

Onder de meer oplosbare zouten onderzocht de Heer R. het ammoniumacetaat en het natriumsulfocarbonaat. Bij geen van beide werd laagvorming waargenomen, in weerwil dat zulks bij het tweede zout intreedt na toevoeging van alcohol tot de oplossing. Het eerste zout is bij zijn smeltpunt zelfs in alle verhoudingen met water mengbaar.

Een goed voorbeeld van de scheiding eener zoutoplossing in twee lagen vond de Heer R. eindelijk in een zout, door den Heer VAN ROMBURGH ontdekt, het kaliumzout van trinitrooxyphenylmethylnitramine $C_6H(NO_2)_3N{}^{CH_3}_{NO_2}OK$. Neutraliseert men eene oplossing van het zuur met K_2CO_3, dan scheidt zich, als de oplossing niet te slap is, eene zeer geconcentreerde laag af, die na eenigen tijd het vaste zout afzet. Beide vloeistoflagen kunnen bij eene reeks van temperaturen bestaan. Daar bij verhooging der temperatuur het watergehalte der onderlaag en het zoutgehalte der bovenlaag toenemen, worden hunne samenstellingen meer en meer aan elkander gelijk, en is bij $34^0.6$ hun mengpunt bereikt.

Evenwel zijn beide deze oplossingen labiel ten aanzien van het vaste zout, omdat zij beide geconcentreerder zijn dan de oplossing, die met het vaste zout in evenwicht bestaan kan. Daarom zetten zij, vooral de sterkere onderlaag, na korter of langer tijd, het zout af.

Bij het vervolgen der oplosbaarheid van het vaste zout, treedt daarom ook nimmer de tweede vloeistoflaag op, daar de verzadigde oplossingen daartoe te slap zijn. Wel verkrijgt men eene tweede laag, wanneer men de met het vaste zout bereide oplossingen min of meer beneden 35^0 afkoelt, omdat de uitscheiding van het vaste zout bij afkoeling zeer traag geschiedt.

Uit de sterkere oplossingen scheidt zich dan de bovenlaag, uit de slappere de onderlaag als tweede vloeistof uit. Het gedrag van dit zout stemt in alle opzichten overeen met dat van salicylzuur tegenover water, door Alexejew onderzocht.

Geen enkel voorbeeld van de vorming eener tweede vloeistoflaag naast het vaste zout aangetroffen zijnde, zocht de Heer R. bij de anorganische zouten.

Ook daarbij is de scheiding in twee lagen wel waargenomen bij toevoeging van vreemde stoffen, voornamelijk alcohol, tot de oplossing, doch nimmer bij de waterige oplossingen alleen. Het verschijnsel scheen het best te verwachten te zijn bij zouten met lage smeltpunten. Hierbij dient afzonderlijk gelet op anhydrische en op hydratische zouten.

Het aantal anhydrische zouten met laag smeltpunt is zeer gering. Voor de meesten ligt het zelfs boven de kritische temperatuur van water. Voor de anderen schijnt de regel te zijn, dat de oplosbaarheid in water regelmatig stijgt totdat ze bij het smeltpunt oneindig wordt. Was dit voor kort slechts bekend van het KNO_3, onlangs werd dit door Etard ook bevestigd gevonden bij $NaNO_3$, $AgNO_3$ en $KClO_3$. De Heer R. vond dit zelfde gedrag ook bij NH_4NO_3, NH_4HSO_4, $KHSO_4$ en $HgBr_2$, smeltende bij 165°, 160°, 200° en 230°. Ook het $AlBr_3$ is bij zijn smeltpunt (95°) met water mengbaar, doch hierbij vormt zich, door toevoeging van meer water, een vast hydraat.

Onder de weinig oplosbare zouten met niet al te hoog smeltpunt behoort het HgI_2 (smelt p. 250°). Wegens de zeer geringe oplosbaarheid neemt echter de druk van den waterdamp bij hooge temperatuur zoozeer toe, dat het nimmer gelukte het smeltpunt te bereiken en alzoo waar te nemen of in deszelfs nabijheid zich het vaste zout tot eene tweede vloeistoflaag van groote concentratie omzette.

Als men het $AsBr_3$ tot de zouten wil rekenen, kan dit echter als voorbeeld dienen voor het gezochte verschijnsel. Beneden 24° lost dit tamelijk in water op. Bij deze temperatuur smelt het onder de oplossing en vormt eene tweede vloeistoflaag die een weinig water bevat. Beide vloeistoflagen kunnen boven 24° tot zeer hooge temperatuur nevens elkan-

der bestaan (bij 200° zijn ze nog niet gemengd); het $AsBr_3$ kan met de tweede vloeistoflaag bestaan van 24° tot zijn smeltpunt 27°,5.

Toch is ook dit verschijnsel niet geheel eenvoudig, want er heeft gedeeltelijke ontleding plaats onder afscheiding van eenig As_2O_3.

Onder de zouthydraten zijn er genoeg, die een laag smeltpunt bezitten; doch bij geene daarvan is laagvorming uit de oplossing waargenomen. Regel bij dezelve schijnt te zijn: òf dat hunne oplosbaarheid regelmatig stijgt tot aan hun smeltpunt, òf dat beneden die temperatuur zich eene waterarmere laag, niet in vloeibaren, maar in vasten toestand afscheidt.

— De Commissie voor de geologische kaart van Nederland brengt, bij monde van den Heer van Bemmelen, het voorstel ter tafel, dat de Afdeeling zich wende tot Z. E. den Minister van Binnenlandsche Zaken om er op te wijzen, dat van Gouvernementswege velerlei werken ondernomen worden, die tot het opdoen van kennis omtrent den aard van onzen bodem zouden kunnen strekken, zoo zij slechts in de tegenwoordigheid van deskundigen werden uitgevoerd, doch die, juist omdat deze daar ter plaatse gemist worden, voorbijgaan zonder dat iemand er kennis van neemt. De Commissie zou daarom wenschen, dat de Afdeeling in kennis mocht worden gesteld met al wat op het maken van insnijdingen, van grondboringen enz. betrekking had, en dat de Minister dan een jaarlijksch crediet van *f* 500 toestond, waaruit bijv. de reis- en verblijfkosten bestreden zouden kunnen worden van personen, die namens de Commissie met het geologisch onderzoek belast werden, en verder enkele uitgaven, noodig om een voorzichtig transport van gevonden voorwerpen en het op geschikte wijze bewaren daarvan mogelijk te maken.

Na eenige discussie, waaruit bleek, dat de bedoeling was, de subsidie aan te vragen voor de jaren, die nog verloopen zullen alvorens de uitgave der nieuwe geologische kaart bezorgd zal zijn, wordt besloten, den Minister, uit naam der Afdeeling, met de door de Commissie geuite wenschen bekend te maken.

— Daar er verder niets te verhandelen is, wordt de Vergadering gesloten.

VOORSTEL

VAN DE

COMMISSIE VOOR DE GEOLOGISCHE KAART VAN NEDERLAND.



Op de buitengewone Vergadering van deze Afdeeling der Akademie, gehouden op den 25sten Mei 1889, werd door den Heer Martin het voorstel gedaan, zich tot den Minister van Binnenlandsche zaken te wenden, ten einde:

1°. den Minister opmerkzaam te maken op de omstandigheid, dat in de laatste jaren allerlei werken van Regeeringswege zijn of worden uitgevoerd, zonder dat daarvan nut wordt getrokken voor de vermeerdering onzer kennis van de geologische gesteldheid van Nederland, daarbij den Minister herinnerende aan het antwoord, dat de Afdeeling in haar schrijven van den 20sten Juni 1887 op eene destijds door den Minister gedane vraag betreffende de geologische kaart van Nederland heeft gegeven;

2°. den Minister te verzoeken, op de hoogte te worden gehouden van werkzaamheden, die op last der Regeering worden verricht en welke voor de verzameling van gegevens voor de Geologie van Nederland van belang kunnen wezen, zijnde: grootere uitgravingen bij den aanleg van kanalen van spoorwegen, benevens boringen;

3°. te mogen ontvangen een crediet van jaarlijks *f* 500, ten einde van de onder 2 vermelde werkzaamheden de noodige vruchten te kunnen plukken.

Nadat door den Secretaris der Afdeeling het denkbeeld was geopperd, deze zaak op een gewone Vergadering nader te behandelen, en na eenige gedachtenwisseling met den

Heer Van Diesen, verklaarde de Heer Martin zich bereid, genoemde voorstellen in de eerstvolgende gewone Vergadering te herhalen en verder toetelichten, of wel zulks aan de Commissie voor de geologische kaart te verzoeken.

De Voorzitter stelde voor, den laatstgenoemden weg inteslaan.

Gevolg gevende aan deze door de Afdeeling gegeven opdracht, heeft de Commissie de eer het voorstel nader toetelichten.

Zooals reeds vroeger door de Commissie werd opgemerkt, is het voor de beoordeeling der geologische gesteldheid van Nederland van het allerhoogste belang, goede profielen te verkrijgen, die de vertikale opeenvolging der lagen aantoonen. Dergelijke profielen zijn in het aan stroomende beken zoo arme en over het algemeen zoo vlakke Nederland door de natuur zelden gegeven, doch kunnen bij grootere kunstmatige insnijdingen van den bodem dikwijls zeer gemakkelijk verkregen en door putboringen, met zekeren graad van nauwkeurigheid, gereconstrueerd worden. Een enkele kunstmatige ontsluiting van den bodem kan mogelijk meer inlichtingen over de geognotische gesteldheid van het land geven, dan een jaren lang voortgezet onderzoek, hetgeen zich tot de oppervlakte moet bepalen. Het is echter duidelijk, dat men de kunstmatige insnijdingen intijds moet bestudeeren en zoo mogelijk gedurende den arbeid, dien de ingenieurs verrichten, herhaaldelijk moet bezoeken, teneinde daaruit werkelijk nut voor de geologie te kunnen trekken. Later toch worden die insnijdingen in den regel kunstmatig door zoden of steenen bedekt, of wel door een natuurlijken plantengroei aan het oog onttrokken, zoodat de profielen niet meer samengesteld kunnen worden. Daarom is het noodig, tijdig van alle groote uit- of afgravingen te worden verwittigd.

Bij putboringen bestaan wel is waar de vermelde gevaren niet, maar ook hier is een tijdige kennisgeving hoogst wenschelijk, teneinde met betrokken ingenieurs wegens het verzamelen van boormonsters in overleg te treden, hetgeen wel is waar volgens een algemeen schema kan geschieden, maar toch voor enkele gevallen in bijzonderheden dient overlegd te worden. Dat putboringen van grootere diepte uitkomsten kunnen

geven, die door gravingen niet te verkrijgen zijn, spreekt van zelf, maar ook boringen van kleinere diepte kunnen, behoorlijk verzameld, de uitgestrektere insnijdingen van den bodem tot zekere hoogte vervangen.

Het behoeft nauwelijks gezegd te worden, dat het opnemen van profielen en het verzamelen van de daarin waargenomen gronden en gesteenten — zullen zij voor geologische studiën van dienst zijn — alleen door een geoloog kunnen geschieden en dat dergelijke werkzaamheden bij wijlen veel tijd en een verblijf ter plaatse zullen vereischen, terwijl het ook bij putboringen noodig is, dat een geoloog nauwkeurig kennis neme van het terrein, waarop die boringen plaats hebben.

Om die reden wordt een crediet van jaarlijks *f* 500 gevraagd, ter voorziening in de reis- en verblijfkosten en andere kleine onkosten voor de persoon, die zich in elk bizonder geval met de opneming zoude willen belasten. De bedoeling daarbij is, de werkzaamheden naar vrije keuze door geologen, zoowel buiten als binnen de Akademie van Wetenschappen, te doen verrichten, zonder dat daarbij geldelijke voordeelen worden genoten. Mogelijk, dat niet elk jaar van het gevraagde crediet gebruik wordt gemaakt.

De te verzamelen voorwerpen, afkomstig uit bedoelde insnijdingen en putboringen, moeten door den verzamelaar aan eene reeds bestaande geologische Rijksverzameling worden afgeleverd, en met zoodanige aanteekeningen voorzien, als voor de wetenschappelijke bewerking noodig zal wezen. De verzamelaar heeft natuurlijk in de eerste plaats het recht om de door hem verkregen uitkomsten te publiceeren; mogt hij evenwel van dit recht, na afloop van een nader te bepalen tijdstip, geen gebruik hebben gemaakt, dan zouden de bijeengebrachte verzamelingen en aanteekeningen ook voor wetenschappelijke onderzoekingen, door anderen ingesteld, dienst mogen doen.

Mocht het gevraagde crediet tijdelijk niet voor de boven omschreven doeleinden gebruikt worden, dan zou het ook kunnen dienen tot het bijeenbrengen van geognostische verzamelingen en gegevens, die zonder insnijdingen of boringen aan de oppervlakte van het land kunnen verkregen worden en voor welk onderzoek de omstandigheden juist bizonder

gunstig zijn, terwijl het verzamelde op dezelfde wijze kan bewaard en bewerkt worden als het materiaal, langs den eerst vermelden weg verkregen.

De Commissie vertrouwt, dat op deze wijze, zonder al te groote onkosten, belangrijke gegevens omtrent den geognostischen bouw van Nederland kunnen verkregen worden; gegevens, die wel is waar niet rechtstreeks tot de vervaardiging van de geologische kaart voeren, maar toch de vervaardiging daarvan later zeer zullen vergemakkelijken en bekorten, en die, ook geheel afgescheiden van eene kaart, de wetenschappelijke kennis der geologie van Nederland in hooge mate moeten bevorderen.

De Commissie meent ook met nadruk er op te moeten wijzen, dat in de laatste jaren reeds materiaal tot onderzoek is verloren gegaan, en dat men, door geen gebruik te maken van kunstmatige insnijdingen en putboringen, zich aan groot verzuim zal schuldig maken, aangezien in dit geval gegevens ongebruikt verloren gaan, die naderhand òf in 't geheel niet meer, òf alleen met zeer groote onkosten te verkrijgen zullen zijn.

De Commissie wijst in het bizonder ook op de omstandigheid, dat reeds sedert geruimen tijd belangrijke insnijdingen en grondboringen plaats grijpen voor het nieuwe Merwedekanaal en voor de verlegging van den Maasmond, en welligt ook voor andere werken, zonder dat daarvan in bedoelden geest eenig nut voor de geologie van Nederland werd getrokken.

Mocht de Regeering het voorstel willen goedkeuren en aan de Akademie van Wetenschappen het gevraagde crediet toestaan, dan zal de wijze, waarop hiervan gebruik moet worden gemaakt, nog nader moeten worden omschreven dan boven in algemeene trekken is geschied. Het zal zaak zijn, eene *eenvoudige* wijze van beheer van het crediet in het leven te roepen, teneinde zonder veel omslag in elk bizonder zich voordoend geval te kunnen werken. Voor het oogenblik echter meent de Commissie hieromtrent nog in geen nadere bizonderheden te moeten treden.

Kan het boven ontworpen denkbeeld de instemming en

medewerking van Zijne Excell. den Minister van Binnenlandsche Zaken verwerven, dan zoude door den invloed van dit Ministerie ook de onmisbare hulp van de Ministers van Waterstaat en Oorlog kunnen worden verkregen. Het zal dan namelijk noodig zijn, dat de ingenieurs van den waterstaat en de officieren der genie uitgenoodigd worden, de Akademie te verwittigen van de tijdstippen, waarop het bezoek van een geoloog voor het verkrijgen van kennis van den bodem nuttig kan zijn. Vrijdom van briefport voor dit doel zoude daarbij tevens dienen verleend te worden voor de correspondentie tusschen den met het onderzoek te belasten geoloog en de leden van het corps van den waterstaat zoowel als de officieren van de genie. Ook daarvoor zoude de medewerking van den Minister van Waterstaat moeten worden ingeroepen.

BEHRENS, *Voorzitter.*
VAN DIESEN.
VAN RIEMSDIJK.
J. M. VAN BEMMELEN.
K. MARTIN.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 28 September 1889.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DER WAALS, Onder-Voorzitter, HUBRECHT, KORTEWEG, ENGELMANN, PEKELHARING, KAPTEYN, SURINGAR, FRANCHIMONT, HOEK, MAC GILLAVRY, HOFFMANN, KAMERLINGH ONNES, RIJKE, FORSTER, STOKVIS, ZAAIJER, BIERENS DE HAAN, ZEEMAN, RAUWENHOFF, MICHAËLIS, SCHOUTE, MOLL, LORENTZ, DE VRIES, BUYS BALLOT, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, GRINWIS, PLACE en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1°. G. F. WESTERMAN, Directeur van het koninklijk zoölogisch Genootschap Natura Artis Magistra te Amsterdam, 3 Augustus 1889; 2°. A. J. ENSCHEDE, Bibliothecaris van de Stads-Bibliotheek te Haarlem, 29 Juni 1889; 3°. G. C. W. BOHNENSIEG, Conservator aan Teyler's Stichting te Haarlem, 11, 27 Juli 1889; 4°. W. P. WOLTERS, Bibliothecaris van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden, 22 Augustus 1889; 5°. J. F. L. SCHNEIDER, Bibliothecaris van de polytechnische School te Delft, 2 Augustus 1889; 6°. G. J. W. BREMER, Secretaris van het Bataafsch Genootschap der proefondervindelijke Wijsbegeerte te Rotterdam, 20

Juli, 17 September 1889; 7°. Gedeputeerde Staten van Friesland te Leeuwarden, 8 Augustus 1889; 8°. F. Czermak, Secretaris van het naturforschende Verein te Brunn, Februari 1889; 9°. F. Krauss, Secretaris van het Verein für vaterländische Naturkunde te Stuttgart, 15 Mei 1889; 10°. G. Voss, Secretaris van de naturforschende Gesellschaft te Emden, 9 September 1889; 11°. den Secretaris van de Societá Italiana d'Antropologia te Florence, 1889; 12°. J. Biana, Bibliothecaris van de Academia Romana te Bucharest, 23 September 1889; 13°. W. Nenable, Secretaris van de Elisha Mitchell scientific Society te Chapel Hill, 14 September 1889; 14°. M. Perez, Directeur van het Observatorio central te Mexico, 25 Juni 1889; 15°. J, Thorburn, Bibliothecaris van de geological and natural History Survey te Sussex, 14 Augustus 1889; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1°. het Ministerie van Binnenlandsche Zaken te 'sGravenhage, 12 Juli, 12, 28 Augustus, 3, 20 September 1889; 2°. het Ministerie van Marine te 'sGravenhage, 20 Augustus 1889; 3°. J. Bosscha, Secretaris van de Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen te Haarlem, 10 Juni 1889; 4°. W. P. Wolters, Bibliothecaris van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden, 11 Juli 1889; 5°. M. F. A. G. Campbell, Bibliothecaris van de Koninklijke Bibliotheek te 'sGravenhage, 6 September 1889; 6°. den Directeur van het koninklijk Nederlandsch meteorologisch Instituut te Utrecht, 21 Augustus 1889; 7°. het Ministère de l'Intérieur de Belgique te Brussel, 10 September 1889; 8°. F. Nicholson, Bibliothecaris van de literary and philosophical Society te Manchester, 1889; 9°. E. P. Wright, Secretaris van de royal Irish Academy te Dublin, 1889; 10°. Siegel, Secretaris van de kais. Akademie der Wissenschaften te Weenen, 20 Maart 1889; 11°. Mommsen, Secretaris van de preuss. Akademie der Wissenschaften te Berlijn, Juli 1889; 12°. von Bezold, Directeur van het kön. preuss. meteorologisches Institut te Berlijn, 1889; 13°. For-

STEMANN, Archivaris van de kön. sächsische Gesellschaft der Wissenschaften te Leipzig, 20 Februari 1889; 14°. A. PEUCKERT, Secretaris van het Verein für Erdkunde te Dresden, 1889; 15°. den Secretaris van het historische Verein für Unterfranken und Aschaffenburg te Würzburg, 1 October 1888; 16°. N. VAN HERVEKE, Secretaris van het Institut Luxembourgeois, section historique, te Luxemburg, 1889; 17°. H. WILD, Directeur van het Observatoire physique central te St. Petersburg, 20 Januari 1889; 18°. den Directeur van het Musée public te Moscou, 18 Augustus 1889; 19°. F. JEPPE te Pretoria, Maart 1889; 20°. J. C. PILLING, Directeur van de U. S. geological Survey te Washington, 2 Februari 1889; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behooren:

1°. Brieven van verontschuldiging over het niet bijwonen van de Vergadering van de Heeren VAN DE SANDE BAKHUYZEN, SCHOLS, VAN DIESEN, J. A. C. OUDEMANS en A. C. OUDEMANS JR.

2°. Een schrijven van den Hoogleeraar FÜRBRINGER te Jena, waarin dank wordt gezegd voor den hem aangeboden titel van correspondeerend Lid.

3°. Een schrijven van den Heer Dr. FLEISCHMANN, privaatdocent in de zoölogie aan de Universiteit te Erlangen, de mededeeling behelzend, dat de Hoogleeraar E. SELENKA aldaar, wien mede, als oud-lid der Akademie, het correspondeerend lidmaatschap werd opgedragen, zich buitenslands bevindt en dus voorloopig op de hem te beurt gevallen onderscheiding niet kan antwoorden.

4°. Een brief van den Heer Dr. JAN DE VRIES, leeraar aan de H. B. S. te Kampen, ter begeleiding van eene verhandeling »Over eene groep van regelmatige vlakke configuraties en eenige daarmede samenhangende vlakke configuraties van punten en krommen". Tot rapporteurs over dien arbeid worden benoemd de Heeren BIERENS DE HAAN en VAN DEN BERG.

— De Heeren Bierens de Haan en van den Berg brengen een gunstig rapport uit over de door den Heer Dr. Jan de Vries in Mei jl. aangeboden verhandeling. Hunne conclusie om haar te bestemmen voor de Verslagen en Mededeelingen wordt aangenomen.

— De Heer Suringar levert eene nieuwe bijdrage tot de kennis der Melocacti van Aruba en deelt mede, wat over de ontwikkeling dier planten uit zaad en haar verderen groei door hem werd waargenomen. Hij geeft verder een overzicht van de wijze, waarop de Melocacti, op grond hunner natuurlijke verwantschap, gerangschikt zouden kunnen worden en sluit met philogenetische beschouwingen en het teekenen van een stamboom der soorten, zooals hij zich dien, op dit oogenblik, voorstelt. De waarnemingen werden, behalve aan de door hem zelven medegebrachte voorwerpen, ook gedaan aan andere, hem door de Heeren pastoors van Koolwijk en van Baars toegezonden. De verhandeling wordt aangeboden voor de Verslagen en Mededeelingen.

— De Heer Schoute spreekt »over viervlakken, door gelijkvormige driehoeken begrensd'' en licht zijne voordracht door kartonnen voorwerpen toe. Zijne mededeeling zal in de Verslagen en Mededeelingen worden opgenomen. Een paar vragen, door den Heer Grinwis gedaan, worden door den spreker beantwoord.

— Daar het den 19^{den} December twee jaar geleden zal zijn, dat de notarieele acte gepasseerd werd, waarbij het zoogenoemde Buitenzorgfonds werd gesticht, acht de Voorzitter den tijd gekomen om — in overeenstemming met de voorwaarde, waarop, om de twee jaar, uit 's Lands kas eene subsidie voor de uitzending van een botanicus naar het station te Buitenzorg beschikbaar zal worden gesteld — de Hoogleeraren in de Botanie aan de drie Rijks-Universiteiten uit te noodigen, in de October-vergadering der Afdeeling eene aanbeveling in te dienen van hem, wien zij die zending wenschen te zien opgedragen. De Heeren Suringar

en Rauwenhoff, ter Vergadering tegenwoordig, nemen op zich, zich met den Heer de Boer, Hoogleeraar te Groningen, in verbinding te stellen om zich van de hun gedane opdracht te kwijten.

— De Heer Engelmann biedt voor de Verslagen en Mededeelingen aan een opstel van Dr. Hamburger te Utrecht: »Over de permeabiliteit der roode bloedlichaampjes in verband met de isotonische coëfficiënten''. Op verzoek van den Voorzitter, zullen de Heeren Engelmann en de Vries daarover rapporteeren in de October-vergadering.

— De Heer Pekelharing biedt voor de 4^{0} werken der Akademie eene verhandeling aan van Dr. Hagen te Deli, thans te Hamburg: »Ueber Körpergrösse und Wachsthumsverhältnisse der Süd-Chinesen''. Aan de Heeren Zaaijer en Pekelharing wordt opgedragen daarover rapport uit te brengen.

— De Heer Kamerlingh Onnes biedt, uit naam van Mevr. de Wed. Mees-Gockenga te Groningen, het photographisch portret aan van wijlen haren echtgenoot Dr. R. A. Mees, lid der Akademie. Het geschenk wordt met erkentelijkheid aanvaard en den Secretaris opgedragen Mevr. de Wed. Mees daarvoor den dank der Afdeeling over te brengen.

— De Heer Stokvis biedt voor de boekerij der Akademie de dissertatie aan van Dr. J. de Bruyn: »Bijdrage tot de leer der geelzucht, met het oog op de vergiftige werking der bilirubine'' en licht kortelijk de uitkomsten toe, door den schrijver van het proefschrift verkregen.

De Heer C. A. J. A. Oudemans biedt aan voor de Boekerij zijne: Treizième Contribution à la Flore mycologique des Pays-Bas.

— Daar er verder niets te verhandelen is, sluit de Voorzitter de Vergadering.

VERSLAG

OVER DE

VERHANDELING VAN Dr. **JAN DE VRIES,**

GETITELD:

OVER VLAKKE CONFIGURATIES, WAARIN ELK PUNT MET TWEE LIJNEN INCIDENT IS.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN EN **F. J. VAN DEN BERG.**



De verhandeling van Dr. J. DE VRIES »over vlakke configuraties, waarin elk punt met twee lijnen incident is'', waarvan de Afdeeling ons de beoordeeling heeft opgedragen, begint met eenige algemeene opmerkingen.

De vlakke configuratiën, waarin elk punt twee lijnen draagt, kunnen in twee groepen verdeeld worden,

$((2i+1)n_2,\ 2n_{2i+1})$, met een even aantal lijnen

$(in_2,\ n_{2i})$ met een willekeurig aantal lijnen.

Zij kunnen uit volledige veelzijden worden afgeleid; want voegt men aan deze conf. de punten toe, waarin elke lijn gesneden wordt door de van haar gescheiden lijnen, dan ontstaan er nieuwe conf.

$(n(m-1)_2,\ 2n_{m-1})$ of $(\frac{1}{2}n(n-1)_2,\ n_{n-1})$,

d. i. eene volledige $2n$-zijde, of eene volledige n-zijde.

Hare lijnen met de toegevoegde punten vormen evenzeer eene conf.

$$((m-2\,i-2)\,n_2,\;\; 2\,n_{2n-2i-2})$$

of

$$(\tfrac{1}{2}\,n\,(n-1-2\,i)_2,\;\; n_{n-1-2i}).$$

Twee conf., die elkander tot eene volledige veelzijde aanvullen, heeten elkanders *complementen*. Het complement van de conf. $(n\,(2\,n-2)_2,\; 2\,n_{2n-2})$ is een groep van n gescheiden punten; en nu wordt de hoofd-n-hoek der volledige $2n$-zijde aangegeven door de n verbindingen

$$12,\; 34,\; 56, \ldots (2\,n-1)\,2\,n,$$

of snijpunten telkens van twee gescheiden lijnen uit de door 1 tot $2\,n$ aan te duiden lijnen der conf.

Voor de conf. $(\frac{1}{2}\,n\,(n-3)_2,\; n_{n-3})$ is het complement de conf. n_2, d. i. een n-hoek, of het zamenstel van eenige veelhoeken, die te zamen n zijden bezitten; en dit laatste kan op onderscheidene wijzen plaats grijpen. Daaruit volgt de stelling.

Het aantal verschillende conf. $(\frac{1}{2}\,n(n-3)_2,\; n_{n-3})$ is eene eenheid meer dan het aantal mogelijke wijzen van verdeeling van n eenheden in groepen, die op zijn minst drie eenheden bevatten.

Thans beschouwt schrijver in het bijzonder § 2—7 de conf. $(3\,n_2,\; 2\,n_3)$ en § 8, 10 de conf. $(2\,n_2,\; n_4)$.

Voor de eerste conf. is het eenvoudigste geval de vierzijde voor $n=2$. Voor $n=3$ geeft zij de zeszijde; het complement is of een zeshoek, of het zamenstel van twee driehoeken. Het eerste geval geeft de conf. $(9_2, 6_3)\,B$, waarvoor tabel 2; het tweede geeft $(9_2, 6_3)\,A$, waarvoor tabel 1. Zij komen in eene vroegere verhandeling van den schrijver (*Versl. en Mededeel.*, Dl. V, blz. 118) voor als de restfiguren van elke lijn der conf. $(12_4,\; 16_3)\,B$ en $(12_4,\; 16_3)\,A$.

De conf. $(9_2, 6_3)\,B$ bezit zes trigonische en drie atrigonische punten: zij bestaat uit twee driehoeken, waarvan de zijden elkander in drie conf. punten snijden; zijn die drie punten collineair, en is er dus een driepuntige diagonaal, dan maakt de conf. deel uit van de 10_3 van DESARGUES.

De conf. $(9_2, 6_3)\,A$ is atrigonisch; elk harer lijnen behoort tot zes vierhoeken; elk harer punten tot vier vierhoeken.

Nu leert schrijver de verschillende conf. $(3\,(n-1)_2,\ 2(n-1)_3)$ zoo vervormen, dat zij alle conf. $(3\,n_2,\ 2\,n_3)$ opleveren, die of minstens één punt bevatten, dat niet incident is met éene zijde van één conf. driehoek [de atrigonische vervorming α], of die minstens één conf. driehoek bevatten [de trigonische vervorming τ]; of evenzoo de conf. $(3\,(n-2)_2),\ 2\,(n-2)_3)$ zoo, dat zij alle conf. $(3\,n_2,\ 2\,n_3)$ geven, die minstens één ditrigonisch punt bevatten [de ditrigonische vervorming δ]. Hierbij blijkt, dat éene dezer vervormingen nog doorgaat, wanneer één der punten van de vervorming of reeds in de conf. voorhanden is, of dat de lijnen, waardoor dit punt gevormd moet worden, identisch zijn

Wanneer men de vervorming α op de conf. $(9_2, 6_3)\,A$ en langs onderscheidene manieren op de conf. $(9_2, 6_3)\,B$ toepast, de vervorming δ eenmaal op eene vierzijde en nog de vervorming eenmaal op de conf. $(9_2, 6_3)\,B$, verkrijgt men slechts vijf onderscheidene conf. $(12_2,\ 8_3)$. Deze verschillen daarin, dat zij al of niet atrigonische, trigonische, ditrigonische, tetragonische, ditetragonische, pentagonische, dipentagonische, tetrapentagonische en tetrahexagonische punten bevatten; en evenzeer trigonische, ditrigonische, tetragonische, ditetragonische, tritetragonische en dipentagonische lijnen.

Deze vijf verschillende conf. $(12_2,\ 8_3)$ noemt schrijver A, B, C, D, E; zij worden voorgesteld door de tabellen 5, 3, 8, 6 en 7; deze bevatten respective 3, 5, 8, 6, 15 koppels, zooals schrijver moest bepalen, vóór dat hij ze verder konde vervormen, en nu ontstaan door de vervormingen α en τ de volgende 18 onderscheidene conf. $(15_2,\ 10_3)$, en wel met:

soorten van punten.	soorten van lijnen.	met de tabel.	uit de conf. $(12_2, 8_3)$.
1	1	13	*B*
2	1	9	*A*
2	1	14	*B*
2	2	15	*C*
3	3	24	*E*
4	2	27	*E*
4	3	11	*A*
4	3	21	*C*
4	4	23	*E*
5	3	25	*E*
5	3	26	*C*
5	4	17	*C*
6	3	12	*A*
6	3	18	*C*
6	4	19	*C*
7	5	22	*D*
8	6	16	*C*
8	6	20	*C*

In § 8, 10 gaat schrijver over tot de tweede soort van conf., namelijk $(2\,n_2,\ n_4)$.

Het eenvoudigste geval is hier de vijfzijde voor $n = 5$: daarop volgt voor $n = 6$ de conf. $(12_2,\ 6_4)$, die uit de zeszijde af te leiden is. Nu komt er voor $n = 7$ de conf. $(14_2,\ 7_4)$, wier complement of een zevenhoek is, of het zamenstel van één vierhoek en één driehoek; in het eerste geval heet de conf. $(14_2,\ 7_4)$ *A*, in het tweede $(14_2,\ 7_4)$ *B*.

Wat de conf. $(16_2,\ 8_4)$ voor $n = 8$ betreft, deze heeft tot complement twee conf. $(6_2,\ 4_3)$, of wel eene der vijf bovenvermelde conf. $(12_2,\ 8_3)$. Schrijver gaat het onderscheid na tusschen deze zes verschillende conf. $(16_2,\ 8_4)$ en geeft daarvoor de tabellen 31, 33, 32, 36, 34, 35.

Met de conf. $(18_2,\ 9_4)$ is het anders gesteld, daar haar complementen evenzeer den vorm $(18_2,\ 9_4)$ bezitten. Schrijver tracht nu een weg te vinden, om ze uit de conf. $(16_2,\ 8_4)$ af te leiden, en leidt als slotsom de volgende algemeene stelling af.

Alle conf. $(2\,n_2,\ n_4)$ kunnen bepaald worden, zoodra de verschillende conf. $((2\,n-2)_2,\ (n-1)_4)$ en conf. $((2\,n-10)_2,\ (n-5)_4)$ bekend zijn.

Ook het opnemen van dit opstel in uwe Verslagen en Mededeelingen raden wij gaarne aan.

Leiden en *Hilversum*,
September 1889.

D. BIERENS DE HAAN.
F. J. VAN DEN BERG.

OVER VLAKKE CONFIGURATIES,

WAARIN

ELK PUNT MET TWEE LIJNEN INCIDENT IS.

DOOR

JAN DE VRIES.



1. De vlakke cf., waarin elk punt twee lijnen draagt, kunnen in twee groepen gescheiden worden: de eerste groep omvat dan de cf.

$$((2\,i + 1)\,n_2, 2\,n_{2i+1}),$$

die alleen voor een even aantal lijnen kunnen bestaan, de tweede, waartoe alle cf.

$$(i\,n_2,\ n_{2\,i})$$

behooren, bevat cf. voor elk aantal lijnen. Tot deze tweede groep moeten blijkbaar alle niet volledige n-hoeken (n_2, n_2) gebracht worden.

De beide soorten van cf. hebben dit gemeen, dat zij uit volledige veelzijden kunnen afgeleid worden *); voegt men toch aan eenige cf. uit eene der genoemde groepen de punten toe, waarin elke cf. lijn gesneden wordt door de van

*) Wederkeerig kan eene vlakke cf., waarin elke lijn twee punten draagt, uit eenen volledigen veelhoek afgeleid worden.

haar gescheiden lijnen, dan ontstaat eene volledige $2n$-zijde

$$(n(2n-1)_2,\ 2n_{2n-1})$$

of eene volledige n-zijde

$$(\tfrac{1}{2}n(n-1)_2,\ n_{n-1}).$$

De lijnen der cf. vormen in beide gevallen met de toegevoegde punten een nieuwe cf., waarvan de eerste index 2 is, nl. eene cf. der tweede groep

$$((2n-2i-2)n_2,\ 2n_{2n-2i-2})$$

of eene

$$(\tfrac{1}{2}n(n-1-2i)_2,\ n_{n-1-2i}).$$

Twee cf., welke elkander tot eene volledige veelzijde aanvullen, zullen elkanders *complement* genoemd worden.

Voor eene

$$(n(2n-2)_2,\ 2n_{2n-2})$$

bestaat het complement uit eene groep van n onderling gescheiden punten; worden de lijnen dezer cf. door de getallen van 1 tot $2n$ aangeduid, en wel de n paren gescheiden lijnen door 1 en 2, door 3 en 4, algemeen door $(2i-1)$ en $2i$, en stelt de combinatie van twee dezer getallen het snijpunt voor van de lijnen, waartoe die getallen behooren, dan wordt de bedoelde *hoofd-n-hoek* der volledige $2n$-zijde door de n combinaties

$$12, 34, 56, \ldots (2i-1)2i, \ldots (2n-1)2n$$

aangewezen. Het is duidelijk, dat er voor elke waarde van n slechts *eene* cf. met de indices 2, $2n-2$ bestaat.

Het complement eener

$$(\tfrac{1}{2}n(n-3)_2,\ n_{n-3})$$

is eene n_2, dus òf een gewone n-hoek, òf het samenstel van eenige veelhoeken, die samen n zijden bezitten. Voor eene $(35_2,\ 10_7)$ is het complement b. v. een tienhoek, of het samenstel van een driehoek met een zevenhoek, van een

vierhoek met een zeshoek, van twee vijfhoeken, of eindelijk van twee driehoeken met een vierhoek; hieruit volgt, dat er vijf, in samenstelling verschillende, $(35_2, 10_7)$ zullen zijn.

Het aantal verschillende $(\frac{1}{2}n(n-3)_2, n_{n-3})$ *is een meer dan het aantal wijzen, waarop men n eenheden kan verdeelen in groepen, die minstens drie eenheden bevatten.*

Configuraties $(3n_2, 2n_3)$.

2. De eenvoudigste cf. met de indices 2, 3 is de vierzijde, waarvan de lijnen door 1, 2, 3, 4, de punten door 12, 13 14, 23, 24, 34 zullen voorgesteld worden.

Het complement eener door de lijnen 1, 2, 3, 4, 5, 6 gevormde $(9_2, 6_3)$ is òf een zeshoek met de toppen 12, 23, 34, 45, 56, 61 òf het samenstel van twee driehoeken 12, 23, 31 en 45, 56, 64. Het laatstgenoemde complement behoort tot de $(9_2, 6_3)$, welke ik elders door de letter *A* heb aangewezen; zij wordt voorgesteld door tabel 1),

Lijnen.	1	2	3	4	5	6	
	14	24	34	14	15	16	
Punten.	15	25	35	24	25	26	. . . (1).
	16	26	36	34	35	36	

welke uit de beide hoofddriezijden 1, 2, 3 en 4, 5, 6 bestaat, terwijl het eerstgenoemde complement aan de $(9_2, 6_3)$ *B* toekomt, welke door tabel 2) wordt voorgesteld;

Lijnen.	1	2	3	4	5	6	
	13	24	13	14	15	26	
Punten.	14	25	35	24	25	36	. . . (2).
	15	26	36	46	35	46	

deze cf. bezit geene hoofddriezijde. Deze beide $(9_2, 6_3)$ komen achtereenvolgens voor als restfiguren van elke lijn der

cf. $(12_4, 16_3)$ A en B, welke ik in mijn opstel »Over vlakke configuraties" (deel V, bl. 118 der Versl. en Meded.) heb beschouwd. Ook ontstaan zij, wanneer men van de desmische 9_3 of 9_3 A (Kantor) en de onregelmatige 9_3 of 9_3 B (Kantor) achtereenvolgens eene hoofddriezijde afzondert, hetgeen bij de desmische 9_3 op drie verschillende wijzen, bij de onregelmatige slechts op eene wijze mogelijk is.

De $(9_2, 6_3)$ A is atrigonisch; elk harer punten behoort tot vier vierhoeken, elke harer lijnen tot zes vierhoeken. Cf. B bestaat uit twee driehoeken 13, 35, 51 en 24, 46, 62 in zoodanige ligging, dat de zijden 1, 3, 5 van den eersten door de zijden 4, 6, 2 van den tweeden achtereenvolgens in de overige cf. punten 14, 36, 25 gesneden worden; zijn deze laatste drie punten collineair, bezit de cf. dus eene driepuntige diagonaal, dan maakt zij blijkbaar deel uit van eene 10_3 van Desargues. De $(9_2, 6_3)$ B bezit twee soorten van punten, n.l. zes trigonische en drie atrigonische; hare lijnen daarentegen zijn gelijkwaardig, omdat elke tot eenen der beide driehoeken behoort; zij bevat drie vierhoeken:

1364 met de toppen 13, 36, 64, 41;

2415 met de toppen 24, 41, 15, 52;

3526 met de toppen 35, 52, 26, 63.

Er zijn twee in samenstelling verschillende $(9_2, 6_3)$, *eene atrigonische met twee drietallen gescheiden lijnen en eene cf. met twee driehoeken.*

Vervorming eener $(3n_2, 2n_3)$.

3. Cf. A van tabel (1) ontstaat blijkbaar uit de vierzijde 1245, als men de tegenpunten 12 en 45 weglaat en de lijnen 3 en 6 met de punten 16, 26, 36, 34, 35 aan de figuur toevoegt. Bij deze vervorming worden de paren van verbonden lijnen 1, 2 en 4, 5 door twee gescheiden paren vervangen, waardoor het snijpunt der beide nieuwe lijnen een atrigonisch punt wordt.

Is $a\,b$ een atrigonisch punt der cf. $(3n_2, 2n_3)$, terwijl de lijn a door de onderling gescheiden lijnen c, d en de lijn b door de onderling gescheiden lijnen e, f in cf. punten gesneden wordt, dan ontstaat door de afzondering van de lijnen

a, b en de vijf punten $a\,b$, $a\,c$, $a\,d$, $b\,e$, $b\,f$ eene figuur, waarin de lijnen c, d, e, f elk een punt verloren hebben; voegt men nu de punten $c\,d$ en $e\,f$ aan haar toe, dan heeft men eene $(3\,(n-1)_2,\ 2\,(n-1)_3)$ verkregen, waarin de punten $c\,d$ en $e\,f$ onderling gescheiden zijn. De toepassing van de omgekeerde vervorming op alle paren van gescheiden punten der verschillende $(3\,(n-1)_2,\ 2\,(n-1)_3)$ levert dus stellig alle $(3\,n_2,\ 2\,n_3)$, welke minstens *een* punt bezitten, dat niet met eene zijde van een cf. driehoek incident is.

Zijn in de $(3\,n_2,\ 2\,n_3)$ met punt $a\,b$ de lijnen c en d verbonden, dan bevat de cf. den driehoek $a\,c\,d$ met toppen $a\,c$, $a\,d$ en $c\,d$. Gaan de lijnen c, d achtereenvolgens door de cf. punten $c\,g$, $d\,h$, dan ontstaat door afzondering van c en d eene figuur, waarin de lijn a nog slechts het punt $a\,b$ draagt, terwijl de lijnen g en h elk met twee cf. punten incident zijn; worden dus de punten $a\,g$ en $a\,h$ aan de figuur toegevoegd, dan liggen op elke der lijnen a, g, h weêr drie snijpunten en er is eene $(3\,(n-1)_2,\ 2\,(n-1)_3)$ gevormd. Door de omgekeerde bewerking toe te passen op alle lijnen der verschillende $(3\,(n-1)_2,\ 2\,(n-1)_3)$ verkrijgt men dus zeker alle $(3\,n_2,\ 2\,n_3)$, die minstens *een* cf. driehoek bezitten.

Zijn de zijden c en d van den cf. driehoek $a\,c\,d$ met de punten $c\,g$ en $d\,g$ incident, terwijl de lijn g nog het cf. punt $g\,i$ draagt, dan zal door afscheiding van de vier lijnen a, c, d, g met de zeven punten $a\,b$, $a\,c$, $a\,d$, $c\,g$, $d\,g$, $g\,i$, $c\,d$ eene figuur ontstaan, in welke de lijnen b en i elk slechts twee snijpunten bevatten; door toevoeging van het punt $b\,i$ verkrijgt men dan eene $(3\,(n-2)_2,\ 2\,(n-2)_3)$. Toepassing van de omgekeerde handelwijze op alle punten der verschillende $(3\,(n-2)_2,\ 2\,(n-2)_3)$ levert dus zeker alle $(3\,n_2,\ 2\,n_3)$, welke minstens *een* ditrigonisch punt, zooals $c\,d$, bezitten. Bevat de oorspronkelijke cf. reeds het punt $b\,i$, dan is de lijn e, welke b in het derde door haar gedragen cf. punt snijdt, van a en de derde met i verbonden lijn van g gescheiden, zoodat op $b\,i$ de eerst genoemde vervorming kan toegepast worden.

Zijn daarentegen b en i identiek, dan laat het derde punt $b\,f$ der lijn b stellig eene der drie genoemde vervormingen

toe: immers de met b verbonden lijnen a en g zijn gescheiden, terwijl de lijnen k en l, waarmede f nog verbonden is, òf gescheiden zijn, òf verbonden door het punt $k\,l$, dat slechts tot *eenen* cf. driehoek, nl. $k\,l\,f$, behoort, òf verbonden door $k\,l$ en door de lijn m; daar in het laatste geval de lijn m van b gescheiden is, kan dan de derde vervorming ten opzichte van het punt $b\,f$ geschieden.

Uit het voorgaande blijkt nu, dat de verschillende $(3\,n_2, 2\,n_3)$ door middel van drie vervormingen kunnen bepaald worden, zoodra men de overeenkomstige cf. met twee en vier lijnen minder kent.

De eerste vervorming vervangt de gescheiden punten $c\,d$ en $e\,f$ door de vijf punten $a\,b$, $a\,c$, $a\,d$, $b\,e$, $b\,f$; omdat $a\,b$ in de nieuwe cf. tot geen cf. driehoek behoort, noem ik deze handelwijze de *atrigonische vervorming* en duid haar aan door het teeken $\alpha\,(c\,d,\ e\,f)$. Het is duidelijk, dat men haar alleen behoeft toe te passen op puntenparen, welke verschillende plaatsing hebben ten opzichte van de overige elementen der oorspronkelijke cf.

Ondergaat de cf. lijn a met de punten $a\,b$, $a\,g$, $a\,h$ de tweede vervorming, welke ik de *trigonische* noem, en door het teeken $\tau\,(a)$ voorstel, dan verdwijnen de punten $a\,g$, $a\,h$, terwijl de punten $a\,c$, $a\,d$ hunne plaatsen op a, de punten $c\,g$, $d\,h$ hunne plaatsen op g resp. h innemen en de figuur tot eene cf. met indices 2, 3 voltooid wordt door het snijpunt $c\,d$ der nieuwe lijnen, dat, evenals de punten $a\,c$, $a\,d$ een trigonisch punt der nieuwe cf. is.

Voegt men ten slotte aan eene cf. met de indices 2, 3 vier nieuwe lijnen a, c, d, g met de vijf punten $a\,c$, $a\,d$, $c\,d$, $c\,g$, $d\,g$ toe, terwijl het cf. punt $b\,i$ op b door het punt $a\,b$, op i door het punt $g\,i$ wordt vervangen, dan ontstaat eene nieuwe cf. met het ditrigonische punt $c\,d$, dat tot de cf. driehoeken $a\,c\,d$ en $c\,d\,g$ behoort. Deze derde vervorming noem ik de *ditrigonische*, en duid haar aan door het teeken $\delta\,(b\,i)$.

CONFIGURATIES $(12_2, 8_3)$.

4. Daar twee gescheiden punten der $(9_2, 6_3)$ A steeds over-

staande toppen van eenen cf. vierhoek zijn, vindt men uit haar door atrigonische vervorming slechts eene $(12_2, 8_3)$. Door α (16, 34) verkrijgt men uit tabel (1):

Lijnen	1	2	3	4	5	6	7	8	
	14	24	35	14	15	26	17	38	
Punten	15	25	36	24	25	36	67	48	. . . (3)
	17	26	38	48	35	67	78	78	

In deze cf. komen twee soorten van punten voor: de punten 14, 25, 36, 78 behooren elk tot twee cf. vierhoeken, de overige acht elk tot eenen vierhoek. De vier *ditetragonische* punten vormen eenen hoofdvierhoek der cf.; na hunne afscheiding ontstaat de achthoek 15384267. De cf. kan op twee wijzen beschouwd worden als het samenstel van twee vierhoeken in zoodanige ligging, dat de paren overstaande zijden van den eenen vierhoek elk met een paar aangrenzende zijden van den anderen verbonden zijn. Deze beide stelsels van vierhoeken zijn 1425 met 3678 en 1487 met 2536. De lijnen der cf. zijn gelijksoortig, daar elke hunner in twee vierhoeken voorkomt.

Verwijdert men een der *monotetragonische* punten, b.v. 67 met de lijnen 6, 7 en de punten 26, 36; 17, 78 onder toevoeging van de punten 23 en 18, dan ontstaat de $(9_2, 6_3)$ B van tabel (4):

14	23	23	14	15	18	
15	24	35	24	25	38	. . . (4)
18	25	38	48	35	48	

Deze omkeering der atrigonische vervorming, waardoor het punt 78 verdwijnt, zal ik door het teeken $-\alpha$ (78) voorstellen. De cf. van tabel (3) ontstaat door α (18, 23) uit de cf. (4), dus door atrigonische vervorming ten opzichte van de trigonische punten 18, 23, die niet als tegenpunten in denzelfden vierhoek voorkomen.

De punten eener $(9_2, 6_3)\,B$ vormen vier verschillende soorten van *koppels* (gescheiden puntenparen).

1. Twee trigonische punten van denzelfden vierhoek.
2. Twee trigonische punten van verschillende vierhoeken.
3. Een trigonisch met een atrigonisch punt.
4. Twee atrigonische punten.

In de cf. van (2) worden deze vier gevallen achtereenvolgens vertegenwoordigd door de koppels 13, 46; 13, 26; 13, 25; 25, 36.

Door α (13, 46) ontstaat de cf.

1	2	3	4	5	6	7	8
14	24	35	14	15	26	17	48
15	25	36	24	25	36	37	68
17	26	37	48	35	68	78	78

. . . . . (5)

Alle punten dezer cf. zijn ditetragonisch, alle lijnen begrenzen drie vierhoeken. Zij bestaat uit twee hoofdvierzijden 1, 2, 3, 8 en 4, 5, 6, 7; hare zes vierhoeken vormen drie paren, waarin telkens twee tegenzijden van den eenen vierhoek verbonden zijn met twee tegenzijden van den anderen; door deze eigenschap kan zij gemakkelijk onderscheiden worden van de $(12_3, 8_3)$ van tabel (3). Zij komt voor als restfiguur van elke lijn der atrigonische 15_3 van Martinetti (*Ann. di Mat.*, Ser. II[a], tomo XIV); ook ontstaat zij uit de $(12_4, 16_3)\,A$ door afscheiding van twee hoofdvierzijden.

Uit α (13, 26) volgt natuurlijk weder eene $(12_2, 8_3)$, die met (3) gelijksoortig is.

Door α (13, 25) ontstaat:

1	2	3	4	5	6	7	8
14	24	35	14	15	26	17	28
15	26	36	24	35	36	37	58
17	28	37	46	58	46	78	78

. . . . . (6)

Deze (12_2, 8_3) bezit drie soorten van punten:

1. Drie trigonische 24, 26, 46.

2. Zes ditetragonische 15, 17, 35, 37, 58, 78.

3. Drie tetrapentagonische punten 14, 28, 36, d. w. z. punten, welke noch tot een cf. driehoek, noch tot een cf. vierhoek, maar tot vier cf. vijfhoeken behooren.

De punten der eerste en derde soort geven geen aanleiding tot eene ($-\alpha$), die der tweede soort leveren door eene ($-\alpha$) natuurlijk alle eene (9_2, 6_3) B.

De cf. bezit ook drie soorten van lijnen, n.l. drie trigonische, twee tritetragonische en drie ditetragonische lijnen. Wegens het bezit van eenen driehoek laat de cf. eene negatieve trigonische vervorming toe; verwijdert men de lijnen 4, 6 met de punten 24, 26, 46, 14, 36 onder toevoeging van de punten 12, 23, dan komt eene (9_2, 6_3) A met de beide hoofddriezijden 1, 3, 8 en 2, 5, 7 te voorschijn. Deze vervorming duidt ik aan door $-\tau$ (2).

Door α (25, 36) vindt men uit (2):

1	2	3	4	5	6	7	8	
13	24	13	14	15	26	27	38	
14	26	35	24	35	46	57	68	. . . . . (7)
15	27	38	46	57	68	78	78	

Deze cf. heeft vijf soorten van punten:

1. Vier trigonische, tevens pentagonische, punten 13, 15, 24, 46.

2. Twee trigonische, tevens tetragonische, punten 35, 26.

3. Een ditetragonisch punt 78.

4. Vier tetragonische punten 38, 68, 57, 27.

5. Een dipentagonisch punt 14.

Zij bezit drie soorten van lijnen, n.l.:

1. Twee trigonische, tevens dipentagonische, 1 en 4.

2. Vier trigonische, tevens tetragonische, 2, 6, 3, 5.

3. Twee ditetragonische lijnen, 7 en 8.

Daar de beide (9_2, 6_3) elk slechts eene soort van lijnen

bezitten, en de cf. van (6) door trigonische vervorming uit A ontstaat, zal de cf. van (7) door eene τ uit B kunnen afgeleid worden.

Eene vijfde $(12_2, 8_3)$ wordt gevonden door ditrigonische vervorming der vierzijde. Laat men toch uit de vierzijde 1234 het punt 34, uit de vierzijde 5678 het punt 78 weg, dan worden de acht lijnen door toevoeging van de beide punten 37 en 48 vereenigd tot de cf. van tabel (8).

1	2	3	4	5	6	7	8
12	12	13	14	56	56	37	48
13	23	23	24	57	67	57	58
14	24	37	48	58	68	67	68

. . . . . . (8)

Deze cf. heeft drie soorten van punten:
1. Twee ditrigonische 12, 56.
2. Acht monotrigonische 13, 14, 23, 24, 57, 58, 67, 68.
3. Twee tetrahexagonische 37, 48.

En twee soorten van lijnen:
1. Vier ditrigonische 1, 2, 5, 6.
2. Vier monotrigonische 3, 4, 7, 8.

Er zijn vijf in samenstelling verschillende $(12_2, 8_3)$.

Cf. $(12_2, 8_3)$.

Naam.	Soorten van lijnen.	Soorten van punten.	Tabel.
A	een	een	5
B	een	twee	3
C	twee	drie	8
D	drie	drie	6
E	drie	vijf	7

5. Om op deze vijf cf. de atrigonische vervorming te kunnen toepassen, moet men nagaan hoeveel soorten van

koppels elke hunner bezit. In het navolgende overzicht is achter elke soort een voorbeeld gevoegd, waaraan de tabellen (5), (3), (8), (6), (7) ten grondslag liggen.

Cf. *A*. *a*. Twee tegenpunten van een vierhoek 14, 78;

b. twee tegenpunten van een zeshoek 14, 36;

c. twee door twee zijden gescheiden toppen van een zeshoek 14, 68;

Cf. *B*. *d*. twee ditetragonische punten van denzelfden vierhoek 14, 25;

e. twee ditetragonische punten van verschillende vierhoeken 14, 36;

f. een ditetragonisch met een tetragonisch punt 14, 35;

g. twee tetragonische punten van één vierhoek 26, 35;

h. twee tetragonische punten van verschillende vierhoeken 35, 67;

Cf. *C*. *i*. twee ditrigonische punten 12, 56;

j. een ditrigonisch met een trigonisch punt 12, 58;

k. een ditrigonisch met een hexagonisch punt 12, 37;

l. twee trigonische punten, tevens tegenpunten van een vierhoek 13, 24;

m. twee trigonische punten, tevens door twee zijden gescheiden toppen van een zeshoek 14, 58;

n. twee trigonische punten, tevens tegenpunten van een zeshoek 14, 57;

o. een trigonisch met een hexagonisch punt 24, 37;

p. twee hexagonische punten 37, 48.

Cf. *D*. *q*. een trigonisch met een tetragonisch punt van denzelfden vijfhoek 24, 78;

r. een trigonisch met een tetragonisch punt, tevens tegenpunten van een zeshoek 24, 37;

s. een trigonisch met een pentagonisch punt 24, 36;

t. twee tetragonische punten 37, 58;

u. een tetragonisch met een pentagonisch punt 78, 36;

v. twee pentagonische punten 14, 28;

Cf. *E*. *w*. twee trigonische, tevens tetragonische punten 26, 35;

x. een trigonisch-tetragonisch met een trigonisch punt 26, 13;

ij. een trigonisch-tetragonisch met een ditetragonisch punt 26, 78;

z. een trigonisch-tetragonisch met een tetragonisch punt 26, 57;

α. een trigonisch-tetragonisch met een pentagonisch punt 26, 14;

β. twee trigonische punten van één vijfhoek 13, 46;

γ. twee trigonische punten van één zeshoek 13, 24;

δ. een trigonisch en een ditetragonisch punt 13, 78;

ε. een trigonisch en een tetragonisch punt van éénen vijfhoek 13, 68;

ζ. een trigonisch en een tetragonisch punt, die tegenpunten van een zeshoek zijn 13, 27;

η. een trigonisch en een tetragonisch punt van éénen zeshoek, welke door twee zijden gescheiden zijn 13, 57;

ϑ. een ditetragonisch met een pentagonisch punt 78, 14;

ι. twee tetragonische punten van éénen vierhoek 27, 68;

ϰ. twee tetragonische punten van éénen zeshoek 27, 38;

λ. een tetragonisch met een pentagonisch punt 57, 14.

Configuraties $(15_2, 10_3)$.

6. Door α (14, 78) vindt men uit (5), wanneer men de tiende lijn door 0 voorstelt,

15	24	35	24	15	26	17	48	19	07	
17	25	36	48	25	36	37	68	49	08	. (9)
19	26	37	49	35	68	07	08	09	09	

Deze $(15_2, 10_3)$ kan beschouwd worden als het samenstel van twee vijfhoeken 1 5 2 4 9 en 7 3 6 8 0, waarvan de toppen monotetragonisch zijn, terwijl de zijden van den eersten vijfhoek de zijden van den tweeden in de genoemde volgorde snijden in de vijf ditetragonische punten 17, 35, 26, 48, 09, die blijkbaar een hoofdvijfhoek vormen; alle cf. lijnen zijn gelijksoortig, daar elke hunner twee van de vijf cf. vierhoeken begrenst.

Door — α (15) ontstaat uit cf. (9)

23	23	24	26	37	48	49	07	
24	36	48	36	79	68	79	08	. . . (10)
26	37	49	68	07	08	09	09	

d. i. eene $(12_2, 8_3)$ E met de driehoeken 236, 790, waarin de nieuwe punten 23, 79 een koppel β vormen; cf. (9) kan dus door α (23, 79) uit (10) afgeleid worden. Daar zij slechts twee soorten van punten bezit, kan zij uit geene andere $(12_2, 8_3)$ gevonden worden dan uit cf. A of cf. E.

Uit (5) volgt door α (14, 36)

15	24	35	24	15	26	17	48	19	03	
17	25	37	48	25	68	37	68	49	06	. (11).
19	26	03	49	35	06	78	78	09	09	

Ook deze $(15_2, 10_3)$ bestaat uit twee vijfhoeken 1 9 4 8 7 en 5 2 6 0 3, zoodat de eerste, tweede, derde, vierde, vijfde zijde van den eersten vijfhoek in de punten 15, 09, 24, 68, 37 door de eerste, vierde, tweede, derde, vijfde zijde van den tweeden gesneden wordt.

De cf. kan ook beschouwd worden als het samenstel van twee vierhoeken 1537 en 4268, waarvan de zijden 1 en 4 met de lijn 9, de zijden 3 en 6 met de lijn 0 verbonden zijn, terwijl 2 en 5 door het punt 25, 7 en 8 door het punt 78 verbonden worden. Zij bezit 4 soorten van punten, nl. acht tetragonische punten (de toppen der genoemde vierhoeken), twee dipentagonische punten 25, 78, vier tetrapentagonische, op vierhoekszijden gelegen, punten 19, 49, 03, 06 en een tetrapentagonisch punt 09, dat niet met eene vierhoekszijde incident is. Deze cf. kan dus nog op drie wijzen door atrigonische vervorming gevonden worden.

Door — α (17) komt men op eene $(12_2, 8_3)$ B met koppel 38, 59, d. i. een monotetragonisch met een ditetragonisch punt, dus een koppel f; — α (78) geeft eene cf. E

met een koppel *w*, bestaande uit de punten 13, 46 ; — α (49) levert eene cf. *D* met een koppel 57, 40 van de soort *r*.

Met behulp van het koppel *c* der punten 14, 68 verkrijgt men uit (5)

15	24	35	24	15	26	17	48	19	06	
17	25	36	48	25	36	37	78	49	08	(12).
19	26	37	49	35	06	78	08	09	09	

Deze cf. $(15_2, 10_3)$ bestaat uit twee vierhoeken 1537 en 9480, zoodat de tegenzijden 9, 8 door de punten 19, 87 met de aangrenzende zijden 1,7 verbonden zijn, terwijl 5 en 4 door 2,0 en 3 door 6 in cf. punten gesneden worden, en de lijnen 2, 6 onderling verbonden zijn.

Hare punten zijn van zes verschillende soorten, nl. een ditetragonisch punt 35, vier tetragonisch-pentagonische punten 15, 25, 36, 37, twee tetragonisch-dipentagonisch-hexagonische punten 48, 90, twee tetragonisch-dipentagonisch-dihexagonische punten 17, 26, twee tetragonisch-tripentagonische punten 49, 80, vier tripentagonische punten 24, 19, 60, 78. Door — α (35) ontstaat eene $(12_2, 8_3)$ *B* met koppel *d* (12, 67); door — α (15) eene $(12_2, 8_3)$ *D* met koppel *q* (23, 79); door — α (17) eene $(12_2, 8_3)$ *B* met koppel *h* (38, 59); door — α (49) eveneens eene $(12_2, 8_3)$ *B* met koppel *h* (28, 01); door — α (19) eene $(12_2, 8_3)$ *E* met koppel *x* (40, 57).

Overgaande tot de atrigonische vervorming der $(12_2, 8_3)$ *B*, vindt men door koppel *d*, zooals zooeven is gebleken, eene cf., welke met de cf. van tabel (12) gelijksoortig is.

Door het koppel *e* der punten 14, 36 vindt men uit (3)

15	24	35	24	15	26	17	38	19	03	
17	25	38	48	25	67	67	48	49	06	.(13)
19	26	03	49	35	06	78	78	09	09	

Alle punten dezer cf. zijn dipentagonisch, alle lijnen tripentagonisch. De cf. kan op drie wijzen beschouwd worden als het samenstel van twee vijfhoeken, zoodat de 1ste, 2de,

3de, 4de, 5de zijde van den eenen vijfhoek verbonden is met de 1ste, 3de, 5de, 2de, 4de zijde des anderen; een dezer paren van vijfhoeken wordt gevormd door 19487 en 53062. Wegens de gelijkwaardigheid der punten kan de cf. uit geene andere $(12_2, 8_3)$ afgeleid worden.

Koppel *f* geeft, zooals boven bleek, eene met (11) gelijksoortige cf.; koppel *h* de cf. (12).

Het koppel *g* der punten 26, 35 levert uit (3)

14	24	36	14	15	36	17	38	29	03	
15	25	38	24	25	67	67	48	69	05	.(14)
17	29	03	48	05	69	78	78	09	09	

Deze cf. bezit, evenals de cf. van (9) vijf ditetragonische punten 14, 25, 36, 78, 09, welke eenen hoofdvijfhoek vormen, en tien monotetragonische punten; zij onderscheidt zich evenwel daardoor van gene, dat hare lijnen niet tot twee vijfhoeken kunnen gerangschikt worden; alle hare lijnen zijn ditetragonisch. Door $-\alpha$ (15) komt eene cf. *E* te voorschijn met het door 20 en 47 gevormde koppel γ.

Overgaande tot de atrigonische vervorming der $(12_2, 8_3)$ *C*, vindt men door koppel 12, 56 (*i*)

13	23	13	14	57	67	37	48	19	05	
14	24	23	24	58	68	57	58	29	06	.(15)
19	29	37	48	05	06	67	68	09	09	

Deze cf. bestaat uit de hoofdvijfzijden 1, 2, 7, 8, 0 en 3, 4, 5, 6, 9; hare punten zijn, met uitzondering van de atetragonische punten 37, 48, 09, ditetragonisch; van hare lijnen zijn 1, 2, 5, 6 tritetragonisch, de overige ditetragonisch. Door $-\alpha$ (68) verkrijgt men eene *D* met koppel *s* (07, 45).

Koppel *j* levert door α (12, 85)

13	23	13	14	56	56	37	48	19	05	
14	24	23	24	57	67	57	68	29	08	.(16)
19	29	37	48	05	68	67	08	09	09	

Hier vindt men het trigonisch-tetragonische punt 56, twee trigonische punten 57, 67, vier ditetragonisch-pentagonische punten 14, 24, 19, 29, twee ditetragonisch-hexagonische punten 13, 23, een tetragonisch-tripentagonisch punt 08, twee tetragonisch-pentagonische punten 05, 68, twee pentagonische punten 48, 09 en het hexagonische punt 37.

Eene negatieve atrigonische vervorming kan natuurlijk niet toegepast worden op de trigonische punten en de punten 37, 68, 05, welke op de zijden van driehoek 567 liggen. Door $-\alpha$ (14) ontstaat eene E met koppel 39, 28 (η); door $-\alpha$ (13) eene E met koppel 49, 27 (α); door $-\alpha$ (08) eene D met koppel 46, 59 (v).

Het door de punten 12, 37 gevormde koppel k, geeft aanleiding tot de cf.:

13	23	13	14	56	56	57	48	19	03	
14	24	23	24	57	67	67	58	29	07	.. (17)
19	29	03	48	58	68	07	68	09	09	

Hier zijn vijf soorten van punten: het ditrigonische punt 56, de vier trigonische punten 57, 58, 67, 68, de vier tritetragonische punten 13, 23, 19, 29, de vier ditetragonische punten 14, 24, 03, 09 en de twee tetrahexagonische punten 48, 07. De eerste vijf punten en de laatste twee komen voor eene $-\alpha$ niet in aanmerking, daar zij op driehoekszijden liggen; $-\alpha$ (19) levert eene C met koppel 20, 34 (l).

Omgekeerd zal dus de atrigonische vervorming der $(12_2, 8_3)C$ ten opzichte van eene koppel l eene met (17) gelijksoortige cf. opleveren.

Door α (14, 58 , dus een koppel m, ontstaat:

12	12	13	24	56	56	37	48	19	05	
13	23	23	48	57	67	57	68	49	08	..(18)
19	24	37	49	05	68	67	08	09	09	

Deze cf. bezit zes soorten van punten: twee trigonisch-tetragonische 12, 56, vier trigonische 13, 23, 57, 67, twee ditetragonische 49, 08, vier tetragonisch-pentagonische 19, 24, 68, 05, twee tetragonisch-hexagonische 48, 09, een tetrahexagonisch punt 37. Behalve de punten 48, 09, die gelijkwaardig zijn en dus beide door $-\alpha$ eene C leveren, komen alleen de ditetragonische punten voor negatieve vervorming in aanmerking; $-\alpha$ (08) geeft eene E met koppel 46, 59 (ι).

Koppel n geeft door toepassing van α (14, 57) op tabel (8):

12	12	13	24	56	56	37	48	19	05	
13	23	23	48	58	67	67	58	49	07	..(19)
19	24	37	49	05	68	07	68	09	09	

De nieuwe cf. heeft zes soorten van punten: twee trigonisch-tetragonische 12, 56, vier trigonisch-pentagonische 13, 23, 58, 68, vier tetragonisch-pentagonische 19, 24, 67, 05, twee tetragonisch-dipentagonische 49, 07, twee pentagonische 37, 48, een dipentagonisch punt 09. Uit $-\alpha$ (49) vindt men eene E met koppel 01, 28 (λ).

Door α (24, 37), dus met een koppel o, komt men uit (8) tot:

12	12	13	14	56	56	57	48	29	03	
13	23	23	48	57	67	67	58	49	07	..(20)
14	29	03	49	58	68	07	68	09	09	

Hier vindt men acht soorten van punten: het ditrigonische punt 56, vier trigonisch-tetragonisch-hexagonische punten 57, 58, 67, 68, twee trigonisch-tetragonisch-pentagonische 12, 23, een trigonisch-dipentagonisch punt 13, een ditetragonisch punt 29, twee tetragonisch-pentagonisch-hexagonische punten 49, 09, twee tetragonisch-dipentagonische punten 14, 03, twee hexagonische punten 48, 07. Deze cf. geeft geene aanleiding tot omgekeerde vervorming.

Het koppel p der punten 37, 48 levert door eene α de cf.:

12	12	13	14	56	56	57	58	39	04	
13	23	23	24	57	67	67	68	79	08	..(21)
14	24	39	04	58	68	79	08	09	09	

Zij bezit vier soorten van punten: twee ditrigonische 12, 56, vier dipentagonische 39, 79, 04, 08, een tetrapentagonisch punt 09, acht trigonisch-tetragonische punten; eene $-\alpha$ is voor geen der punten (buiten 09) mogelijk.

De cf., waarin $(12_2, 8_3)$ D door middel van de koppels q, r, s kan vervormd worden, zijn in den loop van dit onderzoek reeds voorgekomen; het koppel t der punten 37, 58 geeft door atrigonische vervorming:

14	24	35	14	15	26	17	28	39	05	
15	26	36	24	35	36	78	78	79	08	..(22)
17	28	39	46	05	46	79	08	09	09	

De cf. bezit drie trigonische punten 24, 26, 46, het ditetragonische punt 09, twee tetragonisch-pentagonische punten 39, 08, twee met eene zijde van driehoek 246 verbonden tetragonisch-dipentagonische punten 35, 78, twee tetragonisch-dipentagonische punten 79, 05, die niet met eene driehoekszijde verbonden zijn, drie pentagonische punten 14, 28, 36 en twee tripentagonische punten 15, 17; dus zeven soorten van punten. Nu geeft $-\alpha$ (39) eene E met koppel z (56, 07); $-\alpha$ (35) eene D met koppel u (01, 69); $-\alpha$ (05) eene E met koppel δ (13, 89); $-\alpha$ (15) eene E met koppel ζ (03, 47).

Door atrigonische vervorming der $(12_2, 8_3)$ D met behulp van koppel u ontstaat volgens de zooeven gemaakte opmerking eene met de cf. van tabel (22) gelijksoortige cf., terwijl door een koppel v de cf. van (16) gevonden wordt.

Van de koppels, waartoe $(12_2, 8_3)$ E aanleiding geeft,

blijven nu nog over te onderzoeken y, ε, ϑ, $\varkappa$, daar de overige reeds boven voorkwamen.

Het koppel y der punten 26, 78 levert door atrigonische vervorming:

13	24	13	14	15	46	27	38	29	07	
14	27	35	24	35	68	57	68	69	08	..(23)
15	29	38	46	57	69	07	08	09	09	

Vier soorten van punten komen in deze cf. voor: drie trigonische 13, 15, 35, drie ditetragonische 29, 69, 09, zes monotetragonische 24, 46, 68, 08, 27, 07 en drie dipentagonische 14, 38, 57. Door $-\alpha$ (27) ontstaat eene E met koppel ε (49, 05); de andere soorten van punten laten geene $-\alpha$ toe.

Koppel ϑ (14, 78) geeft:

13	24	13	24	15	26	27	38	19	07	
15	26	35	46	35	46	57	68	49	08	..(24)
19	27	38	49	57	68	07	08	09	09	

Hier vindt men drie soorten van punten: zes trigonische 13, 15, 35; 24, 26, 46, zes dipentagonische 19, 38, 57; 27, 49, 68 en drie tetrapentagonische 07, 08, 09.

Koppel $\varkappa$ geeft ten slotte door α (27, 38):

13	24	13	14	15	26	57	68	29	03	
14	26	35	24	35	46	78	78	79	08	..(25)
15	29	03	46	57	68	79	08	09	09	

Deze cf. bezit vijf soorten van punten: twee trigonisch-dipentagonische 35, 26, vier trigonisch-tetrahexagonische 13, 15, 24, 46, vier tetragonische 78, 79, 08, 09, vier dipentagonische 29, 68, 57, 03 en een dihexagonisch punt 14.

7. De cf. (12_2, 8_3) geven aanleiding tot tien trigonische vervormingen; van de tien verschillende (15_2, 10_3), welke hierdoor te voorschijn komen, zijn er reeds acht door atrigonische vervorming gevonden. Uit *A* vindt men n.l. de cf. van tabel (23), uit *B* de cf. van (22), uit eene driehoekszijde der *C* de cf. van (20), uit de drie soorten van lijnen der *D* de cf. van (16), (24) en (25), uit eene pentagonische driehoekszijde der *E* de cf. van (18), uit eene tetragonische driehoekszijde van *E* de cf. (19).

Door τ (4) ontstaat uit de (12_2, 8_3) *C* van (8) de cf.:

12	12	13	14	56	56	37	58	29	04	
13	23	23	49	57	67	57	68	49	08	..(26)
14	29	37	04	58	68	67	08	09	09	

Deze cf. bezit een ditrigonisch punt 56, zes trigonisch-tetragonische punten 67, 68, 58, 57, 12, 49, vier trigonisch-hexagonische punten 13, 23, 04, 09, twee tetragonische punten 14, 29, twee heptagonische punten 37, 08; daar de beide laatste met driehoekszijden incident zijn, kunnen zij, zooals te verwachten was, niet voor eene $-\alpha$ in aanmerking komen. Er zijn voorts twee ditrigonische lijnen 5, 6, zes trigonisch-tetragonische 1, 2, 4, 9, 7, 8 en twee trigonisch-hexagonische 3, 0, dus drie soorten van lijnen tegen vijf soorten van punten.

Ten slotte verkrijgt men door τ (7) uit de cf. *E* van tabel (7) de cf.:

13	24	13	14	15	26	78	38	29	05	
14	26	35	24	35	46	79	68	79	07	..(27)
15	29	38	46	05	68	07	78	09	09	

Hier vindt men zes trigonisch-pentagonische punten 13, 35, 26, 46, 79, 07, drie trigonisch-hexagonische punten 15, 24, 09, drie pentagonische punten 14, 29, 05 en drie dipentagonische punten 38, 68, 78, dus vier soorten; verder negen trigonische lijnen en de pentagonische lijn 8, dus

twee soorten van lijnen. Van elken der drie driehoeken der cf. is eene zijde met de pentagonische lijn verbonden, terwijl de beide overige elk eene zijde van een der beide andere driehoeken in cf. punten snijden.

Wordt de ditrigonische vervorming toegepast op eenig punt der $(9_2, 6_3)$ A, zoo ontstaat de cf. van tabel (17); uit $(9_2, 6_3)$ B vindt men door dezelfde vervorming de cf. van (20) en (26).

De gevonden achttien $(15_2, 10_3)$ zijn in de volgende tabel vereenigd. Daarbij werden twee cf. lijnen als gelijksoortig beschouwd, wanneer de drie punten der eene lijn achtereenvolgens gelijksoortig bleken te zijn met de drie punten der andere.

Cf. $(15_2, 10_3)$.

Naam.	Soorten van lijnen.	Soorten van punten.	Tabel.
A	een	een	13
B	een	twee	9
C	een	twee	14
D	twee	twee	15
E	twee	vier	27
F	drie	drie	24
G	drie	vier	11
H	drie	vier	21
I	drie	vijf	25
J	drie	vijf	26
K	drie	zes	12
L	drie	zes	18
M	vier	vier	23
N	vier	vijf	17
O	vier	zes	19
P	vijf	zeven	22
Q	zes	acht	16
R	zes	acht	20

Er zijn achttien in samenstelling verschillende cf. $(15_2, 10_3)$.

CONFIGURATIES $(2\,n_2,\ n_4)$.

8. De eenvoudigste cf. met indices 2, 4 is de vijfzijde met de lijnen 1, 2, 3, 4, 5 en de tien punten $i\,k$ ($i = 1$ tot 5, $k = 2$ tot 5).

Wordt uit de zeszijde met de lijnen 1, 2, 3, 4, 5, 6 een drietal onderling gescheiden punten afgezonderd, dan vindt men de cf. $(12_2,\ 6_4)$; met behulp van den hoofddriehoek 12, 34, 56 verkrijgt men zoodoende de volgende tabel:

13	23	13	14	15	16	
14	24	23	24	25	26	
15	25	35	45	35	36	. . (28)
16	26	36	46	45	46	

Terwijl elk punt der zeszijde tetratrigonisch is, zijn alle punten der $(12_2,\ 6_4)$ ditrigonisch; immers door het weglaten der drie gescheiden punten verliest elke cf. lijn een punt, dus twee driehoeken, omdat de beide op twee verbonden lijnen gelegen punten tot twee verschillende driehoeken behooren.

Daar het complement eener $(14_2,\ 7_4)$ een zevenhoek of het samenstel van een driehoek en een vierhoek is, zijn er twee verschillende cf. $(14_2,\ 7_4)$. Door afzondering van den zevenhoek 1 2 3 4 5 6 7 ontstaat uit de zevenzijde de $(14_2,\ 7_4)\ A$ met tabel:

13	24	13	14	15	16	27	
14	25	35	24	25	26	37	
15	26	36	46	35	36	47	. . . . (29)
16	27	37	47	57	46	57	

Deze cf. bezit zeven ditrigonische punten 13, 24, 35, 46, 57, 61, 72 en zeven monotrigonische punten, terwijl hare lijnen alle tritrigonisch zijn.

Laat men uit de zevenzijde de punten 12, 23, 34, 41 benevens de punten 56, 67, 75 vervallen, zoo komt de cf. $(14_2, 7_4)$ *B* te voorschijn met de tabel:

13	24	13	24	15	16	17
15	25	35	45	25	26	27
16	26	36	46	35	36	37
17	27	37	47	45	46	47

. . . . (30)

Zij heeft twee tritrigonische punten 13 en 24 en twaalf monotrigonische; van hare lijnen zijn 5, 6, 7 ditrigonisch, 1, 2, 3, 4 tritrigonisch.

Er bestaat slechts eene $(12_2, 6_4)$, *terwijl er twee in samenstelling verschillende* $(14_2, 7_4)$ *zijn.*

CONFIGURATIES $(16_2, 8_4)$.

9. De cf. $(16_2, 8_4)$ hebben tot complement eene $(12_2, 8_3)$ *A*, *B*, *C*, *D*, *E* of het samenstel van twee $(6_2, 4_3)$. Verwijdert men uit de achtzijde met de lijnen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 de toppen der beide vierzijden 1 2 3 4 en 5 6 7 8, zoo komt de $(16_2, 8_4)$ met tabel:

15	25	35	45	15	16	17	18
16	26	36	46	25	26	27	28
17	27	37	47	35	36	37	38
18	28	38	48	45	46	47	48

. . . (31)

Zij is regelmatig en bezit twee hoofdvierzijden en 24 hoofdvierhoeken, welke elk eene $(12_2, 8_3)$ *A* opleveren.

Uit de tabellen (3), (5), (6), (7), (8) vindt men achtereenvolgens de tabellen voor de overige vijf $(16_2, 8_4)$.

12	12	13	34	45	16	27	18
13	23	23	45	56	46	37	28
16	27	34	46	57	56	47	58
18	28	37	47	58	68	57	68

. . . (32)

12	12	13	34	45	16	27	18	
13	23	23	45	56	46	47	28	
16	27	34	46	57	56	57	38	. . . (33)
18	28	38	47	58	67	67	58	

12	12	13	34	25	16	27	18	
13	23	23	45	45	56	47	38	
16	25	34	47	56	67	57	48	. . . (34)
18	27	38	48	57	68	67	68	

12	12	23	34	25	16	17	18	
16	23	34	45	45	36	37	28	
17	25	36	47	56	56	47	48	. . . (35)
18	28	37	48	58	67	67	58	

15	25	34	34	15	16	17	18	
16	26	35	45	25	26	27	28	
17	27	36	46	35	36	47	38	. . . (36)
18	28	38	47	45	46	78	78	

In cf. (32) zijn de acht punten 12, 23, 37, 74, 45, 56, 68, 81 ditrigonisch, de overige acht monotrigonisch; elk achttal vormt eenen achthoek; alle lijnen der cf. zijn tritrigonisch.

Cf. (33) bestaat uit twee vierzijden 1 2 3 8 en 4 5 6 7 benevens de punten 16, 27, 34, 58, welke elke zijde der eene vierzijde met eene zijde der andere verbinden; door afzondering van deze vier punten ontstaat eene $(12_2, 8_3)$ A. Alle lijnen der cf. zijn tritrigonisch; van hare punten zijn de vier bovengenoemde atrigonisch, de overige ditrigonisch.

Cf. (34) heeft drie soorten van lijnen: 2, 4, 6 zijn ditrigonisch, 5, 7 tritrigonisch-pentatetragonisch, 1, 3, 8 tritrigonisch-tetratetragonisch; van hare punten zijn 13, 18, 38 ditrigonisch, 12, 23, 34, 48, 16, 68 trigonisch-tritetragonisch, 25, 27, 45, 47, 56, 67 tritrigonisch-tetratetragonisch, terwijl 57 als tritrigonisch punt op zichzelf staat.

Cf. (35) bezit twee tritrigonische lijnen 7, 8, twee ditrigonisch-hexatetragonische 1, 4 en vier ditrigonisch-oktotetragonische 2, 3, 5, 6; verder vier ditrigonische punten 28, 58, 37, 67, vier trigonisch-tritetragonische 17, 18, 47, 48 vier trigonisch-tetratetragonische 12, 16, 34, 45, twee trigonisch-pentatetragonische 25, 36 en twee atrigonische 23, 56.

Cf. (36) bestaat uit vier ditrigonische lijnen 3, 4, 7, 8 benevens vier monotrigonische lijnen 1, 2, 5, 6; zij bezit twee ditrigonische punten 34, 78; acht monotrigonische 17, 27, 18, 28, 35, 45, 36, 46; vier hexatetragonische 15, 16, 25, 26; en twee tritetragonische 47, 38.

Er zijn zes soorten van cf. $(16_2,\ 8_4)$.

Cf. $(16_2,\ 8_4)$.

Naam.	Soorten van lijnen.	Soorten van punten.	Complementaire $(12_2,\ 8_3)$.	Tabel.
A	een	een	twee $(6_2,\ 4_3)$	31
B	een	twee	*A*	33
C	een	twee	*B*	32
D	twee	vier	*C*	36
E	drie	vier	*D*	34
F	drie	vijf	*E*	35

VERVORMING DER CONFIGURATIES $(2n_2,\ n_4)$.

10. De cf. $(18_2,\ 9_4)$ kunnen niet met behulp van hunne complementen gevonden worden, daar deze ook $(18_2,\ 9_4)$ zijn.

Er dient dus eene vervorming bedacht te worden, welke op de verschillende $(16_2, 8_4)$ toegepast, de verschillende $(18_2, 9_4)$ doet kennen.

Is a eene lijn eener $(2n_2, n_4)$, en bevinden zich onder de met haar verbonden lijnen b, c, d, e twee gescheiden paren die geene lijn gemeen hebben, b.v. de paren b, c en d, e, dan verkrijgt men eene $(2(n-1)_2, (n-1)_4)$ door a weg te laten en de punten bc en de toe te voegen.

Vormen b, c, d, e geen twee onafhankelijke gescheiden paren, maar b. v. de gescheiden paren b, c en b, d, dan wordt b gesneden door de lijn a met de punten ac, ad, ae, door de lijn e met de punten ae, ce, de en nog door twee lijnen f en g, die elk van a en e gescheiden zijn; b verkeert dan in hetzelfde geval als voorheen a, zoodat weglating van b onder toevoeging der punten af en eg wederom eene $(2(n-1)_2, (n-1)_4)$ doet ontstaan.

Zijn daarentegen slechts de lijnen d en e gescheiden, zoodat d door a, b, c en de lijn h, de lijn e door a, b, c en i gesneden wordt, dan verkrijgt men eene $(2(n-5)_2, (n-5)_4)$, wanneer men de lijnen a, b, c, d, e weglaat en het punt hi aan de figuur toevoegt. Deze vervorming kan natuurlijk alleen voorkomen, als $n \geqq 10$.

Verwijdert men dus uit eene $(2n_2, n_4)$ de gescheiden punten bc, de, terwijl de lijn a met de punten ab, ac, ad, ae aan de figuur wordt toegevoegd, dan ontstaat eene cf. $(2(n+1)_2, (n+1)_4)$.

Wordt uit de $(2n_2, n_4)$ het punt hi weggelaten, terwijl men de lijnen a, b, c, d, e met de punten ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, dh, ei in de figuur opneemt, zoo ontstaat eene $(2(n+5)_2, (n+5)_4)$.

Alle cf. $(2n_2, n_4)$ *kunnen bepaald worden, zoodra de verschillende* $(2(n-1)_2, (n-1)_4)$ *en* $(2(n-5)_2, (n-5)_4)$ *bekend zijn.*

Kampen, 23 Mei 1889.

NIEUWE BIJDRAGEN

TOT DE

KENNIS DER MELOCACTI VAN WEST-INDIË.

DOOR

W. F. R. SURINGAR.

(Vergadering der Kon. Akad. van Wetensch., 27 September 1889).



Nadat ik de eer had, de uitkomsten van mijne reis, ten aanzien van de *Melocacti* onzer West-Indische eilanden, aan de Akademie voor te dragen *), heb ik dat onderzoek voortgezet, deels met behulp van het medegebrachte materiaal, deels met behulp van nieuwe voorwerpen, die ik, eerst in Augustus 1886, door de welwillende bemoeiingen van pastoor A. J. VAN KOOLWIJK, en nu weder onlangs, in Augustus 1889, door zijn opvolger te Oranjestad, den WelEerw. Heer VAN BAARS, mocht ontvangen.

Van het oorspronkelijk medegebrachte en ook van het in 1886 ontvangene is een goed deel gestorven, gelijk van deze moeilijk te kweeken voorwerpen niet anders kan worden verwacht. Ook was aanvankelijk geen zeer geschikte gelegenheid tot plaatsing van deze voorwerpen aan den Hortus voorhanden. Later werd daarin, door de goede zorg van Regeering en Curatoren, door den aanbouw van een klein succulenten-kastje voorzien; en, ofschoon het onmogelijk is, aan deze planten de levensvoorwaarden van haar vaderland hier terug te geven,

*) Zie *Verslagen en Mededeelingen der Kon. Akad. v. Wetensch.*, Afd. Natuurkunde, 3de Reeks, Deel II, p. 183.

mogen wij de hoop koesteren, dat allengs een grooter getal der aangevoerde voorwerpen het leven behouden zal.

Van diegene, welke in leven bleven, hebben sommige duidelijke verschijnselen van groei vertoond. Opmerking verdienen hieronder: 1⁰ een zwaar exemplaar van *M. Salmianus* L. O., destijds uit Curaçao medegebracht, waarvan het beschadigde cephalium begon zich te vernieuwen; deze vernieuwing heeft zich voortgezet, en daaruit zijn, bij den warmen zomer van dit jaar, eenige bloemen te voorschijn gekomen; 2⁰ een exemplaar van *M. stramineus* Sur. l. c., eveneens tot de eerst medegebrachte planten behoorende, dat toen reeds een vrij groot cephalium bezat. Dit cephalium is op eenigzins afwijkende wijze doorgegroeid. Het is nl. niet eenvoudig verlengd, door nieuw toegevoegde tuberkels uit het groeipunt en verbreeding van het daaronder aanwezige gewelfde topgedeelte tot den volwassen omvang, m. a. w. door verlenging van den cylinder, maar door eene speciale uitgroeiing, vermoedelijk een vertakking nabij het groeipunt, die, terwijl het reeds aanwezige gedeelte onveranderd, en dus gewelfd bleef, op zichzelf tot een bolvormig lichaam, in diameter overeenkomende met de normale breedte van het cephalium, is toegenomen. Deze tak, van dezelfde samenstelling als het overige cephalium, hangt daarmede slechts even samen, helt door zijn gewicht sterk over, en zal er ten slotte door dezelfde oorzaak wel van afbreken. Alsdan zal vermoedelijk de inplanting nauwkeuriger dan nu kunnen worden nagegaan.

Deze vernieuwing, uit het cephalium zelf, is geheel exceptioneel. Gewoonlijk, wanneer het cephalium afsterft of vernield wordt, en zich door de vorming van een of meer nieuwe herstelt, ontstaan deze langs den rand van het oude, als zijtakken uit het bovendeel van den vegetatieven stengel; en deze zijknoppen brengen eerst een kleiner of grooter gewoon stengelgedeelte, en eerst daarna, aan den top hiervan, elk een nieuw cephalium voort.

Een voorwerp, in 1886 aangevoerd, en toen zonder cephalium, is er een begonnen te vormen, een verschijnsel, dat, zoover mij bekend, bij cultuur in onze kassen, nog niet is waar-

genomen. Het is een zeer klein voorwerp, met kegelvormigen stengel, dat onder de bij deze mededeeling behoorende beschrijvingen als *M. (incurvus) nanus* vermeld wordt. Bij eene hoogte van 10 cm. bezit de kegelvormige stengel beneden een diameter van $10^1/_2$ cm.

Onderscheidene, met cephalium voorziene voorwerpen, hebben bloemen ontwikkeld. In onze kassen komen deze alleen in de zomermaanden, en bij een warmen, zonnigen zomer voor den dag. Wanneer dus de voorwerpen in Augustus aankomen, heeft men wel eenige, maar niet veel kans, dat men daarvan nog in denzelfden zomer de bloemen zal zien. De beide voorafgaande zomers van 1887 en 1888 waren bovendien ongunstig, door veel bedekte lucht; het gevolg hiervan is geweest, dat van de in 1886 ontvangen planten eerst in dezen zomer eenige hebben gebloeid. Sommige, het eerst medegenomen voorwerpen, hebben in dezen, vooral in den beginne gunstigen zomer, van Mei tot Augustus, hun bloei herhaald.

De meeste bloemen komen in den namiddag, of tegen den avond, te voorschijn, en zijn den volgenden morgen verwelkt. Enkele, zooals *M. communis* DC., hebben ze in 1885 — later is deze soort uitgestorven — ook in den voormiddag vertoond. Bij de middagzon verwelkten ook deze. In 't algemeen zijn de *Melocacti* nachtbloeiers en van korten duur. Dit maakt de waarneming der bloemen eenigszins moeilijk; en daarbij komt, dat slechts dan, wanneer eenige warme zonnige dagen zijn voorafgegaan, de bloemen geheel tot ontwikkeling komen. In het omgekeerde geval ziet men, nu eens dat een knop even met den top uit de wol van het cephalium te voorschijn komt, maar zich weldra terugtrekt en verwelkt. Een andermaal komt de bloem verder, de bloembladen openen zich eenigermate, maar de zoom bereikt slechts een vertikalen stand, en daarna trekken zij zich evenzeer terug. Soms staan de binnenste bloembladen een weinig uitgebogen, en verbergen min of meer de nog vereenigde stempellobben. Opent zich de bloem volledig, dan spreiden deze zich straalvormig uit, de bloembladen vormen een trechtervormigen zoom, en ten slotte staan ook de toppen van de meer buitenwaartsche kortere blaadjes, die men als kelkbla-

den beschouwen kan, eenigszins naar buiten uit. Op die wijze zijn in 1885 en in dezen zomer eenige bloemen waargenomen.

Bessen komen gewoonlijk, aan pas ingevoerde bloeibare planten, korten tijd na hare aankomst voor den dag, als het product van bloemen, die vóór de reis hebben gebloeid, zoodat men veelal den vruchtvorm spoedig kan leeren kennen, in zooverre de voorwerpen van cephalium voorzien zijn. Deze bessen zijn van verschillenden vorm en grootte, maar in 't algemeen naar beneden smaller. Nadat haar top tusschen de wol van het cephalium zichtbaar is geworden, verheffen zij zich in een of twee dagen daaruit, en vallen ten slotte af. Door de veerkracht der omringende deelen, eene drukking uitoefenende tegen de zwellende bes, wordt deze als het ware uitgeperst. Miquel ontkent dit verschijnsel, tegenover de wel wat overdreven mededeelingen van Lemaire, dat de bessen uit het cephalium wegspringen. Op grond van eigen waarnemingen deelt Miquel mede, dat de bessen, na een weinig boven de wol uitgestoken te hebben, zich weder terugtrekken en tusschen de wol verdrogen. Nu en dan geschiedt dit werkelijk; nl. soms blijft de bes met haar voet aan de aanhechtingsplaats verbonden met eene kracht, die aan de oppersing weerstand biedt; maar in de meeste gevallen laat zij los en wordt op de beschrevene wijze langzaam opgeheven en verwijderd.

Dit jaar zijn bessen verkregen uit een paar in 1886 ingevoerde planten, die in den loop van den zomer hadden gebloeid, dus uit in de kas zelve ontwikkelde bloemen. De planten hadden gebloeid de eene van het laatst van Mei tot half Juli, de andere nog in het begin van Augustus, terwijl de rijpe bessen in en na de eerste week van September zijn verschenen. Ten naaste bij laat zich hieruit opmaken, dat er een paar maanden tusschen den bloei en de rijpheid der bes verstreken zijn *). De stempelarmen lagen in deze bloemen in de keel, niet ver boven de meeldraden; of de bevruchting door middel van vliegen, of wellicht door de

*) Dit wordt bevestigd door enkele bessen, die nog tot 23 Oktober verschenen zijn (noot bij de proefcorrectie toegevoegd).

aanraking bij het onderzoek der bloem geschied is, moet ik in het midden laten. De bessen waren deels wat kleiner, deels wat smaller dan die, welke kort na den invoer waren verkregen, maar overigens normaal gevormd en bevatteden, even als de andere, een aantal goed ontwikkelde zaden.

De zaden, welke in vrij grooten getale aan de wandstandige zaadlijsten worden voortgebracht, kiemen geregeld, wanneer zij op vochtige zandige aarde worden uitgezaaid. Omtrent de kiemingsgeschiedenis heeft MIQUEL reeds medegedeeld, dat het stengelbeginsel voor den dag treedt als een klein bolvormig, boven eenigszins ingesneden lichaampje, waarvan de twee door de insnoering gescheiden helften als de zaadlobben moeten worden aangemerkt. Aan de binnenzijde van deze ontstaat het eerste dorenbundeltje (zijtakje), waarvan de dorens (bladen) door kleine borsteltjes worden vertegenwoordigd. Na afloop van deze kiemingsgeschiedenis ontstaan twee dorenknobbels, met de eerste gekruist. Hierdoor is het begin van vier vertikale rijen dorenknobbels gegeven, elke knobbel vertegenwoordigende een blad met daarmede verbonden okseltak, en in elke rij eerst als afzonderlijke knobbels voorkomende, maar weldra tot een doorloopende rib ineensmeltend. Vrij spoedig wordt dit getal ribben tot acht verdubbeld, doordien zich, tusschen de vier eerst aangelegde, vier nieuwe invoegen, en tusschen deze acht wordt hier en daar nog weder een nieuwe aangelegd, zoodat reeds bij zeer jonge voorwerpen van die soorten, welke binnen het bereik van mijn onderzoek vielen, het aantal ribben tusschen acht en dertien wisselt. In den jongen top, waar voortdurend nieuwe knobbels worden gevormd, liggen deze spiralig.

Sommige voorwerpen verkrijgen dus reeds op dezen jongen leeftijd — laten wij het noemen, ter onderscheiding met volgende toestanden, het primitieve stadium — hun vol aantal kanten of ribben. Bij andere wordt dit echter ook later nog, op dezelfde wijze, vermeerderd. Bij sommige ziet men zelfs nog eene vermeerdering in de onmiddellijke nabijheid van het cephalium, dus op het einde van den vegetatieven lengtegroei.

Bij deze vermeerdering van het aantal ribben smelt de

aanvangsknobbel der nieuwe doorgaans samen met een der beide oude ribben, waartusschen hij de nieuwe aanvangt; alsdan geeft dit aanleiding tot het voorkomen, alsof deze rib naar boven is gesplitst of vertakt; soms blijft hij op zichzelf staan, en wordt dus de nieuwe rib vrij tusschen de bestaande ingevoegd.

Het is duidelijk, dat de vermeerdering van het aantal ribben samenhangt met de vergrooting der cycli in den steeds breeder wordenden spiraligen top, maar tevens, dat zij daarmede niet geheel gelijken tred houdt. De vergroeiing tot doorloopende ribben houdt als het ware de vermeerdering van het getal vertikale rijen terug. Ook komen hierbij enkele anomalieën voor. Zoo zijn gewoonlijk de vermeerderingen van het aantal ribben, zoowel in volgende stadiën als in het primitieve, gelijkmatig langs den omtrek van den stengel verdeeld; maar bij één (volwassen) voorwerp was te zien, dat zoodanige vermeerdering plaats had gehad aan de ééne zijde van den stengel, tusschen een viertal naast elkander liggende ribben.

De borsteltjes, die, in het primitieve stadium, de dorengroepen vertegenwoordigen, zijn ten getale van vijf op elk knobbeltje. Zij vertegenwoordigen de zijdorens van de latere volkomene deelen. Eerst hooger op vermeerdert hun getal en komen ook, bij die soorten welke later binnendorens zullen bezitten, een of meer borstels in het midden der groepen, als vertegenwoordigers van deze tweede soort van dorens, te voorschijn. De verschillen tusschen de jonge plantjes, van 4- à 5-jarigen leeftijd en die een diameter van hoogstens 3 centimeter bezitten, zijn overigens nog hoogst gering. Vele, afkomstig van voorwerpen, die tamelijk ver uiteenliepen, laten zich in dezen toestand niet of nauwelijks van elkander onderscheiden. Andere vertoonen duidelijker afwijkingen van de overige in kleur, lengte der borstels, enz. Maar de verschillen zijn volstrekt niet evenredig aan die tusschen de volwassen voorwerpen, welke de zaden hebben geleverd. De lichaamsvorm is in het algemeen bolvormig.

Alles wat zich nu op de oppervlakte van deze bolvormige stengeltjes bevindt, zal later naar het grondvlak worden

teruggedrongen, en dus, voor zoover dan nog voorhanden, op de volwassen voorwerpen alleen te zien zijn, als men deze omkeert, en haar grondvlak, rondom het uitgangspunt van den penwortel, beschouwt. Dikwijls ziet men daar straalswijs naar den wortel gerichte reeksen van dicht opeen geplaatste doorngroepen, kleiner en eenvoudiger dan die, welke zich aan het boven den bodem zichtbare gedeelte aan den stengel bevinden, en hoe langer hoe kleiner een eenvoudiger wordend, naarmate men het middelpunt bij den wortel nadert. De allereerste gevormde doorngroepjes, in diens onmiddellijke nabijheid, zijn dan echter lang verloren gegaan.

Juiste waarnemingen omtrent voorwerpen, die in onze kassen het primitieve stadium zijn te boven gekomen, zijn mij niet bekend. Maar uit betrekkelijk jongere ingevoerde voorwerpen, in vergelijking met zaailingen eenerzijds en geheel volwassen voorwerpen anderzijds, laat zich opmaken, dat, bij den overgang van het eerste stadium in het tweede, de stengelleden, naarmate zij later worden aangelegd, steeds meer in de breedte uitgroeien, totdat de volle breedte van de latere basis van den stengel bereikt is: even als jonge palmen, boomvarens en dergelijke, eerst, zooals men het noemt, tot hunne breedte uitgroeien, om later, uit die breede basis, door toevoeging van nieuwe leden van ongeveer dezelfde breedte, den opgerichten stam te vormen. Hier echter is dat eerste gedeelte dadelijk vertikaal, niet min of meer rhizoom-achtig.

Geschiedt nu die successieve verbreeding der later gevormde leden snel en steeds toenemend, dan verkrijgt men die platte koekvormige lichamen, welke reeds door Salm-Dijck en Miquel als jonge voorwerpen van *M. pyramidalis* S. D. zijn erkend en ik u hier van een variëteit van *M. Koolwijkianus* Sur. kan vertoonen. Bij minder snelle, en ten slotte weder geleidelijk verminderende toeneming, moet het grondvlak zich meer afgerond voordoen. Eene enkele maal, exceptionneel, zag ik het vrij kegelvormig. Eerst wanneer op deze wijze het grondvlak zijne volle breedte heeft verkregen, heeft men aan de buiten- en bovenzijde van het lichaam dorengroepen, die ook aan de buitenzijde van het volwassen voor-

werp zichtbaar zullen blijven. Ook in deze dorengroepen, in 't algemeen de krachtigst ontwikkelde, is meestal nog eenige opklimming te bespeuren, en geheel naar boven, tegen de vorming van het cephalium, vaak weder eenige vermindering. Het maximum heeft men dus doorgaans in het midden of op twee derden van de hoogte; vandaar uit heeft men, naar gelang van omstandigheden, een kleiner of grooter getal daaraan gelijke, en vervolgens beneden de nog niet tot het maximum gestegene, boven al of niet weder verminderde dorengroepen.

Wanneer, na de vorming van een plat of bijna plat grondvlak, de groei in het tweede stadium — dat wij het vegetatieve zullen noemen — in de hooger en hooger gevormde deelen geleidelijk weder afneemt, verkrijgt men den eigenaardigen kegel-, of, de kanten in aanmerking genomen, pyramidaalvorm, die aan een deel der soorten eigen is. Bij andere blijft de breedtegroei in de deelen voorbij het grondvlak een tijdlang gelijk, waardoor cylindervormen, aan den top afgerond, ontstaan, die men wel met die van een suikerbrood vergeleken heeft. Heeft eerst nog een toeneming, en daarna afneming van den breedtegroei plaats, dan verkrijgt men, als het maximum beneden het midden blijft, een eivormigen, wanneer het in het midden komt, een bolvormigen of langwerpigen stengel. Tusschen deze hoofdvormen zijn natuurlijk allerlei tusschentoestanden. In 't algemeen zijn de vormen, waarbij de hoogte den diameter overtreft, zeldzamer dan die, waarbij beide gelijk zijn, of waar de hoogte min of meer beneden het maximum der breedte blijft.

Wanneer het cephalium zich begint te vormen, ziet men aan den top, in plaats van jonge elkander kruisende dorens, de lange witte wol van de cephaliumknobbels te voorschijn treden, omringd door de dorens van het laatst gevormde vegetatief gedeelte. Eerst zeer smal, verbreedt het zich van lieverlede, waarbij dus ook het vegetatief gedeelte van den stengel, waarop het rust, nog in omvang toeneemt. Op die wijze wordt een diameter van 7—10 centimeters verkregen, terwijl de oppervlakte zich inmiddels welft; eindelijk, wanneer het maximum van omvang bereikt is, groeit het cephalium verder cylindervormig op.

Reeds de eerste cephaliumknobbels zijn bloeibaar, maar de bloem ontwikkelt zich niet, voordat een aantal nieuwe cephaliumknobbels zich gevormd heeft. Voorts weet men, dat elke knobbel, als zijtak, niet meer dan ééne bloem kan voortbrengen. Het gevolg hiervan is, dat de bloemen, zoowel bij een reeds cylindervormig ontwikkeld als bij een nog schijfvormig cephalium, alleen op de bovenvlakte voorkomen, meest 1 à 2 cm. van het midden. Bij het cephalium, dat zijne volle breedte bezit en krachtig doorgroeit, komt dit, zooals Miquel opgeeft, ongeveer uit op een derde tusschen het middelpunt en den omtrek der bovenvlakte; bij jongere cephaliën is het echter dichter bij den rand en bij niet of niet sterk meer aangroeiende dichter bij het midden. Iets vroeger of later dan de bloemen komen de fijnere borstels te voorschijn, die hier de dorengroepen vertegenwoordigen, en die dus in de eerste plaats op het uitgebloeide, bij sommige soorten reeds op het bloeibare, en bij andere, hoewel zeldzamer, ook op het nog niet bloeibare middengedeelte boven de wol uitsteken. In een paar gevallen, waarin het cephalium geheel en al, tot over den top, met overal even krachtige en even lange borstels bedekt was, gelijk bij andere, waar de bloemen of bessen uit het midden ontsproten, kwam het mij voor, te doen te hebben met cephaliën die hadden opgehouden te groeien, en de natuurlijke grens van hunne ontwikkeling hadden bereikt. Waar die grens voor elke soort ligt, is voor het oogenblik niet uit te maken. Dat zij echter verschilt, valt niet te betwijfelen. Bij de *Melocacti* op de eilanden beneden den wind heb ik slechts bij uitzondering een cephalium gezien, dat iets hooger was dan de diameter. De meeste waren lager. Bij *Melocactus communis* DC. op St. Eustatius waren er van een halven meter en hooger; welk verschil moeilijk aan toevallige omstandigheden van vernieling of dergelijke toegeschreven worden kan.

De vergelijking van de zaailingen van hetzelfde zaaisel, zal, wanneer de zaailingen eenmaal zoover gevorderd zullen zijn, dat zij het primitieve groeistadium te boven zijn gekomen, over het min of meer standvastige, en dus over de betrekkelijke waarde der kenmerken voor de onderscheiding der soorten, een oordeel kunnen leveren. Het laat zich

echter voorzien, dat het lang zal duren, voordat de in onze kassen gekweekte voorwerpen dien toestand van ontwikkeling zullen hebben bereikt. Inmiddels levert reeds de vergelijking van verschillende dorengroepen en andere deelen aan eenzelfde voorwerp, en de vergelijking van meerdere voorwerpen, die kennelijk tot denzelfden type behooren, inzonderheid die, welke in het algemeen overeenstemmen, maar in één opzicht verschillen, een maatstaf tot beoordeeling.

Tot dit doel leverden ook de beide zendingen van de Heeren VAN KOOLWIJK en VAN BAARS een zeer te waardeeren materiaal. De voorwerpen, die de Heer VAN KOOLWIJK zond, waren alle van ééne plaats, in de nabijheid van Oranjestad, en leverden het voordeel op van vrij talrijke exemplaren te bevatten van enkele soorten: waarin dus de variaties, bij behoud van denzelfden algemeenen type, konden worden nagegaan. Die van den Heer VAN BAARS waren van verschillende plaatsen van het eiland; en daar vooreerst de Heer VAN BAARS mij destijds op een paar tochten had vergezeld, en ten tweede dezelfde bediende, die toenmaals voor mij werkzaam was geweest, ook nu weder met het inzamelen kon worden belast, bestond er gelegenheid, om de lokaliteiten vanwaar, en ook eenigermate de vormen die in de eerste plaats tot aanvulling werden gewenscht, meer in het bizonder op te geven. Op verschillende wijze waren dus beide in hooge mate voor het doel belangrijk.

Mijne onderstelling, dat tusschen sommige, vrij uiteenloopende vormen, maar die toch iets in haar karakter gemeen hadden, tusschenleden, als van eene zelfde reeks, zouden gevonden worden, b.v. tusschen *M. Koolwijkianus* SUR. en *M. rubellus* SUR., werd bevestigd. Voor andere bleek ook nu weder een meer geïsoleerd standpunt, b.v. voor *M. stramineus* SUR. Niet bevestigd werd mijn vermoeden, dat men reeds nu de soorten meer, dan tot dusver, zou kunnen samentrekken. Zelfs eene enkele, die ik gemeend had, niettegenstaande de bestaande verschillen, tot eene zelfde soort als andere, te mogen rekenen, heb ik daarvan weder moeten afscheiden, b.v. de zeer karakteristieke Arubaansche vorm met kromme dorens, die ik vroeger tot *M. Monvil-*

leanus Miq. had gebracht. Ik ontving nl. onder de latere vormen een, die veel nader komt tot de beschrijving en afbeelding van het fragment, dat Miquel aanleiding tot het opstellen van zijne soort gaf, maar onmogelijk met den door mij daartoe gebrachten Arubaanschen vorm kan worden vereenigd. Ik ben dus verplicht geweest, dezen laatsten thans van een afzonderlijken naam te voorzien. Tegelijkertijd moge ik hier aanteekenen, dat de verwante *Melocactus Besleri* L. O., door de schrijvers die Miquel hebben opgevolgd, ten onrechte als soort geschrapt is. Link en Otto, die in 1827 den naam gaven, hebben dien tevens toegepast op een voorwerp, in de collectie van Schelhase te Cassel aanwezig, dat, door den bloei in 1837 en 1838, bleek tot een ander geslacht, *Discocactus*, te behooren; maar de afbeelding van Besler in den »*Hortus Eystettensis*", die aanleiding gaf om den naam *Besleri* aan de soort te verbinden, is een duidelijke *Melocactus* met cephalium. Of nu het jonge voorwerp in den Hortus te Berlijn, uit Zuid-Brazilië (het Casselsche voorwerp was uit West-Indië, vermoedelijk van Jamaica, terwijl het vaderland van het Besler'sche onbekend is), waarnaar Link en Otto hunne beschrijving en afbeelding gaven, tot de eene of tot de andere soort behoorde, is thans niet meer uit te maken. Förster bericht (*Handb. d. Cacteënkunde*, p. 348) dat het gestorven is zonder te bloeien. Miquel geloofde wel aan de identiteit; maar beschouwde in elk geval de afbeelding van Besler en niet het Berlijnsch exemplaar als de type, zoodat ik meen, met weglating van de verdere synonymie, de soort te moeten behouden als *M. Besleri* Miq. (non L. et O.), waarbij dan, uit de beschrijving van Miquel, datgene moet worden weggelaten, wat aan die van het Berlijnsche exemplaar ontleend is.

Gelijk gezegd, is mijn indruk, na het bestudeeren en vergelijken van een vrij groot aantal voorwerpen en vormen van dit geslacht, dat de maatstaf tot onderscheiding der soorten vooralsnog niet veel ruimer kan worden genomen, dan tot dusverre door Miquel en de andere schrijvers over dit onderwerp geschiedde. Misschien zullen later sommige vormen, die nu afzonderlijk moeten worden genomen, kunnen

worden samengevoegd, nl. wanneer van alle de bloemen, vruchten en de ontwikkeling nauwkeurig bekend zullen zijn; de ondervinding heeft echter geleerd, dat meerdere malen vormen, die later heterogeen bleken, zijn samengevoegd geworden dan het omgekeerde; en het later samenvoegen van aanvankelijk onderscheiden vormen is zeer eenvoudig, terwijl het scheiden van ten onrechte vereenigde niet zelden groote moeilijkheden oplevert. Ten einde nu eene eventueele vereeniging of scheiding, die later noodzakelijk mochten blijken, gemakkelijk te maken, zonder telkens de namen te veranderen en daardoor de synonymie te vermeerderen, heb ik niet slechts aan diegene, welke ik meen als afzonderlijke soorten te moeten beschouwen, afzonderlijke namen gegeven. maar ook voor varieteiten, bij verschillende soorten, nooit dezelfde namen gebruikt, en voorts de mij voorkomende verwantschap, die misschien later tot vereeniging tot ééne soort leiden kan, door het plaatsen van den naam der verwante soort tusschen haakjes vóór den naam der beschrevene aangeduid. Eene uitzondering heb ik gemaakt ten aanzien der vormen, die zich alleen of hoofdzakelijk door het bezit van twee of meer middeldorens van elkander onderscheiden. Aan dit kenmerk heeft men, naar mijn oordeel, wel niet doorgaans, maar toch nu en dan, eene wat al te groote waarde toegekend. Het gemis van alle middendorens is bij sommige soorten typisch; het bezit van slechts één middeldoren ook in het meerendeel der gevallen, maar niet in alle: gelijk ook reeds door MIQUEL een paar ééndoornige voorwerpen aan meerdoornige zijn verwant geoordeeld. Het bezit van slechts twee middeldorens schijnt mij slechts bij uitzondering een standvastig karakter; naast de meeste, die er twee hebben, komen andere voor met drie, vier, ook wel met meer middeldorens, die, op grond van de overige eigenschappen, tot dezelfde soort moeten worden gerekend. Deze onderscheid ik dus telkens eenvoudig als *forma* 2-*spina*, 3-*spina*, 4-*spina* of *plurispina*, zonder meer. Iets anders is het natuurlijk, wanneer, behalve het grooter aantal dorens, ook andere verschillen, in het karakter der dorens of in andere lichaamsdeelen optreden. Zoo heb ik b.v. reeds in mijn vorige lijst

een zesdoornige vorm, het naast bij *M. rubellus* staande, als *M. hexacanthus* onderscheiden, enkel met voorvoeging van den naam *rubellus* tusschen haakjes, omdat de identificatie mij wel waarschijnlijk, maar nog niet voldoende gewettigd scheen.

Wat de overige kenmerken betreft, zij het volgende opgemerkt:

De grootte van het volwassen lichaam beweegt zich bij elke soort binnen niet zeer ruime grenzen, zoodat men althans kleine, middelmatige en groote soorten onderscheiden kan. Evenzoo is het met de hoofdvormen: kegelvormig of pyramidaal, eivormig, bol en langwerpig, gesteld. Bij beide eigenschappen moet natuurlijk met den leeftijd en met individueele krachtiger of zwakker ontwikkeling rekening worden gehouden. De kleur des stengels, die tusschen licht en donker groen, en min of meer blauwachtig varieert, is in sommige gevallen eene eigenschap, die met de overige karakteristieke eigenschappen constant optreedt, en dus niet verzuimd mag worden; maar tevens moet zij met omzichtigheid worden gebruikt, daar de opvatting der kleur veel afhangt van het licht, dat op de voorwerpen valt. Bij sterke directe zonverlichting komt het licht geelgroen meer uit dan in het gewone daglicht, en voorwerpen met diepe sleuven doen zich reeds daardoor donkerder en meer blauwgroen voor dan andere. Van al de tinten, die hier voorkomen, is praktisch alleen eene onderscheiding tusschen licht, middelmatig en donker bruikbaar, en dan moet bovendien in aanmerking worden genomen, of de taxatie der kleur onder dezelfde omstandigheden heeft plaats gehad. Is dit niet het geval, dan blijft de opgaaf eenigermate onzeker.

Het getal der ribben, binnen zekere grenzen, haar vertikale of schuine, spiralige stand, haar vorm, breed met bijna platte of gewelfde vlakken en scherpen of stompen rug; of smal en hoog, sterk om de doornvelden gezwollen en daartusschen ingenepen; de vorm der kam tusschen de velden, effen of kartelvormig verheven, leveren goede kenmerkende eigenschappen. Hierbij valt evenwel op te merken, dat de ribben door krachtigen groei meer gezwollen kunnen zijn, en dat soms

smalle en breede bij voorwerpen voorkomen, die in andere eigenschappen overeenstemmen, dus om dat ééne verschil niet soortelijk gescheiden kunnen worden. Zoo heeft LEMAIRE bij zijn *M. obtusipetalus*, die breede maar tusschen de velden ingesnoerde ribben bezit, als varieteit, met instemming van MIQUEL, een vorm gevoegd met zeer breede niet ingesnoerde ribben, terwijl hij dit onderscheid aan den krachtigen groei toeschrijft. Ik zelf heb, bij de laatste bezending uit Aruba, een vorm van *M. stramineus* ontvangen, die zich, behalve door eenigzins hoogere gestalte, door smallere ribben, in verband met haar vermeerderd aantal, onderscheidt. De mogelijkheid van zoodanige invloeden moet dus, bij de beoordeeling van dit kenmerk, in aanmerking worden genomen.

Van de dorenvelden wordt het aantal, de meerdere of mindere verwijdering van elkander, hun vorm, grootte, kleur en het al of niet, of in mindere of meerdere mate, bezet zijn met vilt tusschen de dorenwortels, beschreven. Met het aantal wordt het getal der boven den grond, aan de buitenzijde van den stengel zichtbare bedoeld, en in 't algemeen worden de in het primitief stadium gevormde, maar bij de volwassen voorwerpen verdwenene of naar de grondvlakte teruggedrongen doornvelden geheel buiten beschouwing gelaten. Tusschen de van buiten zichtbare nu bestaat een doorgaand verschil, naarmate zij lager of hooger aan den vegetatieven stengel voorkomen. De hoogste, en vooral in een groeienden top, die nog niet in cephalium-vorming is overgegaan, zijn het rijkelijst, soms zeer sterk, met vilt bekleed, schijnen daardoor ook vaak grooter. De onderste zijn relatief klein en kaal. Wil men niet bij elk voorwerp al deze toestanden afzonderlijk beschrijven, en gewoonlijk geschiedt dit alleen wanneer een eenigzins buitengewone toestand voorkomt, dan kiest men als normaal de dorenvelden, die ongeveer te halverhoogte of op tweederden van de hoogte voorkomen. Deze kiest men ook voor de dorens, daar deze hier, met kleiner of grooter verschillen naar beneden en naar boven, meestal hun maximum van ontwikkeling vertoonen.

Wanneer slechts één doren der centrale groep voorkomt,

staat deze in het midden van het veld; zijn er twee, dan staat de tweede, doorgaans zwakkere, mediaan daarboven; zijn er drie, dan staan zij in ééne mediane lijn, of in een scheven driehoek, of wel, de twee bijgekomene staan lateraal boven den eersten; zijn er vier, dan komt er eene bovenste bij, en staan alle in eene smallere of breedere ruit. Indien nu het getal nog grooter wordt, dan komen de nieuwe, accessore, vaak kleine dorens, in de door mij waargenomen gevallen, altijd weder boven de vroegere voor: hetzij dat de bovendoren vervangen wordt door een paar laterale en dus alle in een langwerpig rond komen te staan, of dat de bovendoren op zijne plaats blijft en daarboven als het ware een nieuwe kring wordt gevormd. Juist het omgekeerde, nl. het accessoor zijn der onderste dorens van eene aldus vermeerderde groep, heeft MIQUEL bij zijn *M. Zuccharinii*, ofschoon niet geheel duidelijk, beschreven. Deze vermeerdering der centrale dorens, buiten den oorspronkelijken kring, is, uit een morphologisch oogpunt, eenigzins raadselachtig. Het heeft er nog het meest van, dat het wijst op de vorming van een zijtakje uit den knobbel, dat dan meest naar de bovenzijde, eene enkele maal (bij *M. Zuccharinii* MIQ.) aan de benedenzijde zou ontstaan. Eene tegenstelling tusschen de beneden- en bovenzijde vinden wij ook in de ontwikkeling der normale dorens, die doorgaans het krachtigste zijn aan die benedenzijde, zoowel wat de centrale als wat de randdorens betreft, maar somwijlen juist omgekeerd. Nu en dan ziet men den ondersten centraaldoren kleiner dan de anderen; en bij *M. dichroacanthus* MIQ. zijn de bovenste randdorens tot het dubbele langer dan de onderste.

De diameter van het volwassen cephalium levert, gelijk wij zagen, bij de onderscheidene soorten geen groot verschil op; terwijl de opgaaf der hoogte voor het oogenblik veelal slechts de strekking kan hebben om van lieverlede tot de kennis van de natuurlijke grens der hoogte voor elke soort te naderen. Meer positieve kenmerken leveren de borstels, hun aard, grootte, kleur, en verspreiding op.

Het meest in het oog vallend verschil, dat de bloemen

aanbieden, is gelegen in de grootte en daarmede samenhangende wijdte van den goed geopenden zoom. Zoover bekend, wisselt deze wijdte, bij verschillende soorten, af tusschen een halven centimeter en nog iets minder en twee en een halven centimeter; en het is merkwaardig, dat de kleinste bloemen gezien zijn bij voorwerpen van de hoogste vegetatieve ontwikkeling, en de grootste bij eene in dat opzicht laag staande soort, *M. amoenus* Hoffgg. van het vasteland, met één, soms nog ontbrekenden, centraaldoorn. Men zou echter verkeerd doen met hieruit eene conclusie omtrent de verhouding dezer eigenschappen te trekken, want zoowel bij de lage vormen als bij de hoog ontwikkelde komen ook bloemen van middelbare grootte voor, en van de meeste zijn de bloemen nog niet beschreven.

Bij vergelijking in dit opzicht moet men zorg dragen, met goed ontwikkelde en geheel geopende bloemen te doen te hebben, iets wat in onze kassen, gelijk vroeger werd opgemerkt, nog al eens te wenschen overlaat.

De kleur is nu eens licht rozerood, dan eens donkerder purperrood, soms constant, soms ook wel bij dezelfde soort afwisselend. Met de grootte der bloem neemt ook het aantal der, even als bij alle cacteeën-bloemen, spiralig geplaatste en in elkander overgaande, kelk- en bloembladen toe. De vorm der bloembladen, speciaal van hunne toppen, levert eenige, wel is waar minutieuze, maar toch niet verwerpelijke kenmerken. Zelden zijn alle bloembladen van dezelfde bloem in dit opzicht aan elkander gelijk: zoodat men ook weder eene bloem noodig heeft, waarin alle bloembladen flink ontwikkeld zijn, om het algemeene of heerschende karakter te vatten. De verschillen zijn dan deze, dat de toppen der bloembladen nu eens stomp en relatief breed, dan spits of versmald, ook wel mucronaat zijn, terwijl de randen nu eens gaaf, dan weer eenigzins onregelmatig gekarteld of ook vrij regelmatig en zeer fijn getand zijn. Het aantal stempelarmen varieert ook ongeveer met de grootte der bloem tusschen 3 en 7, en kan in bloemen van dezelfde plant een of twee verschillen; de kleur heb ik altijd wit gezien, behalve bij *M. communis* dc., welker bloemen vrij lang openbleven en

waar zij ten slotte een weinig rood werden. Behalve voor deze soort worden zij ook roodachtig opgegeven voor *M. violaceus* Pfeiff. en geelachtig voor *M. caesius* Wendl. De hoogte van de (geopende) stempels in de keel heeft mij tot dusverre geene verschillen opgeleverd, die niet uit eene meer of minder krachtige ontwikkeling der bloem kunnen worden verklaard.

Iets anders is het met de hoogte, waarop de bloemen buiten het cephalium uitsteken; ofschoon ook hier het iets hooger of lager van de gezonde ontwikkeling der bloem afhangt, zoo zijn er soorten, waarbij de bloemzoom niet of nauwelijks buiten de wol van het cephalium uitsteekt, en andere, waar zij zich een centimeter of meer daarboven verheft. Het schijnt samen te hangen met de omstandigheid, of de plaats, waar de bloemen gevormd worden, al of niet en met kortere of langere borstels bezet is.

Vorm en grootte der bessen loopen nog al uiteen, en verdienen eene plaats onder de soortskenmerken: mits men voorzichtig zij in de toepassing, indien slechts enkele bessen van een voorwerp zijn gewonnen, en rekening houde met de variaties, die, door zwakke of krachtige ontwikkeling, nu en dan bij bessen van hetzelfde individu voorkomen, en dus ook bij voorwerpen van eene zelfde soort kunnen worden aangetroffen. De middelvorm is omgekeerd ei-kegelvormig, met eene lengte van ongeveer $3\frac{1}{2}$ centimeter en een diameter, in het dikste gedeelte, van ongeveer $\frac{1}{3}$ der lengte. Vandaar uit gerekend zijn sommige beneden stomper en dus zuiver eivormig of langwerpig, andere spits, dus zuiver kegelvormig, en in deze vormen absoluut grooter of kleiner, en verschillend in de verhouding van lengte tot breedte; zeer uiteenloopende typen zijn b. v. de kort- en breed-kegelvormige, nog geen twee centimeter lange en ongeveer één cm. breede, bij *M. communis* DC., en de tot 5 cm. lange en slechts 8 mm. breede langwerpige bij *M. stramineus* Sur.

In 't algemeen hebben de bloemen en vruchten meer opgeleverd dan ik daarvan aanvankelijk verwachtte, maar toch te weinig, om vooralsnog met de vegetatieve organen, in

het onderscheiden en rangschikken der soorten, om den voorrang te kunnen wedijveren.

Eene rangschikking der soorten is het eerst door Miquel in zijne bekende Monographie van het geslacht geleverd *). Tot en met Linnaeus werd het weinige bekende als ééne soort beschouwd, door Linnaeus *Cactus Melocactus* genoemd. Decandolle verhief †) *Melocactus* tot een afzonderlijk geslacht en noemde de door hem in de *Plantes grasses* afgebeelde soort *Melocactus communis.* Denzelfden naam hadden Link en Otto, even te voren §), aan een, ook door hen afgebeelden, maar duidelijk verschillenden vorm gegeven; de *M. communis* van Decandolle bleef echter, ook in het vervolg, als de type der soort beschouwd. Aan het geslacht waren twee soorten, door Salm-Dyck als *Cactus macracanthus* en *pyramidalis* beschreven, toegevoegd. Daarop volgden meerdere, door Link en Otto, Hooker, Lemaire, Pfeiffer, Lehman, Wendland en anderen, ook door Miquel, beschreven, en deze verspreide opgaven werden ten slotte door Miquel, in zijne Monographie tot een geheel samengevoegd. Miquel geeft, na eene algemeene beschouwing van het geslacht, vooreerst een sleutel der soorten, naar den aard, het getal, en verdere eigenschappen der dorens; vervolgens behandelt hij de soorten afzonderlijk, in eene andere volgorde, waarbij naar eene natuurlijke rangschikking gestreefd is. Volgende schrijvers hebben, in hoofdzaak, de volgorde van den eerstgenoemden sleutel overgenomen. Eerst Förster in zijn *Handbuch der Cacteënkande* 1846, daarna Labouret, in zijne *Monographie de la famille des Cactées*, 1852, en nu ook laatstelijk Rümpler,

---

*) *Acta Acad. Caes. Leop. Carol. nat. Cur.* Vol. XVIII. Suppl.

†) Revue de la famille des *Cactées,* Mém. du Musée d' Histoire naturelle 17. p. 1. e. v. 1828.

§) *Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gartenbaues in den Königl. Preussischen Staaten* III. 1827. p. 412, tab. XI. Het op de plaat afgebeelde voorwerp onderscheidt zich, behalve door den geheelen lichaamsvorm, door de veel langere, gekruiste randdorens. Ik onderscheid dit als *M. Linkii.* Men heeft het gehouden voor zijne var. *macrocephalus;* hiermede is echter eer een met den soorttype van Decandolle overeenstemmende vorm bedoeld geweest.

in zijne nieuwe uitgaaf van het Handboek van Förster, in 1886. Labouret heeft aan de groepen, waarin de sleutel van Miquel de *Melocacti* verdeelde, namen gegeven, en tevens de volgorde veranderd, zonder dat echter eenig voordeel van die verandering blijkt. Eene betere verandering dan de door hem gemaakte zou geweest zijn, de laatste afdeeling van den sleutel van Miquel, bevattende de soorten zonder centraaldorens, voorop te plaatsen, en verder de volgorde te behouden. Dan ware, wel is waar, de verdeeling kunstmatig gebleven, maar in elk geval eene meer geregelde opklimming van het eenvoudige naar het meer samengestelde verkregen. Waarom Miquel zelf in zijn sleutel die eenvoudigste groep achteraan heeft geplaatst, terwijl hij in de eerste groep, met centraaldorens, naar het getal van deze, en vervolgens naar dat der rand-dorens, in 't algemeen opklimmend te werk gaat, is niet duidelijk; in elk geval zet hij echter deze soorten voorop bij de rangschikking der beschrijvingen in het werk zelf, waarin naar eene natuurlijke rangschikking gestreefd wordt. De oorzaak, waarom men niet liever deze volgorde dan den kunstmatigen sleutel gevolgd heeft, komt mij voor daarin gelegen te zijn, dat Miquel die volgorde niet nader gemotiveerd heeft, en zij, bij den eersten opslag, eenigszins vreemd schijnt. Eerst bij nadere studie ziet men het streven, om in 't algemeen van het eenvoudige naar het meer samengestelde op te klimmen, maar met omkeeringen en verschuivingen, om in ander opzicht verwante vormen bij elkander te brengen. Miquel zelf beschouwt het als een voorloopige proeve, maar het is zeker, dat hij in die proeve althans den weg naar de natuurlijke verwantschap gewezen heeft.

De aansluitingen zijn van te verschillenden aard, om daaraan, in eene eenvoudige rangschikking der soorten achter elkander, eene duidelijke uitdrukking te geven, en vaak ook van te subtielen aard, em er duidelijk beschrijfbare kenmerken van groepen aan te ontleenen. Bovendien missen wij van de meeste nog de beschrijving van bloem en vrucht: welke organen, al kunnen zij hier, reeds om deze reden alleen, niet op den voorgrond worden gesteld, toch, als zij bekend zijn, in anders twijfelachtige gevallen van verbinding of

scheiding, een machtigen doorslag geven. Men zal nog lang, in het opsporen en wegen der verwantschap, moeten volgen wat de oudere Decandolle eigenaardig de »méthode de tâtonnement" noemde. Wat de uitdrukking der verwantschap, voorzoover gevonden, betreft, komt mij eene graphische voorstelling, waarbij de soorten op van een aanvangspunt opklimmende en radieerende lijnen de meest geschikte voor. Op deze lijnen zijn dan de meer eenvoudige vormen in elke reeks het naast bij het aanvangspunt, en de meest gecompliceerde het verst daarvan verwijderd te plaatsen. Waar eene dubbele aansluiting plaats heeft, kan men eene lijn zich laten vertakken; waar geen aansluiting aan eenvoudiger vormen gevonden is, kan men den tak op een afstand van het aanvangspunt vrij laten beginnen; en geïsoleerde vormen kunnen tusschen de lijnen worden aangebracht. Men zal ook hier eenigszins moeten geven en nemen, maar verkrijgt een beeld, een soort van morphologische stamboom, waarin althans ten naastenbij de betrekkingen tusschen de soorten kunnen worden uitgedrukt en met een opslag overzien. Naar gelang meer soorten bekend, en de bekende meer volledig bekend worden, is zoodanig beeld uit te breiden, en zooveel noodig te wijzigen.

Naar de mate van onze tegenwoordige kennis plaats ik dan, naast ééne korte lijn, de soorten waarbij nooit een middeldoren is waargenomen, en wel, naar het opklimmend getal der randdorens (5—8) in deze volgorde: *M. pentacentrus* Lem., *M. depressus* Hook., *M. violaceus* Pfeiff., *M. goniodacanthus* Lem., alle, zoover bekend, soorten van het vasteland van Brazilië. Bij één van deze (*M. violaceus*) is de bloem als van middelmatige grootte, (1 cm. diam.), met gekartelde bloembladen en met een 5-deeligen roodachtigen stempel beschreven; van eene andere (*M. depressus*) de kleine smalle langwerpig knotsormige (lichtroode) bes. De cephaliën enz. loopen nog al uiteen, zoodat deze vormen eenigzins op zich zelf staan. Langs eene tweede hierboven uitspringende lijn rangschik ik de soorten met een of meer (tot 4) middeldorens, doch die kleiner zijn dan de randdorens. Hiertoe behooren 10 soorten, van Brazilië, Mexico, Jamaica,

Cuba, St. Thomas, St. Croix, St. Eustatius, nl: *M. Ellemeetii* Miq. van Bahia, *M. Wendlandii* Miq. van St. Thomas, *M. Delessertianus* Lem. van Mexico, *M. meonacanthus* L. O. van Jamaica, *M. communis* D.C. van St. Croix en St. Eustatius, *M. havannensis* Miq. van Cuba, *M. rubens* Pfeiff. van West-Indië, *M. Linkii* (syn. *M. communis* L. O., non DC.) van West-Indië, *M. crassispinus* S. D. waarschijnlijk van Brazilië, *M. dichroacanthus* Miq. van St. Thomas. Van twee van deze zijn bloemen waargenomen: nl. van de zeer eigenaardige *M. Ellemeetii* Miq., vrij klein en rozerood, en bij *M. communis* Dc., middelmatig van grootte, met eenigzins getande vaak aangespitste bloembladen, met een 5- (4—6) straligen roodachtigen stempel, en eene vrij dikke, kleine, omgekeerd eivormige bes opleverend. Een zeer afwijkende vorm is onder deze *M. dichroacanthus* Miq., waar de hoogere dorens in elke groep grooter zijn dan de lagere. Met *M. cummunis* DC. zijn vermoedelijk eenige soorten, die eerst als variateiten daarvan beschouwd waren, na verwant. Zelve onderscheidt zij zich door reusachtigen bouw en buitengewoon hoog cephalium.

Als tweede zijtak, van ongeveer gelijke waarde, komen dan daarnaast de soorten met hoogstens één centraaldoren, doch deze grooter, in een enkel geval alleen dikker, dan de randdorens: *M. ferox* Pfeiff. van Zuid-Brazilië en Mexico, *M. Schlumbergianus* Lem. van St. Thomas, *M. Brogniartii* Lem. van onbekenden oorsprong, *M. Miquelii* Lehm. van St. Croix, *M. cæsius* en *M. griseus* (varieteit) Wendl. van Laguayra, *M. hystrix* Parm. van onbekenden oorsprong, *M. amoenus* Hoffgg. van Columbia, *M. atrosanguineus* H. B. van St. Thomas en *M. spatangus* H. B. van Curaçao, dus, behalve van het vaste land van centraal en Zuid-Amerika, van St. Croix, St. Thomas en eene, waarover nader, van Curaçao.

De beide eerstgenoemden schijnen, niettegenstaande het ver verwijderd vaderland, nauw verwant te zijn; de anderen staan eenigermate op zich zelf. De beide laatstgenoemden, en vooral de allerlaatste, vertoonen verwantschap met hoogere vormen uit de meerdoornige groep: *M. Salmianus* L.O. en *M. pyramidalis* S.D., gelijk reeds door Miquel is opgemerkt, en moeten dus naar de buurt van deze worden opge-

schoven. Bloemen zijn slechts bij twee, van het vaste land van Zuid-Amerika, waargenomen: bij *M. caesius* Wendl., van Venezuela, van middelmatige grootte ($1^1/_2$ cm. middellijn) met 7 geelachtige stempelstralen, en bij *M. amoenus* Hoffg. van Columbia, zeer groot ($2^1/_2$ cm. middellijn), de grootste tot dusver bekende.

Bij de vijf eersten zijn de randdorens klein ($1^1/_2$ of $2^1/_2$ cm.) en de centraaldoren weinig daarvan verschillend, terwijl het getal der randdorens 8 (bij *M. ferox* Pfeiff. 6—8) bedraagt. Bij *M. amoenus* Hoffgg. is de centraaldoren $2^1/_2$ cm. en zijn de randdorens $1^1/_2$ cm. lang, bij *M. atrosanguineus* H. B. zijn 10 randdorens; en *M. spatangus* H, B. heeft er 12—13, die bovendien naar weerskanten evenwijdig loopen, terwijl de centraaldoren 4—5 cm. lang is. Deze komt dus geheel uit en boven de lijn, in de buurt van *M. pyramidalis* S. D., en van de door mij op Bonaire verzamelde en beschreven *M. spatanginus*, waarmede zij wellicht later, als eendoornige vorm, onmiddellijk zal moeten worden verbonden.

Den hoogsten tak vormen dan eindelijk de soorten met twee of meer centraaldorens, krachtiger dan de randdorens. Hier ontmoeten wij de grootste verscheidenheid, en de hoogste vormen. De tak splitst zich als het ware in meerdere zijtakken, die, zelve weder vertakt, door menigvuldigheid en grootte, al het vorige breed overschaduwen.

De eenvoudigste vormen zijn hier: *M. curvispinus* H. B., van Mexico, *M. obtusipetalus* Lem., van Santa Fé de Rogota, *M. parvispinus* Sur. van Bonaire en *M. Koolwijkianus* Sur. van Aruba, bij welke alle de (1-)2 of 2—3 middeldorens weinig grooter zijn dan de randdorens, en de lengte ven deze niet meer bedraagt dan $2^1/_2$ cm. *). *M. obtusipetalus* Lem. bezit eene groote bloem, bijna zoo groot als *M. amoenus* Hoffgg., en *M. Koolwijkianus* Sur. eene vrij groote ($1^1/_2$ cm. in diameter); overigens verschillen zij in meerdere opzichten.

---

*) Dezer dagen ontving ik een nog eenvoudiger vorm, afkomstig van Venezuela, en die eene bijna onmiddellijke aansluiting levert met de ééndoornige groep. De beschrijving van deze soort zal als supplement aan dit stuk worden toegevoegd.

Buiten deze aanvangvormen behoort nu verder geene soort van deze hoogste groep stellig aan het vaste land. Van *M. Monvilleanus* Miq. wordt het door Miquel verondersteld, maar zonder opgaaf van redenen; van *M. Besleri* Miq. (non L. O.) is het vaderland eveneens onbekend; al de anderen, waarvan het vaderland bekend is, zijn afkomstig van St. Domingo, St. Thomas, en van Curaçao, Bonaire en Aruba; aan welke drie laatste eilanden, speciaal Aruba, voor het oogenblik het leeuwendeel toekomt.

Aruba op dezen grond als het plantengeographisch middelpunt van het geslacht te beschouwen, is misschien wat veel gewaagd, omdat bizondere omstandigheden er toe hebben medegewerkt, om vandaar het ruimste materiaal te verkrijgen. Behoudens enkele soorten, speciaal aan de noordkust van Zuid-Amerika, door botanisten verzameld, berustte vroeger de kennis der *Melocacti* op zonder wetenschappelijke kennis verzameld en naar de Europeesche tuinen gezonden materiaal. Ook werd wel, in den tijd, toen de liefhebberij voor Cacteeën heerschte, veel gezonden, maar niet alles werd wetenschappelijk bewerkt. Daargelaten nog onderscheidene twijfelachtige soorten, die al te onvolledig zijn beschreven om ze behoorlijk te kunnen identificeeren, en andere, die, zonder grondig onderzoek, hetzij bij *M. communis* DC. werden gevoegd, of voor *M. pyramidalis* S.D. of een der andere eerst beschreven soorten werden gehouden, werden vele, gelijk Förster aan het einde van zijne behandeling van het geslacht (l. c. p. 279) mededeelt, in het geheel niet gedetermineerd. Het spoedig afsterven van de ingevoerde exemplaren in onze kassen, het zeer langzaam ontwikkelen van de zaailingen, waarvan wel vele werden verkregen, maar waarvan, zoover bekend, geene tot volledigen wasdom zijn gekomen, deden de liefhebberij voor deze planten allengs verminderen; en het gemis van vergelijkingsmateriaal, bij de vaak onvolledige beschrijvingen, maakte de indentificatie der soorten hoogst moeilijk.

Indien nu ook de andere eilanden, in het bizonder St. Thomas, hetgeen reeds belangrijke en vrij uiteenloopende vormen heeft opgeleverd, meer opzettelijk werden onderzocht, zouden daar ongetwijfeld ook wel meer soorten worden aange-

troffen, dan men daarvan tot dusverre kent; ten slotte zou men wellicht tot de uitkomst geraken om de bakermat van het geslacht te zoeken op een thans verdronken land ergens tusschen onze eilanden onder den wind en St. Thomas in.

In elk geval maakt Aruba den indruk van niet ver daarvan verwijderd te zijn geweest, misschien een deel daarvan te hebben uitgemaakt. Het is niet alleen de rijkdom der vormen, welke dien indruk geeft, maar ook iets eigenaardigs in het karakter, iets wilds en oorspronkelijks, zelfs tegenover de vormen van Bonaire en Curaçao.

Naar de buitenzijde van het gebied worden de soorten eenvoudiger van bouw, en minder talrijk; de eenvoudigste heeft men, gelijk wij zagen, aan de kuststreken van het vasteland, deels van Mexico, deels van Zuid-Amerika, waar zij soms nog hoog op de bergen den zeewind zoeken, en verder komt dit hoogst eigenaardig plantengeslacht niet voor.

Om nu terug te keeren tot de straks genoemde vormen van den hoogsten tak, zoo heb ik voor *M. obtusipetalus* Lem. geene aansluiting aan hoogere te vermelden. Eigenaardig is bij deze soort het grooter zijn van den hoogsten centraaldoren, terwijl de lagere kleiner is en soms ontbreekt, juist omgekeerd als gewoonlijk. Diezelfde omgekeerde verhouding wordt bij *M. dichroacanthus* Miq. voor al de dorens gezamenlijk opgegeven; en de abnormale verhouding der centraaldorens, die Miquel bij *M. Zuccharinii* Miq. beschrijft, komt ook eenigzins in deze richting. Maar dit is ook alles. In 't algemeen verschillen deze soorten zoo zeer van elkander en van *M. obtusipetalus* Lem., dat aan eene aansluiting niet te denken valt. De zeer groote bloem, opgegeven als tweemaal grooter dan *M. communis* DC., dus minstens 2 cm. in omvang, herinnert aan *M. amoenus* Hoffgg. met hoogstens één (soms geen) centraaldoren, eveneens van Columbia, zoodat zij in elk geval in de nabijheid van dezen lageren vorm moet worden geplaatst.

M. curvispinus H. B. van Mexico, is reeds door Miquel geplaatst bij *M. Monvilleanus* Miq. en van *M. Besleri* (Miq. non L. O.) en daarbij komen de Arubaansche *M. arcuatus* (= *Monvilleanus* van mijne eerste lijst) en de nieuwe *M. un-*

cinatus. De bloemen zijn van geen van deze bekend; wel de zeer kolossale, tegelijk lange en dikke bessen van *M. arcuatus*, welke ook voorkomen bij *M. rectiusculus* Sur. l. c., eene met kleinere minder kromme dorens, maar die overigens in het algemeen karakter verwantschap met de vorige verraadt. Eene nieuwe, bij deze gelegenheid als *M. Baarsianus* te vermelden en te beschrijven, vertoont zeer groote overeenkomst met de beschrijving en afbeelding van het fragment van *M. Monvilleanus* Miq. Zij bezit ook het grooter aantal doornvelden en het lichtgekleurde cephalium. Vorm der ribben, aantal en lengte der dorens, en de geaardheid der doornvelden verschillen echter, zoodat eene identificatie, ook hier, gewaagd zou zijn. De dunne naaldvorm der dorens en hunne lengte en kleur, benevens het cephalium vertoonen eene toenadering tot de eveneens bij de vorige gelegenheid beschrevene *M. s tramineus* en *M. trichacanthus*. De bessen zijn hier ook lang, maar dun, even als in het evenwijdig takje van *M. approximatus* Sur. en *M. Evertzianus* Sur. De bloemen van *M. stramineus*, die echter niet goed zijn opengekomen, hebben middelbare grootte.

M. parvispinus Sur. van Bonaire voegt zich, als hoogst eenvoudige vorm, bij den zelf weer vertakten, schoonen tak, waarlangs *M. patens* Sur. van Bonaire, *Lehmanni* Miq. van Bonaire en Curaçao, *M. macracanthus* S. D. van Curaçao, Bonaire en St. Domingo, *M. cornutus* Sur. van Curaçao, *M. Salmianus* L. O. van Curaçao, *M. pusillus* Sur. van Curaçao, *M. intermedius* Sur. van Curaçao, *M. pyramidalis* S. D. van Curaçao en St. Thomas, *M. microcephalus* Miq. van Curaçao, *M. spatanginus* Sur. van Bonaire en Curaçao, *M. macracanthoides* Miq. van St. Thomas, *M. xanthacanthus* Miq. van St. Thomas, *M. Zuccharinii* Miq. van Curaçao en een vijftal nieuwe Arubaansche vormen moeten worden gerangschikt.

De dorengroepen bereiken in dezen tak hare hoogste ontwikkeling. De centrale dorens, van 2 tot 4, zelden 6 in aantal, worden forsch en lang, tot 6 cm. toe; de randdorens, in de eenvoudiger vormen regelmatig stralend, worden ook talrijker, en de zijdelingsche daarvan breiden zich horizontaal, evenwijdig aan elkander uit, en bedekken eindelijk den stam

met een dicht vlechtwerk. Wij hebben reeds opgemerkt, hoe de ééndoornige *M. spatangus* zich hierbij aansluit, en daarom op eene plaats onmiddellijk naast of wellicht zelfs in de groep zelve aanspraak maakt.

De bloemen, zoover bekend, zijn klein, omstreeks $^1/_2$ cm. in diameter en de bessen van middelbaren vorm en grootte; voorts de cephaliën niet bizonder borstelig.

Eigenaardig zijn *M. Lehmanni* Miq. met zijne lichtgroene kleur, donkere dorenvelden en effen, zeer fijnborstelig cephalium, en *M. macracanthus* S. D. met zijn, in verhouding tot de lengte bizonder dikke centraaldorens en groote, blijvend viltige doornvelden, in welk laatste opzicht de nieuwe Arubaansche soorten *M. flammeus*, *M. pulvinosus* en *M armatus* zich aansluiten. Op de afwijkende verhouding der dorens bij *M. Zuccharinii* Miq. is reeds gewezen. *M. microcephalus* Miq. draagt zijn naam naar het bizonder kleine cephalium; maar uit de afbeelding is duidelijk, dat het cephalium bij de beschreven voorwerpen nog jong was en zijne volle breedte nog niet had bereikt, terwijl de »doornachtige roode borstels" mij voorkomen nog tot de omringende doorngroepen te behooren.

Van *M. Koolwijkianus* Sur. opperde ik het vermoeden, dat zij wellicht als aanvangsvorm in eene reeks van *M. rubellus* Sur. zou tehuis behooren. Inderdaad heb ik naderhand soorten ontvangen, die de groote ruimte tusschen deze beide aanvullen.

M. Koolwijkianus heeft een betrekkelijk kleinen meest regelmatig eivormigen stengel, recht opgaande ribben, en doorngroepen met kleine ($2^1/_2$ cm.) regelmatig stralende randdorens en 2—3 weinig daarvan verschillende centraaldorens, alle recht of bijna recht, bijna rolrond en licht roodachtig gekleurd met lichtbruinroode wortels op kleine, weinig viltige dorenvelden. Het cephalium heeft donkerbruine, kromme, vrij sterke borstels. De bloem is vrij groot, fraai roserood, of iets meer purper en de bessen, omgekeerd eivormig, eenigzins dik, van middelgrootte; eene enkele maal werd een afwijkend zeer groote, en eenige malen een zeer kleine, blijkbaar onvolledig ontwikkelde bes ingezameld. Bij

eene varieteit: *adustus*, zoogenoemd wegens de nog lichtere dorens en donkerder als het ware verkoolde puntjes, zijn de dorens bovendien iets meer achterwaarts naar den stengel gebogen. Bij dezen vorm zijn de middeldorens ten getale von 2—3, 3—4 en van 4—6 gevonden.

Van dezen rustigen vorm uit divergeeren soorten in verschillende richting:

1⁰. *M. roseus* en *M. argenteus*, waar de centraaldorens langer zijn, de doornvelden grooter en viltiger, de bloemen ongeveer gelijk, maar de bessen alle smaller. Bij de tweede genoemde hebben de randdorens bovendien eenige neiging om naar beneden af te buigen.

2⁰. *M. flexus* en verwante, alle met een kleinen meer kegelvormigen stengel, min of meer spiralige samengedrukte ribben en hetzij rechte maar evenwijdig gerichte, of eenigzins opgebogen zij-randdorens. Naar den aard der dorens en der dorenvelden, benevens naar dien der bessen, zijn verschillende zijtakken te onderscheiden, gelijk uit de beschrijving blijkt. Mochten in een volgend jaar nog bloemen te voorschijn komen, dan zullen deze waarschijnlijk een nader inzicht in de verwantschap verleenen.

Op deze vormen volgt *M. ferus* (= *M. ferox* Sur. van de vorige lijst — waarvan de naam veranderd moest worden omdat hij reeds door Pfeiffer voor eene andere soort is gebruikt — met bleek groenen stengel en zeer lange dorens, de zijdelingsche op verschillende wijze gebogen, en dan de reeds vroeger beschreven *M. rubellus* Sur. en *M.* (*rubellus*) *hexacanthus* Sur. Aan denzelfden tak sluiten zich nog als eenigzins afwijkende vormen aan: *M. capillaris* en *M. compactus*, de laatste hoogst eigenaardig door zijne op het smalle veld als opgedrongene, opstaande en verschillend gekromde dorens.

3⁰. *M. stellatus* en verwanten, in 't algemeen eivormig, iets grooter dan *M. Koolwijkianus* Sur., eveneens met rechte ribben, maar deze veelal breed en met betrekkelijk vlakke zijden; de dorenvelden niet groot en niet sterk viltig; de dorens langer dan de genoemde soort, maar niet dikker, zoodat zij een slanker voorkomen hebben; de randdorens regelmatig stralend en de middeldorens niet veel van deze verschillend;

bij de meeste korte, zuiver kegelvormige bessen. Afwijkend, trouwens ook in ander opzicht, zijn een paar vormen met zeer groote langwerpig ei-kegelvormige bessen, en eenige met eenigzins horizontaal-evenwijdige en andere, met flauw naar beneden gebogen zijranddorens. Onder deze is een vorm, misschien als varieteit te beschouwen, met, in jongen toestand, bijna witte dorens, terwijl zij anders min of meer rood, of, door ouderdom, licht vuilbruin zijn. Bloemen, voor zoover waargenomen, zijn middelgroot, wat kleiner dan bij *M. Koolwijkianus* Sur. en tevens, zoowel van deze als onderling, eenigzins verschillende in den vorm der bloembladen. Dit verschil in de bloemen en bessen heeft mij genoopt, meer vormen afzonderlijk te houden, dan mij aanvankelijk, op grond van de vegetatieve organen alleen, noodig was geschenen. Het geheel is eene eenigzins eentoonige groep met minutieuze verschillen.

4^{0}. Naast en gedeeltelijk boven haar komt *M. radiatus*, met meer conischen vorm, samengedrukte ribben, meer viltige doornvelden en langer, ook meer ongelijke dorens, en hierbij *M. albispinus* met ivoorwitte, *M. eburneus* met daarbij boogswijs nedergebogen, en eindelijk *M. subulatus* met niet zeer lange, maar buitengewoon breede, platte, priemvormige dorens. Bij deze laatste, hoogst eigenaardige soort, waarbij een hoog langwerpige vorm voorkomt, stijgt het getal middendorens tot het hoogst waargenomen getal, nl. tot acht. Wij hebben hier te doen met een zijtak, die eenigszins in de richting naar de *curvispini* wijst. Bloemen heb ik nog niet gezien. De bessen zijn bij de eerstgenoemde soort kegelvormig, bij de volgende zeer dik kegel- en kegel-eivormig.

Uit dit overzicht blijkt, dat de *Melocacti* van Aruba, bij eene groote verscheidenheid onderling, slechts in een enkele richting, en wel door middel van hunne hoogste vormen, aansluiting maken met die van Curaçao en de andere eilanden. Behalve de reeds genoemde, welke zich bij *M. macracanthus* S. D. aansluiten, zijn het de thans nieuw beschrevene *M. trigonus* en *M. ovatus*, welke, de eene het naast met *M. patens* Sur., de andere het naast met *M. pyramidalis* S. D. overeenstemmen.

Voorts zal uit deze beschouwingen gebleken zijn, dat eene voortgezette studie der *Melocacti* er toe leidt, eene grootere verscheidenheid van vormen daarvan te leeren kennen, maar tevens een zekeren samenhang tusschen die vormen op te sporen, die, ook in verband met de geografische verspreiding, op ontwikkeling en genetischen samenhang wijst. Tevens echter blijkt er uit, dat onze kennis nog onvolledig is, en dat de verschillende vraagstukken, die zich voordoen, eerst van lieverlede, en bij benadering, zullen kunnen worden opgelost. Ik hoop in de gelegenheid te zullen zijn, dit onderwerp te vervolgen, en, terwijl ik voortga met het materiaal voor eene iconografie in gereedheid te brengen, voeg ik hier nu aan toe de beschrijving der nieuwe *Melocacti* en enkele aanvullingen betreffende de reeds vroeger beschrevene soorten.

VERKLARING DER KUNSTWOORDEN OP DE PLAAT.

Acentri: soorten zonder middeldorens.

Monocentri: soorten met één middeldoren, die langer (in een enkel geval even lang maar dikker) is dan de langste randdoren.

Microcentri: soorten met één of meer middeldorens, die echter, of waaraan de grootste, kleiner is dan de grootste randdoren.

Pleiocentri: soorten met twee of meer middeldorens, die, of waarvan de grootste, langer en doorgaans ook dikker zijn dan de grootste randdoren.

Radiantes: soorten, onder laatstgenoemde, waarvan de randdorens gelijkmatig of bijna gelijkmatig straalswijs uitgespreid zijn.

Flexi: soorten met weinig verschillende dorens en min of meer tot den evenwijdigen stand naderende, en hetzij rechte, of een weinig opgebogene zijdelingsche randdorens.

Intertexti: soorten met sterk verschillende dorens en evenwijdig loopende zijdelingsche randdorens, die, bij de sterkste

ontwikkeling in deze richting, een vlechtwerk om den stengel vormen.

De drie laatstgenoemde dorentoestanden gaan geleidelijk in elkander over; het niet scherpe der grens is door het geschaduwde der lijn uitgedrukt. De *flexi* zijn in het midden geplaatst, omdat zij zich deels bij de *radiantes*, deels bij de *intertexti* aansluiten. Een nieuw grenslijntje is tusschen de laatste en *M. compactus*, met zijne eigenaardig opstaande randdorens, getrokken.

MELOCACTI NOVI EX INSULA ARUBA,

ADJECTIS

SUPPLEMENTIS AD SPECIERUM JAM ANTE DESCRIPTARUM CHARACTERES.

AUCTORE

W. F. R. SURINGAR.



M. Koolwijkianus SUR. (*Verslagen en Mededeelingen der Kon. Akademie van Wetenschappen*, Afdeeling Natuurkunde, Ser. III. Vol. II. p. 183 sqq.)

Ad hujus speciei descriptionem addendum:

Flos laete coccineus maior (limbo bene aperto $1^1/_2$ cm. lato) $1—1^1/_2$ cm. e cephalio exsertus, petalis linearibus obtusis integerrimis, stigmate faucem attingente 5—6-radiato albo.

Bacca obovato-conica mediocris (3 cm. longa, $1—1^1/_4$ cm. crassa).

Caulis parvus (10—14 cm. altus, $12^1/_2—15$ cm. crassus) *costis* verticalibus vel subverticalibus; *spinae* marginales rectae vel plus minus versus caulem recurvatae 10—12.

var.: *adustus*,

spinis pallidioribus imis apicibus obscurioribus, *marginalibus* saepius et magis versus caulem recurvatis.

Praeter formam typicam 2—3-*spinam: spinis centralibus* 2—3.

forma 4-*spina*,

spinis centralibus (3—)4, $2^1/_4—3$ cm. longis.

forma *plurispina*,

spinis centralibus 4–6, quarta superiore spinulis 1—3 parvis collateralibus vicariata, inferiore ad 3 cm. longa, areolis aliquanto maioribus.

In hac forma stigma 8-radiatum observatum est.

Formae divergentes: caulis, junior placentiformis, adultus ovoideus, passim aliquanto subconicus vel depresso-globosus;

costae in nonnullis paullulum obliquae, earum numerus passim usque ad 15 auctus,

spinae in speciminibus vetustioribus quae ad hanc speciem pertinere videntur, decoloratae, sordide fusco-flavescentes, radicibus obscurius fuscis griseo-vaginatis et albo-marginatis, apicibus tantum hic inde rubellis, tomento in areolis parcissimo fusco;

baccae juxta normales in eodem specimine visae sunt: una praemagna ($4^1/_4$ cm. longa), tres breves oblongae (2 cm. longae, 1 cm. crassae) probabiliter non bene evolutae. Praeterea hac aestate in caldario evoluti flores baccas produxerunt complures, aliquanto quam typicas minores vel angustiores.

M. roseus.

Spinae non valde diversae, aciculares roseae plus minusve pruinosae; *marginales* $2^1/_2$—3 cm. longae, centralis inferior 3—$3^1/_2$ cm. attingens; *areolae* magnae tomentosae; *baccae* anguste oblongo-conicae ($2^1/_2$—4 cm. longae, $^3/_4$—1 cm. crassae). Cetera fere ut in *M. Koolwijkiano* Sur. (l. c.)

M. argenteus.

Spinae albicantes, *marginales* aliquanto versus caulis basin recurvatae; *costae* 14—15. Cetera ut in praecedente.

ejusdem var.: *tenuispina*,

spinis tenuibus, *marginalium* numero ad 12—13 aucto.

In utroque *M. roseo* et *M. argenteo*, formae 2-*spina* et 3—4-*spina* (spinis centralibus 2 et 3—4) observatae sunt.

Flos, in *M. argenteo* visus, cum illo *M. koolwijkiani* convenit.

M. obliquus.

Caulis parvus oblongo- vel depresso-ovoideo conicus, contortus, coeruleo-viridis.

Costae 11 obliquae valde compressae, circa areolas inflatae.

Areolae non valde numerosae (6—8) approximatae orbicularis magnae tomentosae.

Spinae mediocres non multum diversae, e radice rubra carneae, apice obscuriores, obtusangulo-subteretes;

marginales 11 subrectae (vel aliquanto versus caulem devel sursum incurvatae) patentissimae, laterales aliquanto parallelae costam vicinam non attingentes, $2^1/_2$ cm. longae;

centrales 2(—3) subrectae, inferior 3 cm. longa.

Cephalium adhuc minimum.

Flos non visus.

Baccarum character nondum certo constitui potuit.

ejusdem *forma* 4-*spina*,

Spinis centralibus 3—5, ad $4^3/_4$ cm. longis, *marginalibus* ad 4 cm. longis.

M. limis.

Caulis parvus ovatus contortus coeruleo-viridis 11 cm. altus, 14 cm. crassus.

Costae 12 obliquae valde compressae circa areolas crasse inflatae, lateribus profunde impressis, sulcis sinuosis, dorso plicato nasuto.

Areolae 6—7 subdistantes, parvae suborbiculares parce tomentosae, anguste circumvallatae.

Spinae mediocres subaequales, e radice rubella carneae versus apicem obscurius rubrae;

marginales 10—11 patentissimae, laterales 3—4 utrinque subparallelae, aliquanto sursum incurvatae costam vicinam attingentes eique adpressae, inferiores 3 radiantes subrectae lateralibus aequales $2^1/_2$ cm. longae;

centrales (2—)3, subteretes, inferior cum superioribus fere aequilongis ($2^3/_4$ cm.) leviter sursum curvata vel recta.

Cephalium (adhuc minimum) setis rubris circumdatnm.

Flos non visus.

Baccae mediocres anguste obovatae-obconicae coccineae (circa 3 cm. longae, $^3/_4$ cm. crassae).

M. flexus.

Caulis parvus conico-ovoideus contortus coeruleo-viridis.

Costae 11 obliquae compressae, circa areolas inflatae.

Areolae non valde mumerosae (6—7) approximatae parvae vel mediocres, parce tomentosae.

Spinae non valde diversae lineari-teretes vel obtusangulae et aliquanto a latere compressae, e radice fusca rubellae;

marginales 9—10, patentissimae subrectae, laterales aliquanto parallelae $2^1/_2$ cm. longae;

centrales 2(—3) inferior plerumque recta 3 cm. longa.

Cephalium disciforme, setis rubris curvatis versus centrum rarioribus munitum.

Flos non visus.

Baccae mediocres et majusculae (3—$3^3/_4$ cent. longae, 1 cm. crassae) conico-obovatae. In eodem specimine una bacca angusta; alterum specimen duas baccas parvas, unam conicam, alteram oblongam probabiliter non ad formam normalem evolutas produxit.

A praecedente praesertim baccis, ad *M. stellati* typum accedentibus, a *M. obliquo* areolis minoribus, minus tomentosis distinguitur.

M. incurvus.

A praecedente differt *spinis* marginalibus longioribus (3 cm.) sursum incurvatis et *baccis* minoribus, aliquanto crasso-obovoideo-conicis ($2^1/_2$ cm. circa longis, 1—$1^1/_4$ cm. crassis).

Ejusdem var.? *M. nanus*:

Caule minimo, conico 10 cm. alto, $10^1/_2$ cm. lato, *spinis* crassiusculis, marginalibus 8, centralibus 1—2.

Postquam per biennium in caldario asservatum fuit, initium cephalii hac aestate formare incepit.

M. capillaris.

Distinguitur *spinis* tenuibus elongatis varie flexuosis, marginalibus lateralibus supra costam vicinam extensis; et *baccis* angustis elongato-obconicis ($2^3/_4$—$3^1/_2$ cm. longis, $^3/_4$ cm. crassis).

Visae sunt formae:

unispina, spina centrali 1(—2) inferiore vel solitaria $3^1/_2$—$4^1/_2$ cm. longa, marginalibus 7—9.

bispina, spinis centralibus 2—3, inferiore 3 cm. longa, marginalibus 10—11.

M. extensus.

Caulis parvus ovoideo-conicus pallide coeruleo-viridis (10—12 cm. altus, basi 11—12 cm. crassus).

Costae 12—14 subverticales vel obliquae valde compressae, circa areolas inflatae, sulcis profundis angustis sinuatis.

Areolae non valde numerosae (6 – 7) parvae vel mediocres subrotundae et oblongae, tomento griseo-rubello praeditae.

Spinae non multum diversae tenues aciculares, strictae vel plus minus flexae, e radice fusca, anguste albo-marginata, carneae et pallide fuscae, saepe maculatae;

marginales 10—11 patentissimae, laterales aliquanto parallelae et costam proximam petentes, subinde attingentes,

centrales 2—3(4) rectae vel aliquanto sursum incurvatae, inferior maior subinde aliquanto decurvata, teretes vix obtusangulae, passim a latere subcompressae.

Cephalium adhuc parvum disciforme setis rubris curvatis obsitnm.

Flos non visus.

Bacca crassa breviuscula obovata vel obconica ($2^3/_4$—$3^1/_4$ cm. longa, $1^1/_4$—$1^1/_2$ cm. crassa) saturate coccinea.

M. rudis.

Caulis parvus conicus pallide, vix coeruleo-viridis (13 cm. altus, 14 cm. crassus).

Costae 10—13 obliquae, valde compressae, circa areolas valde inflatae, sulcis profundis sinuosis.

Areolae non numerosae (6—7) satis distantes, majores, oblongae, late sed non alte circumvallatae, rubello-, demum griseo-tomentosae.

Spinae non multum diversae, majores et crassiores, evidenter compressae, subulatae, e radice fusca angustissime marginata pallide carneae rubro-maculatae, rectae et varie curvatae,

marginales plerumque 10, inferior longior (ad 4 cm.) laterales ($3^1/_2$ cm.) cum ceteris radiantes vel plus minus parallelae, snpra costam proximam extensae, omnes nunc rectae, nunc versus caulem re- vel leviter sursum incurvatae,

centrales 2(—3) inferior recta vel cum superiore minore sursum incurvata, evidenter a latere compressa obtuse quadrangula 4—5 cm. longa.

Cephalium emortuum in specimine unico gemmis duabis cephalophoris adhuc junioribus, nondum setis propris munitis, renovatum.

Flos et *fructus* non visi.

Habitus *M.* (*rubellum*) *ferum* (= *M.* (*rubellum*) *ferocem* Sur. l. c.) in memoriam revocat; species tamen potius analogae quam cognatae.

M. martialis.

Caulis conicus obscurius coeruleo-viridis 16 cm. altus 17 cm. crassus.

Costae 13 obliquae compressae, circa areolas late inflatae, inter eas vix angustatae, hinc sulcae subrectae, dorso nasuto.

Areolae 7 remotiusculae majores suborbiculares tomentosae vix impressae.

Spinae omnes robustae rigidae rectae e radice fusco-nigra breviter albomarginata pallide rubrofuscae, inferiores griseolutescentes,

marginales 10 (9—11) patentissimae aciculares rectae aequaliter radiantes, vel passim laterales aliquanto parallelae, cos-

tam proximam attingentes, saepe ei adpressae, infima plerumque aequilonga, (4 cm.) $1^1/_2$ cm. crassa;

centrales 3 (2—4) subuliformes obtusangulae rectae vel superiores levissime sursum, inferior deorsum curvata, haec nunc superne, nunc a latere compressa, 5 cm. longa, $2^1/_2$ mm. crassa, diametro minore $2^1/_4$ mm.

Cephalium disciforme, setis rubrofuscis firmis curvatis, excepta parva parte centrali, aequaliter obsitum.

Flos majusculus pallide roseus $^1/_2$ cm. e cephalio exsertus, limbo $1^1/_4$ cm. lato, petalis apice obovatis obtusis inaequaliter denticulatis, stigmate 6-radiato albo.

Baccae elongato-conicae coccineae, vertice plano obscuriores ($3^1/_2$ cm. longae, 1 cm. crassae).

M. (*rubellus*) *ferus.*

Syn: *M.* (*rubellus*) *ferox* Sur. l. c. Nomen mutandum fuit quia cl. Pfeiffer jam antea *Melocacti* speciam *ferocem* vocavit.

M. compactus.

Caulis (in specimine adulto) oblongus aliquanto pallide coeruleo-viridis (15 cm. altus, 14 cm. latus s. c.)

Costae 11 subverticales acutae superne compressae, sulcis subrectis.

Areolae (8—9) non valde approximatae immersae, circumvallatae, oblongae, parcius fusco-tomentosae.

Spinae paullum diversae tenaces varie flexae et tortae, pleraeque a latere compressae e radice griseo-vaginata breviter fimbriata carneo-rubrae demum fuscescentes;

marginales (10—) 11 erecto-patentes, inferior ad 3 cm. longa;

centrales 2—3, ad 4 cm. longae.

Cephalium parvum discforme setis fusco-rubris curvatis obsitum.

Flos non visus.

Baccarum character adhuc dubius.

Obs. Specimen junius, initium cephalii tamen possidens,

depresso-ovoideus coeruleo-viridis, costis magis toruloso-inflatis, areolis paucioribus (6) characterem spinarum hujus speciei peculiari modo compactarum haud minus quam adultum occulis offert.

M. pentacanthus.

Caulis parvus ovoideo-conicus, aliquanto contortus (13 cm. altus, $13^1/_2$ cm. crassus) pallide et laetior viridis.

Costae 11 obliquae compressae, circa areolas valde inflatae, sulcis profundis sinuatis.

Areolae non numerosae (7) aliquanto distantes majores, brevi-oblongae, parcius tomentosae.

Spinae non valde diversae e basi rubella, sordide fusco-, in infimis griseo-vaginata breviter albo-marginata carneae, subteretes obtusangulae, aliquanto a latere compressae, pro majore parte rectae;

marginales 11—12, laterales cum ceteris radiantes vel plus minus parallelae, interdum leviter sursum curvatae supra sinum cruciatae, inferior longior (3 cm.);

centrales 4 in rhombum dispositae vel 5, duae superiores collaterales minores, sive ultima cum duabus inferioribus mediana, penultimae collaterales, superior vel superiores tenues breves sursum incurvatae, laterales et inferiores plerumque rectae, infima rarius aliquanto deorsum recurvata, haec ad $3^1/_2$ cm longa.

Cephalium disciforme, setis firmis fusco-rubris curvatis satis dense obsitum.

Flos non visus.

Bacca unica mediocris obconica, $3^1/_4$ cm. longa, 1,1 cm. crassa.

Affinitas adhuc dubia.

M. (radiatus) contortus.

Caulis conico-oblongus, ad 17 cm. altus, 12 cm. crassus pallide coeruleo-viridis.

Costae 12—14 obliquae valde compressae, circa areolas inflatae, dorso inter eas acuto.

Areolae 8 mediocres aliquanto oblongae anguste circumvallatae.

Spinae evidenter diversae, e radicibus carneis vix marginatis roseae et pruinosae, aciculares a latere compressae;

marginales (10—11) patentissimae, laterales aliquanto parallelae rectae et varie flexae costae proximae adpressae, $3^1/_2$ cm. longae;

centrales 2, inferior recta vel cum superiore minore sursum incurvata, $4^1/_2$—5 cm. longa.

Cephalium adhuc nullum. Areolae superiores rotundae valde tomentosae.

Obs. Specimen junius conico-ovatus (10 cm. altus, 12 cm. latus) coeruleo-viridis, areolis 5—6, spinis paullo minoribus.

M. radiatus.

Differt a praecedente *spinis* marginalibus rectis aequaliter radiantibus, omnibus paullo minoribus.

Cephalium (adhuc minimum) setis curvis rubro-fuscis obsitum.

Flores nondum visi.

Baccae minores obconicae, $2^1/_2$ — fere 3 cm. longae, $^3/_4$— fere 1 cm. crassae.

M. albispinus.

Differt a praecedente: *colore caulis* obscuriore, *spinis* minus diversis, subteretibus, e radice rubella eburneis, *cephalio* setis tenuibus cinnabarinis obsito et *baccis* majusculis crassis obconicis, 3—4 cm. longis, ad $1^1/_2$ cm crassis.

Praeter formam *bispinam*, spinis centralibus 2(—3) inferiore $3^1/_4$ cm. longa, marginalibus ad $2^3/_4$ cm. longis,

forma *quadrispina*,

spinis centralibus 2—4, praeter quartam superiorem semper multo (ad $^1/_2$) minorem, saepe subaequalibus, ad $4^1/_4$ cm. longis, marginalibus 11—12, ad 3 cm. longis.

Species, imprimis haec forma, nobilissima.

M. eburneus.

Differt a praecedente *areolis* maioribus, *spinis* marginalibus et centrali inferiore deorsum arcuatis, et a plurimis *Melocactis* spina centrali inferiore non semper superiorem longitudine superante, sed nunc huic aequali, nunc aliquanto longiore vel breviore.

Praeter formam *bispinam*, spinis centralibus 2, 4 cm. longis, marginalibus 10, longitudine 3 cm.,

forma *plurispina*,

spinis centralibus (2) 3—6, superioribus minoribus, inferioribus ad $3^3/_4$ cm. longis, marginalibus 12—14, ad $2^3/_4$ cm. longis.

Costae in utraque 12.

M. euryacanthus.

Caulis oblongus et columnaris usque ad 32 cm. altus, 15 cm. crassus pallide sub-coerulescente viridis.

Costae 13 verticales latiusculae acutae sursum compressae, circa areolas sensim inflatae, sulco leviter sinuoso.

Areolae 8 magnae oblongae tomentosae, minus magisve remotae.

Spinae non multum diversae, pro ratione breviores, e radice rubella eburneae, complanatae, late subulatae;

marginales 12—13 cum vicinis vix cruciatae, fere aequaliter radiantes vel laterales aliquanto parallelae, rectae vel minus magisve versus caulem recurvatae, inferiores sensim majores ($2^1/_2$—$3^1/_2$ cm.) subinde leviter deorsum arcuatae, infima aliquanto maior vel minor, tota compages quasi semiflabellata;

centrales 2—7 (8), superiores minores plerumque leviter sursum incurvatae, inferiores majores rectae vel aliquanto sursum, vel infima leviter deorsum curvata, haec proximis nunc longior, nunc paullo brevior et subaequalis (3—4 cm.), omnes late subulatae.

Cephalium (adhuc junius) disciforme, setis satis firmis cinnabarinis obsitum.

Baccae mediocres obconicae et obovato-obconicae, pleraeque circa 3 cm. longae, $1^1/_4$ cm. crassae.

Species valde peculiaris et, pro genere, formosa.

M. stramineus Sur. l. c.

Addendum: forma *pluricostata*.

Costis 18 angustis, interpositis 5 accessoriis partim in basi, partim in medio trunci orientibus.

M. Evertszianus Sur. l. c.

Ad hujus speciei descriptionem addendum:

Cephalium teres, setis sparsis rectis tenuisculis fusco-rubris obsitum.

Flos parvus roseus, stigmatibus 5 albis.

Bacca elongato-clavata.

M. Baarsianus.

Caulis oblongus, 17 cm. altus, 15 cm. crassus.

Costae 10 compressae, circa areolas inflatae, sinubus profundis.

Areolae 8—9 approximatae fere orbiculares, minores, impressae, tomentosae.

Spinae non valde diversae subteretes longe aciculares arcuatae, e radice pallide-fusca stramineae;

marginales 10(—11) fere aequaliter radiantes, inferior longior (ad $4^1/_2$ cm.) omnes deorsum arcuatae;

centrales 2—4, 1—3 superiores plerumque rectae, rarius aliquanto sursum incurvatae, infima ceteras longitudine superante (4—$5^1/_2$ cm.) recta vel plerumque deorsum curvata, obtusangula vix compressa.

Cephalium teres 10 cm. crassum $8^1/_2$ cm. altum, setis tenuioribus fasciculatis cinnaberinis totum obsitum.

Specimen unicum eheu mortuum advenit, vix tamen collapsum, quo factum est ut praeter trunci colorem charactetes bene animadverti potuerint. Spinarum natura *M. stramineum* Sur. l. c. in memoriam revocat, sed forma earum curvata, areolae evidenter tomentosae et costae valde com-

pressae consociationi obstant. Affinis videtur *M. Monvilleano* MIQUEL et multo magis quidem quam species Arubiana, antea a me cum *M. Monvilleano* MIQ. conjuncta, nunc *arcuata* vocata. Differt tamen spinis maioribus crassioribus stramineis (non obscure fuscis), areolis evidenter tomentosis, costarum forma et earum dorso inter areolas alte sellato (in *Monvilleano* MIQ. vix repando). Nomen dedi in honorem venerandissimi VAN BAARS, qui specimen, etsi mortuum tamen pulcherrimum, cum multis aliis *Melocactis* mihi benevole misit.

M. Besleri MIQ. (non L. O.) p.p.

MIQUEL, Monographia generis *Melocacti*, Acta Acad. Caes. Leop. Carol. Nat. cur. Vol. XVIII. Suppl. p. 51, exclusis tamen omnibus quae ex specimine Berolinense a clar. LINK et OTTO descripto immixta sunt.

Melocactus BESLER, Hort. Eystettensis Ord. IV, fol. 1 cum tabula (exclusis synon. LOBELII et CLUSII).

Patria ignota.

Descriptio castigata, ex sola icone BESLERII l. c. desumpta:

Caulis maior, depresso- ovoideus glauco-viridis 20 cm. altus, 24 cm. crassus.

Costae 13 verticales crassae obtusissimae vix torulosae, inter areolas depresso-sinuatae.

Areolae paucae (5) valde distantes (4—$5^1/_2$ cm.).

Spinae paullum diversae omnes firmae crassae arcuatae sordide-fuscae;

marginales 7—8, suprema brevior, infima lateralibus subaequalis vel paullo brevior, omnes radiantes et versus caulem vel deorsum arcuatae;

centrales (rarius 1) 2—3, paullo maiores, superiores sursum arcuatae, inferior deorsum curvata vel recta maior ($3^1/_2$ cm.).

Cephalium disciforme 2 cm. altum, $9^1/_2$ cm. crassum, setis curvis, sparsis, passim fasciculatis, rubris, per totam superficiam aequaliter, non dense, obsitum.

Flores et *fructus* non delineati.

Species cum *Discocacto insigni* PFEIFF. confusa (FÖRSTER

Handbuch der Cacteeënkunde. 1846, p. 348) at non tota ad hujus synonymiam releganda. *Melocactus* Horti Eystettensis *Melocactus* verus, a LINKIANO separandus et solus servandus.

M. arcuatus.

Syn: *M. Monvilleanus* MIQ. SUR. l. c. cum descriptione a specimine Arubiano desumpta. Nimis autem a *M. Monvilleano* differt quin cum hac conjuncta maneat. Descriptio mea citata igitur ad nunc propositum *M. arcuatum* referenda. Huic proxime affinis *M. Besleri* MIQ. p. p. (non L. O. vide supra) a quo tamen caule minore, costis acutis, areolis minus remotis, spinis maioribus, et spinarum marginalium maiore numero discrepat.

M. uncinatus.

Caulis (junior) depresso-globosus, pallidius coeruleo-viridis ($7^1/_2$ cm. altus, $10^1/_2$ cm. crassus).

Costae 12, fere verticales, valde compressae, circa areolas tereti-inflatae, inter eas complanatae, dorso nasuto, sinubus profundis.

Areolae romotiusculae 4, majusculae, impressae et circumvallatae, parcius sed evidenter griseo-rubello-tomentosae.

Spinae non valde diversae, e radice obscure fusca vix marginata vel fimbriata, rubro-fuscae, demum griseo-fuscae, firmae subteretes longae curvatae;

marginales 10, vel addita parva suprema 11, fere aequales ($3^3/_4$ cm. longae) radiantes vel laterales aliquanto parallelae, versus caulem et deorsum curvatae, costas vicinas attingentes et superantes;

centrales 2(—4) infima paullo major (ad $5^1/_2$ cm.) a latere compressa et deorsum curvata, superiores rectae vel sursum curvatae.

Cephalium, flores, fructus non visi.

Pulcherrimus huius seriei terminus.

M. elongatus.

Caulis oblongus (17 cm. altus, $15^1/_2$ cm. crassus) coeruleo-viridis.

Costae 11 (—13) fere perpendiculares, latiusculae acutae, lateribus leviter undulatis, sulcis latis, paullum flexuosis.

Areolae 7 remotae subrotundae majusculae albo-tomentosae, inferiores subnudae.

Spinae paullum diversae aciculares tenues sed firmae sub-rectae, e radice rubella, in vetustioribus griseo-viginata breviter albo-fimbriata, pallide carneae et flavescentes, versus apicem et maculatim rubellae;

marginales 10—11, superior vel superiores 2 debiliores, ceterae aequaliter radiantes valde patentes supra sinum cruciatae, inferior longior (ad $3^3/_4$ cm.);

centrales 2 (—3), superior vel superiores approximatae sursum curvatae, inferior recta vel paullum sursum curvata longior, (ad $4^1/_2$ cm.) obtuse quadrangula et aliquanto a latere compressa.

Cephalium disciforme setis rubro-fuscis crebris curvatis firmis munitum.

Flos (non bene apertus) exsertus mediocris (diam. limbi 1 cm.) coccineus, petalis obtusissimis, stigmatis radiis albis 6—7.

Baccae majusculae elongato-obovatae $3^1/_2$ cm. longae, 1 cm. crassae coccineae; accedunt formae utrinque divergentes, ad dimidium breviores et usque ad $4^1/_2$ cm. longiores, pro ratione crassiores et angustiores.

M. (*stellatus?*) *sordidus.*

Caulis depresso ovoideus ($11^1/_2$ cm. altus $14^1/_2$ cm. crassus).

Costae 11 subverticales rectae, paullum compressae circa areolas conico-inflatae, lateribus undulatis, dorso inter areolas acuto compresso plicato-nasuto.

Areolae 6 minores brevi-oblongae tomento parco lineari fuscescente praeditae.

Spinae vix diversae e basi fusco-griseo-vaginata breviter

albo-marginata sordide flavo-fuscescentes aciculares rectae, graciles sed firmae, subteretes;

marginales (9—)10 fere aequaliter radiantes, valde patentes, supra sinum cruciatae, inferior ad 3 cm. longa;

centrales 2, inferior aliquanto firmior et longior ($3^1/_2$ cm.) cum superiore leviter sursum curvata vel recta.

Cephalium tereti-convexum, setis fusco-rubris firmis curvatis satis aequaliter vestitum.

Flores mediocres, roseae et coccineae, ad $1^1/_2$ cm. ex cephalio exserti, limbo ad $1^1/_4$ cm. lato, petalorum apicibus ovatis obtusis, stigmatis radiis 6—8 albis.

Bacca minor obconica, $2^3/_4$ cm. longa, 1 cm. crassa, coccinea.

M. stellatus.

Caulis depresso-ovatus ($10^1/_2$—14 cm. altus, 14—17 cm. crassus) coeruleo-viridis.

Costae 11 verticales rectae latae aliquanto convexae, lateribus vix undulatis, dorso acuto leviter sellato vel nasuto, basi complanatae, sulcis fere rectis.

Areolae 6—7 subdistantes, vix immersae, parvae suborbiculares, tomento albo parciore at evidente praeditae.

Spinae subaequales aciculares rectae, e basi rubella pallidae fere stramineae, passim carneo-maculatae;

marginales 10—11, supremae 1—2 debiles, ceterae fere aequaliter radiantes (rarius laterales 2—3 aliquanto approximatae) inferior paullo longior ($2^1/_2$—3 cm.) valde patentes cum vicinis non vel vix cruciatae;

centrales (2) 3 in triangulum plerumque obliquum, vel 4 in rhombum dispositae, 3 inferiores subaequales ($2^3/_4$—$3^1/_4$ cm.) rectae, vel superiores leviter sursum incurvatae.

Cephalium disciforme, setis fusco-rubris firmis curvatis margine densius, in centro parcius obsitum.

Flos mediocris (non omnino apertus), 1 cm. e cephalio exsertus, coccineus, limbo (hoc statu) 8 mm. lato, petalorum apicibus ovato-oblongis acutiusculis vel etiam mucronatis saepius aliquanto denticulatis, stigmatis radiis albis 7.

Baccae minores obconico-obovatae, circa $2^1/_2$ cm. longae, 1 cm. crassae.

M. (stellatus) flavispinus.

Differt a praecedentibus: *spinis* aliquanto magis diversis, minus strictis, marginalibus (cum vicinis cruciatis) aliquanto parallele extensis et sive versus caulem sive sursum, quamquam levissime, curvatis, *areolis* adhuc nudioribus, et *baccis*, quarum plures ex eodem specimine provenerunt, exacte conicis, $2^3/_4$ cm. longis, 1 cm crassis (divergentibus aliquanto longioribus sive angustioribus).

In forma *bicephala* costae divergebant numero 15; hic spinae in gemmis novellis roseae, quod colorem sordide fuscoflavescentem spinarum in caule vetusto, vestigiis nonnumquam coloris rubelli commixtum, decolorationi tribuendum esse confirmat.

M. reticulatus.

A praecedente differt *spinis* marginalibus (11—12) tenuioribus, lateralibus magis approximatis, et *cephalii setis* subrectis tenuioribus. Flores et fructus ignoti. Ut duae sequentes, in hac serie aliquanto solitaria.

M. flexilis.

Differt *spinis* crassioribus varie curvatis. *Bacca* minor exacte conica ($2^1/_2$ cm. longa 1 cm. crassa) hospitium in stellatarum serie sibi vindicat.

M. obovatus.

Forma *caulis* obovati ($14^1/_2$ alti, 15 cm. superne crassi) peculiaris. *Areolae* 9—10 oblongae subnudae; *spinae* paulum diversae subteretes, *marginales* 10, supremis 1—3 tenuibus exceptis, aequaliter radiantes vel laterales aliquanto approximatae, e basi patente plerumque versus caulem recurvatae, rarius deorsum, rarissime sursum curvatae, non aut vix cruci-

atae. *Cephalii* initium disciforme sitis rubrofuscis curvatis obsitum.

Flores et *fructus* igmoti.

M. (*stellatus*) *dilatatus.*

Caulis depresso-ovoideus vel subglobosus coerulescente-viridis, 10—14 cm. altus, 15 cm. crassus.

Costae 11 verticales latae, basi complanatae, lateribus planiusculis leviter undulatis, dorso acuto, sulcis vix flexuosis.

Areolae 5—8 remotiusculae brevi-oblongae, minores, parcissime tomentosae.

Spinae non valde diversae e radice atrovaginata breviter sed evidenter albofimbriata, sordide olivaceo-fuscescentes subteretes et minus magisve curvatae;

marginales 9—11 fere aequaliter radiantes, ad $2^1/_2$ cm. longae, late patentes et versus caulem et deorsum leviter curvatae vix cruciatae;

centrales 2(—3), inferior maior (ad $3^1/_2$ cm.) recta vel cum superiore leviter sursum curvata.

Cephalium setis rubris curvatis munitum. In forma *polycephala* spinae juniores rubellae, areolae albo-tomentosae.

var.? *M. leucacanthus.*

Differt spinis radiantibus paucioribus (8—9) aliquanto magis deorsum curvatis et spinis in gemmis cephalophoris novellis albis, areolis minus tomentosis, in trunco vetusto calvis. Cephalii setae rubrae vel cinnabarinae. Baccae minores exacte conicae $2^3/_4$ cm. longae, 1 cm. crassae.

M. (*stellatus?*) *inflatus.*

Caulis depresso-globosus coeruleo-viridis 11 cm. altus, 15—17 cm. crassus.

Costae 11 verticales latissimae, lateribus planis vel convexiusculis, vix undulatis, sulcis subrectis basi evanidis, dorso acuto inter areolas vix prominulo.

Areolae 4—6 remotiusculae majores oblongae, parcissime fusco-tomentosae.

Spinae vix diversae aciculares subrectae, e radice griseo- vel atrofusco-vaginata breviter albo-marginata sordide fuscescentes subteretes;

marginales 9—10 fere aequaliter radiantes, rectae et levissime deorsum curvatae, vix cruciatae, $2^1/_2$—3 cm. longae;

centrales 2(—3), superior leviter sursum curvata, inferior maior ($2^1/_2$—$3^1/_4$ cm.) plerumque recta.

Cephalium teres ad 7 cm. altum. 9 cm. crassum, setis firmis fusco-rubris curvatis obsitum.

Flos coccineus mediocris 1—$1^1/_2$ cm. e cephalio exsertus, limbo ad $1^1/_4$ cm. lato, petalis linearibus apice angustatis margine erosis, stigmatis radiis 5—6 albis.

Bacca non visa.

Obs. In specimine quod cephalium destructum gemmis novellis restituere incepit, spinulae juniores rubellae, areolae albo-tomentosae.

M. trachycephalus.

Caulis depresso-globosus vel globosus 12—$14^1/_2$ cm. altus, 15—16 cm. crassus, obscurius coeruleo-viridis.

Costae 11 verticales latissimae convexiusculae, lateribus vix undulatis, sulcis subrectis, dorso acuto nasuto.

Areolae 6—8 fere superficiales brevi-oblongae majusculae, tomento parcissimo fusco praeditae vel nudae.

Spinae subaequales aciculares subrectae e radice plumbeo-vaginata brevissime albo fimbriata sordide fuscae;

marginales 9—10 fere aequaliter radiantes rectae vel paullum deorsum curvatae non cruciatae, inferior longior $2^1/_2$—3 cm. longa;

centrales 2, inferior major recta vel cum superiore leviter sursum curvata, $2^3/_4$—$3^1/_4$ cm. longa.

Cephalium e basi terete hemisphaericum 6—7 cm. altum, 10 cm. crassum, setis rubris subrectis aequaliter et dense etiam in vertice obsitum.

Flos non visus.

Baccae magnae elongato-obconicae ad 4 cm. longae, $1^1/_4$ cm. crassae; accedunt minores et angustiores ad $2^1/_2$ cm. longae 1 cm. crassae.

M. trigonus.

Caulis ovatus 15 cm. altus $12^1/_2$ cm. crassus, obscure coeruleo-viridis.

Costae 12 subverticales valde compressae, circa areolas tereti-inflatae, dorso inter eas angustato plicato-sellato et nasuto.

Areolae 8 approximatae circumvallatae impressae majores orbiculares tomentosae.

Spinae evidenter sed non magnopere diversae firmiores subrectae, e vagina pallide fusca anguste vel omnino non albomarginata sanguineae, vetustiores minus magisve pruninosae;

marginales 10—11 aciculares rectae vel subrectae fere aequaliter radiantes patentissimae, cum vicinis cruciatae, dorsum vicinum plerumque attingentes, praeter supremas parvas subaequales, $2^3/_4$ cm. longae $1^1/_2$ mm. crassae;

centrales 2(—3) subuliformes obtusangulae, subaequales vel superiores evidenter minores aliquanto sursum curvatae, inferior plerumque recta, rarius leviter deorsum curvata, e basi trigona aliquanto a latere compressa apice tereti, 4—$5^1/_2$ cm. longa, 2 mm. crassa.

Cephalium (adhuc minimum) setis rubris obsitum.

Flores non vidi.

Baccae parvae crassae obconicae vel basi ancipite ab uno latere, obovatae fusco-rubrae, $2^1/_2$ cm. longae, $1^1/_4$ cm. crassae.

Habitus illi *M. patentis* Sur. l. c. proximus; distinguitur forma minus oblonga, areolis etiam adultis tomentosis, spinis aliquanto minus diversis, marginalibus latius patentibus, cet. Baccarum color obscurus insignis.

M. ovatus.

Caulis (junior depresso-ovatus, areolis paucioribus) ovatus, 15 cm. altus, 13—14 cm. crassus, atroviridis.

Costae 14—15 oblquae, valde compressae, circa areolas tereti-inflatae, dorso inter eas angusto plicato-sellato vel nasuto.

Areolae 9 approximatae vix impressae brevi-oblongae majusculae tomentosae.

Spinae valde diversae e radice fusca albomarginata sanguinae et rubrofuscae, demum pruinosae et griseae;

marginales 13—17 tenues aciculares, supremae minimae, laterales utrinque 4—5 parallelae $2^1/_2$ cm. longae. 1 mm. crassae, costae proximae adpressae, inferiores 3—5 radiantes, infima aequilonga vel brevior, firmior, 2 cm. longa, 1,2 mm. crassa;

centrales 2—4 robustae subulaeformes, rectae vel aliquanto sursum incurvatae, inferiores fere aequilongae, subteretes obtuse tetragonae vel desuper compressae circa 4 cm. longae, 2 mm. crassae.

Cephalium adhuc nullum.

Habitus illi *M. pyramidalis* S.D. proximus; distant forma ovata non conica (l. pyramidalis), areolae evidentius tomentosae et spinae centrales minus angulatae.

M. flammeus.

Caulis ovatus 15 cm. altus et crassus, atroviridis.

Costae 13 obliquae valde compressae, circa areolas tereti-inflatae, dorso nasuto.

Areolae 8 approximatae magnae tomentosae, circumvallatae superficiales.

Spinae valde diversae, e radice fusca vix fimbriata adultae canescentes, juniores luteo-aurantiacae apicibus fuscis;

marginales 13—17 firmae aciculares, suprema parva mediana porrecta, si par adest, summae cum 4—5 paribus lateralium utrinque parallelae; hae supra costas vicinas expansae iisque adpressae, ad $3^1/_2$ cm. longae, 1, 2 mm. crassae; inferiores tres radiantes plerumque breviores (3 cm.) infima saepe crassior (1,5 mm);

centrales 3—4 superiores plerumque aliquanto sursum, inferior deorsum curvatae, haec plerumque aequilonga, desuper aliquanto deplanata, $4^1/_2$ cm. longa, 2,1 mm. crassa.

Accedit ad *M. xanthacanthum* Miq., qui colore pallido, areolis adultis glabris, spinis marginalibus lateralibus quam inferioribus brevioribus, et spinis centralibus longioribus (5—7 cm.) differt.

M. pulvinosus.

Caulis ovoideus (junior complanatus) 9—13 cm. altus, 14—15 cm. crassus, obscurius coeruleo-viridis.

Costae 12—13 obliquae, valde compressae, circa areolas crasse inflatae, inter eas profunde constrictae, dorso tenui sellato et nasuto.

Areolae 6—7 (in juniore 5—6) subdistantes maximae subrotundae copiose tomentosae, late circumvallatae sed vix impressae.

Spinae valde diversae, e radice pallide vel obscure fusca, non vel vix marginata, sanguineae et rubrofuscae, inferiores pruinosae minus magisve canescentes;

marginales 11—16, superiores parvae, ceterae subaequales vel infima lateralibus aliquanto longior; laterales utrinque 2—5, hic parallelae illic cum ceteris aequaliter radiantes, valde patentes, longitudine ($3^1/_2$ cm.) costam vicinam attingentes sed illi non adpressae, plerumque rectae, passim aliquanto sive sursum sive deorsum sive versus caulem flexae; inferiores 3 semper radiantes, aequales vel infima aliquanto longior (ad 4 cm.) et crassior ($1^1/_2$ mm.);

centrales 4 robustae subaequales vel suprema minor, infima paullo maior, superiores plerumque leviter sursum, infima recta vel levissime deorsum curvata, obtuse quadrangula, passim a latere compressa, 4—$5^1/_2$ cm. longa, diam. maximo ad $2^1/_2$ mm.

Cephalium nondum visum.

Areolis magnis tomentosis et spinis minus aequaliter quam in speciebus conformibus dispositis insignis.

M. armatus.

Caulis conicus atroviridis (junior depresso-ovatus 11 cm. altus 15 cm. crassus) adultus 17 cm. altus, 17—22 cm. basi crassus.

Costae 12—13 obliquae superne valde compressae circa areolas crasse inflatae, inter eas constrictae, dorso plicato nasuto.

Areolae (in juniore 6—7) 8—9 approximatae magnae sub-

orbiculares late circumvallatae, aliquanto impressae, evidenter tomentosae.

Spinae valde diversae, e radice fusca, non et vix marginata, juniores igneae, etiam rubro-fuscae, demum sordide flavescentes et pruinose canescentes;

marginales 10—13, patentissimae aciculares, supremae parvae, infima lateralibus aequalis sive paullo maior vel minor; laterales utrinque 2—5 parallelae costam vicinam attingentes eique adpressae sive liberae, 3—4 cm. longae, 1,1—1,3 mm. crassae;

centrales 3—4 maximae, subuliformes subteretes et aliquanto obtusangulae, rectae vel superiores leviter sursum, inferiores leviter deorsum, rarius omnes leviter sursum curvatae, subaequales vel suprema brevior, infima aliquanto longior, haec ad 6—7 cm. longa, basi 2—$2^1/_2$ mm. crassa et in illa mox aequaliter obtusangula, mox aliquanto a latere sive desuper compressa.

Cephalium adhuc parvum complanatum setis subrofuscis firmis obsitum.

Flos parvus roseus 2 cm. longus $^3/_4$ cm. e cephalio exsertus, limbo nondum 1 cm. lato, petalorum apicibus ovatis obtusis satis aequaliter denticulatis.

Bacca elongato-obconica $3^1/_2$ cm. longa, 1 cm. crassa, coccinea.

SUPPLEMENTUM

m. Octobr. 1889 Acad. traditum.

a. Species nova Venezuelana.

M. humilis.

Caulis depresso-ovoideus (10—$12^1/_2$ cm. altus, 17 cm. basi crassus cinereo-viridis.

Costae 12 perpendiculares basi fere complanatae superne sensim angustatae, lateribus fere planis, dorso acuto, depresso-nasuto, sinubus rectis modice profundis.

Areolae 7—8 approximatae parvae orbiculares impressae anguste circumvallatae, tomento griseo praeditae.

Spinae minimae, ab illis costae vicinae longe remotae, vix diversae, e radice crassiuscula griseo-fusca aliquanto fimbriata subteretes subuliformes, sordide olivaceo-fuscae;

marginales 8—9 patentissimae excurvatae, aequaliter radiantes, laterales passim leviter versus basin decurvatae, supremae 1—2 minimae, inferior lateralibus (7—10 mm. longis) aliquanto longior (ad 11 mm. longa, $^3/_4$ mm. crassa);

centrales 2, superior sursum directa et arcuata, lateralibus marginalibus subaequalis et spinulas marginales supremas fere occultans imo opprimens, inferior recta porrecta vel leviter deorsum directa, radiante inferiore crassior et longior (10—13 mm. longa, basi ad 1 mm. crassa).

Cephalium disciforme ($8^1/_2$ cm. latum, $3^1/_2$ cm. altum) griseo-tomentosum, setulis rubris sparsis vix emergentibus parce munitum.

Flos nondum observatus.

Bacca coccinea, apice fusco-rubrior, mediocris obovato-obconica (3 cm. longa, 1 cm. crassa).

Venezuela (Laguayra?).

Communicavit cum horto Lugduno-batavo vir spectatissimus C. W. R. Scholten jr. Florae amator bene notus Amstelodamensis.

Species infra *M. parvispinum* Sur. l. c. *pleiocentris* adjungenda, nexu cum specie *monocentra M. Miquelii* Lem. valde insignis.

---

b. Varietates Curassavicae.

M. Salmianus L. O.

Var. *adauctus*.

Caule magno globoso, *spinis* marginalibus longioribus, centralium numero pari superiore parvo accessorio ad 6 aucto.

Describendi gratia e collectione sua mutuatus est vir spectatiss. C. W. R. Scholten jr.

Var. *contractus.*

Caule minore, areolis approximatis, *spinis* quam in typo minoribus.

Ex horto Ultrajectino mutuatus est v. cl. N. W. P. Rauwenhoff.

M. microcephalus Miq.

Var. *olivascens.*

A typo differt *colore* caulis obscuriore et spinarum mox olivaceo, *areolis* aliquanto magis tomentosis et *spinis* tenuibus flaccidis.

Specimina ad describendum mutuati sunt v. spectatiss. C. W. R. Scholten et v. clar. N. W. P. Rauwenhoff.

OVER VIERVLAKKEN DOOR GELIJKVORMIGE DRIEHOEKEN BEGRENSD.

DOOR

P. H. SCHOUTE.



In het platte vlak voert een bijzonder geval van drie rechtstreeks gelijkvormige stelsels tot de punten, de driehoeken en den cirkel van Brocard. Beschouwt men nl. de drie rechtstreeks gelijkvormige figuren, waarvan de zijden BC, CA, AB van den driehoek ABC overeenkomstige segmenten zijn, dan zijn de drie dubbelpunten der figuren twee aan twee de hoekpunten van den tweeden driehoek van Brocard, is de gelijkvormigheidscirkel de cirkel van Brocard, enz. *). Wil men nu de vraag beantwoorden, of het overeenkomstige bijzondere geval van vier rechtstreeks gelijkvormige ruimtestelsels tot de overeenkomstige ruimtevormingen voeren kan †), dan moet men vier rechtstreeks gelijkvormige ruimtefiguren beschouwen, die op de zijvlakken BCD, CDA, DAB, ABC van een gegeven viervlak $ABCD$ beschreven zijn. Deze figuren zijn echter bij een willekeurig viervlak onmogelijk, eenvoudig omdat de zijvlakken in het algemeen niet

*) Men vergelijke:

H. Brocard's „Étude d'un nouveau cercle du plan du triangle" (*Association française,* Congres d'Alger, 1881),

G. Tarry's „Propriétés générales de trois figures semblables" (*Mathesis,* deel 2, 1882, blz. 75), en

J. Casey's *A sequel to Euclid* (supplementary chapter, sections 4, 5).

†) Zooals uit de laatste noot van het opstel blijken kan, is het voorzichtig zich omtrent dit punt geen illusies te maken.

gelijkvormig zijn. Dus is men genoodzaakt zich tot de viervlakken te beperken, die door gelijkvormige zijvlakken worden ingesloten.

In de volgende bladzijden wordt de vraag beantwoord of er viervlakken zijn, die door ongelijkbeenige gelijkvormige driehoeken worden begrensd. Daarbij blijkt, dat er twee verschillende soorten zijn; van deze is de eene reeds meermalen beschreven, de andere waarschijnlijk nog niet. Verder worden deze beide soorten op enkele van haar bijzonderheden onderzocht.

1. We stellen de ribben van het viervlak (fig. 1) door $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ voor en nemen daarbij aan, dat a_1, a_2, a_3 ribben van het grondvlak, a_4, a_5, a_6 opstaande ribben en a_1 en a_4, a_2 en a_5, a_3 en a_6 paren van overstaande ribben zijn. Bovendien drukken we de opstaande ribben door de betrekkingen $a_4 = \lambda_1 a_1$, $a_5 = \lambda_2 a_2$, $a_6 = \lambda_3 a_3$ in de overstaande ribben van het grondvlak uit.

Nu kan een ribbe a_1 in de twee driehoeken $a_1 a_2 a_3$ en $a_1 a_5 a_6$, tot welke ze behoort, al dan niet met zich zelve overeenkomen. In het eerste geval geldt een der evenredigheden

$$a_1 : a_2 : a_3 = a_1 : a_6 : a_5,$$
$$a_1 : a_2 : a_3 = a_1 : a_5 : a_6.$$

Van deze beide onderstellingen voert de eerste ($a_2 = a_6$, $a_3 = a_5$) tot gelijkbeenige driehoeken en dus niet tot ons doel. We onderzoeken dus onmiddellijk de tweede ($a_2 = a_5$, $a_3 = a_6$), waarbij tweemaal een paar overstaande ribben gelijk zijn ($\lambda_2 = \lambda_3 = 1$). In dit geval (fig. 2) wordt op twee wijzen aan den eisch voldaan. Eerstens door $\lambda_1 = 1$ te nemen, waarbij we een viervlak verkrijgen, dat door vier congruente driehoeken van willekeurigen vorm wordt begrensd. En ten tweede kan λ_1 verschillend van de eenheid aangenomen worden, mits

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4}$$

zij; dan kunnen dus de ribben zijn

$$a_1, a_2 = r\, a_1, \ a_3 = r^2 a_1, a_4 = r^3 a_1, a_5 = r\, a_1, a_6 = r^2 a_1,$$

of in a_1 als eenheid

$$1, \quad r, \quad r^2, \quad r^3, \quad r, \quad r^2,$$

waarbij r willekeurig blijft. Zooals dadelijk blijken zal, zijn deze beide gevallen de eenig mogelijke.

2. Komt geen der ribben met zich zelve overeen in de beide driehoeken, van welke ze deel uitmaakt, dan kan een paar overstaande ribben al dan niet met elkaar overeenkomen. We toonen eerst aan, dat de laatste dezer beide onderstellingen echter onhoudbaar blijkt te zijn, en daarna, dat de eerste niet tot het doel voert.

Beschouwen we de zijvlakken $a_1 a_2 a_3$, $a_1 a_5 a_6$ en $a_4 a_2 a_6$. Bij uitsluiting van het met zich zelve overeenkomen eener ribbe en het met elkaar overeenkomen van twee overstaande ribben is de overeenkomst alleen mogelijk op de twee wijzen, die door de schema's

$$\left.\begin{matrix} a_1\, a_2\, a_3 \\ a_5\, a_6\, a_1 \\ a_6\, a_4\, a_2 \end{matrix}\right\}, \qquad \left.\begin{matrix} a_1\, a_2\, a_3 \\ a_6\, a_1\, a_5 \\ a_2\, a_6\, a_4 \end{matrix}\right\}$$

aangegeven zijn. En hieronder kan $a_4\, a_5\, a_3$ in geen enkele der zes verschillende verschikkingen geplaatst worden, zonder dat elk der ribben a_3, a_4, a_5 òf met zich zelve òf met de overstaande ribbe overeenkomt.

Blijft derhalve alleen het geval te onderzoeken, dat twee overstaande ribben met elkaar overeenkomen, bijv. a_2 en a_5 in $a_1\, a_2\, a_3$ en $a_1\, a_5\, a_6$. We hebben dan de evenredigheid

$$a_1 : a_2 : a_3 = \quad a_6 : \quad a_5 : a_1,$$

d. i.

$$a_1 : a_2 : a_3 = \lambda_3\, a_3 : \lambda_2\, a_2 : a_1.$$

Hieruit volgt (fig. 3)

$$a_3 = \frac{a_1}{\lambda_2}, \qquad \lambda_3 = \lambda_2^2.$$

Nemen we nu ook het derde zijvlak $a_4\, a_2\, a_6$ in de beschouwing op, dan kunnen zich de vier gevallen

$$\begin{aligned} a_1 : a_2 : \frac{a_1}{\lambda_2} &= \lambda_1 a_1 : \lambda_2 a_1 : a_2, \\ &= \lambda_2 a_1 : \lambda_1 a_1 : a_2, \\ &= a_2 : \lambda_1 a_1 : \lambda_2 a_1, \\ &= a_2 : \lambda_2 a_1 : \lambda_1 a_1 \end{aligned}$$

voordoen; want in de tweede reden mag a_2 niet in de tweede plaats staan. Van deze vier onderstellingen geven de eerste twee $a_1 = a_2$; deze voeren dus tot gelijkbeenige driehoeken. Verder geeft de derde onderstelling ons een viervlak met de ribben

$$a_1,\ a_2 = \lambda_2^2 a_1,\ a_3 = \frac{a_1}{\lambda_2},\ a_4 = \lambda_2^4 a_1,\ a_5 = \lambda_2^3 a_1,\ a_6 = \lambda_2 a_1,$$

of in a_3 als eenheid

$$r, \quad r^3, \quad 1, \quad r^5, \quad r^4, \quad r^2.$$

Maar van dit viervlak (fig. 4) is het vierde zijvlak $a_4\, a_5\, a_3$ niet gelijkvormig met de drie anderen. En wijl de vierde onderstelling hetzelfde viervlak oplevert, zijn de boven gevonden twee viervlakken, die aan de vraag voldoen, de eenig mogelijken.

Het eerste der beide viervlakken is reeds meermalen behandeld *); de vorm er van hangt af van twee parameters,

---

*) Men vergelijke:

G. Dostor's „Le trièdre et le tétraèdre, etc." (*Grunert's Archiv*, deel 57, blz. 175),

E. Lemoine's „Quelques théorèmes sur les tétraèdres, etc." (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1880, blz. 113),

Chéfik-Bey's „Solution, etc." (*Nouv. Ann. de Math.*, 1880, blz. 403) en

J. Neuberg's „Mémoire sur le tétraèdre" (*Mémoires couronnés, etc*, 1884, art. 8), waaraan deze bronnen zijn ontleend.

de verhoudingen der ribben a_1, a_2, a_3. Van het tweede viervlak, dat waarschijnlijk nog niet beschreven is, hangt de vorm slechts van één parameter af, nl. van r.

3. Beschouwen we thans het geval $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ wat nader, dan blijkt onmiddellijk, dat de vereenigingslijn $A_1 A_4$ (fig. 5) der middens A_1 en A_4 van a_1 en a_4 tevens de lijn van kortsten afstand voor die ribben is en de drie lijnen van kortsten afstand $A_1 A_4$, $A_2 A_5$, $A_3 A_6$ elkaar in haar snijpunt O rechthoekig middendoordeelen. Zoo is $A_1 A_4$ loodrecht op a_1, omdat de verbindingslijnen van A_4 met de uiteinden van a_1 als overeenkomstige medianen van congruente driehoeken gelijk zijn. Zoo deelen de drie kortste afstanden $A_1 A_4$, $A_2 A_5$, $A_3 A_6$ elkaar middendoor, omdat ze vallen langs de lichaamsmedianen (verbindingslijnen der middens van overstaande ribben). Zoo staan $A_2 A_5$ en $A_3 A_6$ loodrecht op elkaar, omdat de zijden van den vierhoek $A_2 A_3 A_5 A_6$ gelijk zijn aan de helft der gelijke ribben a_1 en a_4 en deze vierhoek dus een ruit is, enz. Zoo blijkt dan, dat het viervlak kan worden voortgebracht door op een bepaalde wijs van een rechthoekig parallelopipedum vier congruente viervlakken af te kappen, en de inhoud van het overblijvende viervlak het derde deel is van den inhoud van het parallelopipedum.

Wat verder omtrent het viervlak gepubliceerd is, komt in hoofdzaak op het volgende neer:

a) De zijvlakken zijn scherphoekig.

b) De overstaande tweevlakshoeken zijn gelijk.

c) Het punt O is zwaartepunt, middelpunt van om- en ingeschreven bol en punt van LEMOINE.

d) De loodlijnen, uit de hoekpunten op de overstaande zijvlakken neergelaten, worden aangeraakt door een uit O als middelpunt beschreven bol; evenzoo de loodlijnen in de orthocentra op de zijvlakken opgericht *).

We laten het bewijs dezer eenvoudige stellingen hier ach-

*) Men vergelijke de literatuur boven aangewezen.

terwege. Alleen merken we op, dat de laatste kan worden uitgebreid op overeenkomstige lijnen van de vier rechtstreeks gelijkvormige figuren, beschreven op de driehoeken $a_1 a_2 a_3$, $a_1 a_5 a_6$, $a_4 a_2 a_6$, $a_4 a_5 a_3$ *).

Brengen we de begrenzende zijvlakken in elkaars verlengde door de opstaande zijvlakken naar buiten om op het grondvlak neer te slaan, dan ontstaat er (fig. 6) een met het grondvlak ABC gelijkvormige driehoek $A' B' C'$, waarvan A, B, C de middens der zijden zijn. Dus projecteert de top van het viervlak zich op het grondvlak $A B C$ in het snijpunt D der hoogtelijnen van driehoek $A' B' C'$ †). Is H het

---

*) Noemen we de vier rechtstreeks gelijke ruimtestelsels door de driehoeken $a_1 a_2 a_3$, $a_1 a_5 a_6$, $a_4 a_2 a_6$, $a_4 a_5 a_3$ bepaald F_1, F_2, F_3, F_4, dan gaan door een draaiing van 180° om $A_1 A_4$ als as F_1 en F_2, F_3 en F_4 in elkaar over, terwijl dit bij een dergelijke draaiing om $A_2 A_5$ met F_1 en F_3, F_2 en F_4, bij een dergelijke draaiing om $A_3 A_6$ met F_1 en F_4, F_2 en F_3 het geval is.

Het punt O is een gemeenschappelijk dubbelpunt.

Vier overeenkomstige punten P_1, P_2, P_3, P_4 zijn de hoekpunten van een viervlak, dat in eigenschappen met het gegevene overeenkomt. De inhoud van dit viervlak is standvastig en wel $2\frac{2}{3}\,a$, als het product der afstanden van het punt P_1 van F_1 tot de vlakken $A_2 O A_3$, $A_3 O A_1$, $A_1 O A_2$ gelijk a is. Voor punten P_1 in een dier vlakken gelegen is de inhoud dus nul en liggen de vier punten P_1, P_2, P_3, P_4 in een zelfde vlak, nl. in hetzelfde der drie genoemde vlakken, waarin P_1 ligt.

Een zeer merkwaardige eigenschap dezer vier stelsels F_1, F_2, F_3, F_4 is, dat een willekeurig stel van vier met elkaar overeenkomende lijnen l_1, l_2, l_3, l_4 hyperboloïdische ligging hebben. Men bewijst dit onmiddellijk door met betrekking tot drie onderling loodrechte assen een lijn aan te nemen en hierbij de drie lijnen te zoeken, die door een wenteling van 180° om elk der assen worden verkregen. Zoo doet de lijn bepaald door de vergelijkingen $y = ax + b$, $z = cx + d$ de hyperboloïde

$$(ad - bc)(acx^2 - bd) = cdy^2 - abz^2$$

ontstaan; op deze hyperboloïde hebben de vier beschrijvende lijnen een dubbelverhouding $\frac{bc}{ad}$ (of een der vijf hiermee in verband staande waarden). Bij de lijnen van het tetraëdrale complex voorgesteld door de vergelijking $bc + ad = 0$ zijn de viertallen van lijnen met hyperboloïdische ligging dus harmonisch. Zoo wordt meer algemeen de drievoudig oneindige verzameling van lijnen door deze dubbelverhouding met betrekking tot het assenstelsel in een bundel van tetraëdrale complexen gerangschikt, enz.

†) Wijl deze top zich noodzakelijk binnen den driehoek $A' B' C'$ projecteert en het hoogtepunt van een driehoek alleen dan binnen den drie-

hoogtepunt van driehoek $A\,B\,C$ en G het gemeenschappelijk zwaartepunt van $A\,B\,C$ en $A'\,B'\,C'$, dan is $D\,G = 2\,G\,H$ en het middelpunt O van den om $A\,B\,C$ beschreven cirkel, d. i. den negenpuntscirkel van $A'\,B'\,C'$, het midden van $D\,H$.

Volgens de door HERMARY *) gegeven constructie van de raakpunten der acht bollen, die de vier zijvlakken aanraken, met het grondvlak, is het duidelijk, dat de bollen in de daken beschreven vervallen, omdat hun middelpunten in het oneindige liggen. Slaan we nl. $C\,B\,A'$ om $C\,B$ naar binnen om, dan komt het derde hoekpunt in A'' op $B'\,C'$; anders gezegd, voor elke ribbe is de som der zes aanliggende vlakke hoeken 360^0. Omgekeerd is elk viervlak met drie oneindig groote dakbollen gelijk aan het thans beschrevene. Stelt nl. α de som der vlakke hoeken van A voor en hebben β en γ voor B en C dezelfde beteekenis, dan volgt uit de drie voorwaarden

$$\beta + \gamma = \gamma + \alpha = \alpha + \beta = 360^0$$

onmiddellijk

$$\alpha = \quad \beta = \quad \gamma = 180^0,$$

zoodat $B'\,C$ en $C\,A'$, enz. in elkaar's verlengde vallen en $A'\,B'\,C'$ dus een driehoek is met A, B, C tot middens der zijden.

De raakpunten der aangeschreven bollen zijn H (het raakpunt van den bol aangeschreven aan het grondvlak) en de op den omgeschreven cirkel diametraal tegenover A, B, C liggende punten A_1, B_1, C_1.

---

hoek ligt als de driehoek scherphoekig is, is driehoek $A'\,B'\,C'$ scherphoekig en dus ook driehoek $A\,B\,C$. Dit is een meetkundig bewijs van stelling *a*), die overigens onmiddellijk hieruit volgt, dat de zijden van $A\,B\,C$ de oppervlaktediagonalen van een rechthoekig parallelopipedum zijn. Naderen de driehoeken tot rechthoekige, dan nadert het viervlak tot een rechthoek met boven- en ondervlak, waarvan het eene door de eene, het andere door de andere diagonaal in twee rechthoekige driehoeken verdeeld is.

*) Men vergelijke *Bulletin de la Société mathématique de France*, deel 7 en *Wiskundige Opgaven*, deel 2 1882—1886, blz. 16.

Het raakpunt met den ingeschreven bol is O *).

4. Als men van de twee bij tegenoverstand congruente driehoeken ABC en BAD (fig. 7) den eersten om AB draait tot de afstand tusschen D en het nieuwe punt C gelijk is aan r^3, dan ontstaat het tweede viervlak, dat aan de gestelde eischen voldoet. Hierbij schijnen twee grensvoorwaarden van verschillende beteekenis op te treden. Stellen we $r \leqq 1$ — en dit is steeds geoorloofd, omdat vervanging van r door $\frac{1}{r}$ den vorm van het viervlak niet aandoet —, dan moet eerstens $r^2 \geqq (1 - r)$ zijn en ten tweede r^3 tusschen CD en DE liggen. Wijl echter de eerste voorwaarde, die aanwijst, dat er een driehoek met de zijden $1, r, r^2$ mogelijk is, dit ook voor een driehoek met de zijden r, r^2, r^3 aangeeft, moet r^3 tusschen CD en DE liggen, zoodra voldaan is aan de eerste en dan nu ook eenige voorwaarde. Werkelijk is dit het geval. Want daar $CD = r^2(1 - r^2)$ is, herleidt de voorwaarde $r^3 > CD$ zich tot $r^2 > (1 - r)$.

---

*) De merkwaardige ligging der raakpunten van in- en aangeschreven bollen is reeds door NEUBERG opgemerkt (t. a. p., art. 20). Ook is stelkundig door hem bewezen, dat de omgeschreven bol door de middelpunten der aangeschreven bollen gaat (t. a. p., art. 7).

Onze figuur geeft nog aanleiding tot de volgende opmerkingen:

De driehoeken ABC, $A'B'C'$, $A_1 B_1 C_1$ bepalen drie gelijkvormige en gelijkstandige stelsels F_1, F_2, F_3 met de dubbelpunten D, O, G.

Een reeds wat meer belangwekkend stelsel van drie gelijkvormige figuren wordt bepaald door de driehoeken $A'B''C''$, $A''B'C''$, $A''B''C'$, die met de aan de opstaande zijvlakken aangeschreven bollen in verband staan. Van deze figuren F_4, F_5, F_6 hebben F_5 en F_6 het punt A'' tot dubbelpunt, terwijl B'' en C'' achtereenvolgens dezelfde beteekenis hebben voor de paren F_6 en F_4, F_4 en F_5. Dus is de om ABC beschreven cirkel de gelijkvormigheidscirkel der drie stelsels, zijn A_1, B_1, C_1 de „onveranderlijke punten", is D het „richtpunt", enz.

We vermelden deze uitkomsten slechts terloops, omdat we bij het volgende viervlak meer samengestelde stelsels zullen beschouwen.

N.B. De naam „richtpunt" komt niet voor bij CASEY (t. a. p.); ze is ontleend aan TARRY's verhandeling „Sur les figures semblables associées" (*Mathesis*, deel 6, 1886, blz. 148) en komt o. a. ook voor in W. S. M'CAY's verhandeling „On three similar figures, etc." (*Transactions of the royal irish academy*, deel 29, stuk 10, van Juli 1889).

En verder is $DE^2 = 2r^4 + 2r^2 - 1$, zoodat $r^3 < DE$ achtereenvolgens overgaat in

$$r^6 < -1 + 2r^2 + 2r^4,$$
$$(1 + r^2)(1 - 3r^2 + r^4) < 0,$$
$$1 - 3r^2 + r^4 < 0,$$
$$1 - 2r^2 + r^4 < r^2,$$
$$1 - r^2 < r,$$
$$1 - r < r^2.$$

Deze eenige voorwaarde nu verlangt, dat r inligt tusschen de eenheid en $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ d. i. het grootste stuk der in uiterste en middelste reden verdeelde eenheid. Dus zijn de grenzen, waartusschen zich het tweede viervlak beweegt, het regelmatige viervlak en de rechte lijn AB (fig. 8), die door de punten C en D in uiterste en middelste reden verdeeld is. Hieruit blijkt, dat de grootste hoek der begrenzende driehoeken een speelruimte heeft van 60^0 tot 180^0 en er dus zoowel stomp- als scherphoekige driehoeken mogelijk zijn. Is $r^4 + r^2 = 1$, of $r = \frac{1}{2}\sqrt{2(\sqrt{5} - 1)}$, dan zijn de driehoeken rechthoekig.

Als een hoogeremachtsvergelijking bij elken wortel r een wortel $\frac{1}{r}$ heeft, brengt de substitutie $r + \frac{1}{r} = k$ vereenvoudiging; dit zelfde vindt plaats bij die met den driehoek $1, r, r^2$ in verband staande grootheden, die bij vervanging van r door $\frac{1}{r}$ niet veranderen. Als voorbeelden noemen we den middelsten hoek B en den hoek ω van Brocard. We vinden nl.

$$r^2 = 1 + r^4 - 2r^2 \cos B, \qquad \cot \omega = \frac{1 + r^2 + r^4}{4\,S},$$

als S den inhoud des driehoeks voorstelt. Hieruit volgt

$$\cos B = \frac{1}{2}(k^2 - 3), \qquad \cot \omega = \sqrt{\frac{k^2 - 1}{5 - k^2}}$$

en dus ook $B = 2\omega$. Werkelijk liggen de beide punten van Brocard op de deellijn van den middelsten hoek B en ligt in deze bijzonderheid het eigenaardige kenmerk des driehoeks $1, r\, r^2$ *).

Daar k tusschen 2 en $\sqrt{5}$ ligt, is de middelste hoek B begrepen tusschen 60^0 en 0^0 en dus de hoek van Brocard tusschen 30^0 en 0^0. Omdat 30^0 de volstrekte maximumwaarde is van ω, kan ω dus alle overigens ook mogelijke waarden hebben.

Zij P (fig. 9) het midden van de grootste ribbe AB, Q dat van de kleinste ribbe CD en O dat van PQ. Projecteeren wij de ribben van het viervlak op het in O loodrecht op PQ aangebrachte vlak. Omdat de projecties $A'B'$ en $C'D'$ van AB en CD elkaar in O middendoordeelen, is $A'C'B'D'$ een parallelogram. Dus zijn $A'C'$ en $D'B'$, $A'D'$ en $C'B'$ paren van evenwijdige lijnen en snijden de bij AC en DB, AD en CB behoorende lijnen van kortsten afstand de lijn PQ in verschillende punten loodrecht; dus kruisen deze lijnen elkaar onder de hoeken van het parallelogram $A'C'B'D'$.

Voor we verder gaan, drukken we enkele met het viervlak in verband staande grootheden uit in r en, als dit eenvoudig geschieden kan, in k. Daartoe stellen we achtereenvolgens door $\varphi, \varphi_r, \varphi_{r_2}, \psi$ de scherpe hoeken voor, waaronder AB en CD, AC en BD, AD en BC elkaar kruisen en de zijden van het parallelogram elkaar snijden, door l, m, n de afstanden der paren overstaande ribben en door V den inhoud van het viervlak. Dan vinden we

$$l^2 = -\frac{1}{4}(1 + r^2)(1 - 3r^2 + r^4),$$

---

*) Wijl de coördinaten der punten van Brocard bij een driehoek met de zijden a, b, c evenredig zijn met $\frac{c}{b}, \frac{a}{c}, \frac{b}{a}$ en $\frac{b}{c}, \frac{c}{a}, \frac{a}{b}$ zijn ze hier evenredig met r^3, 1, r^3 en 1, r^3, 1; dus is hun vereenigingslijn de lijn $x = z$. Liggen omgekeerd de beide punten met een der hoekpunten B op een rechte lijn, dan zal deze lijn den hoek B moeten middendoordeelen en $\frac{c}{b} = \frac{b}{a}$ moeten zijn.

$$A'C'^2 = \frac{1}{4}(1 + 2r^2 - 2r^4 + r^6),$$

$$A'D'^2 = \frac{1}{4}(1 - 2r^2 + 2r^4 + r^6),$$

$$cos\ \psi = \frac{1 - r^6}{\sqrt{(1+r^6)^2 - 4r^4(1-r^2)^2}} = \frac{(k^2-1)\sqrt{k^2-4}}{\sqrt{k^2(k^2-3)^2 - 4(k^2-4)}},$$

$$cos\ \varphi = \frac{1 + r^6 - (1 - 2r^2 + 2r^4 + r^6)}{2r^3} = r - \frac{1}{r} = \sqrt{k^2 - 4},$$

$$cos \frac{1}{2} \varphi_r = \frac{l}{r}, \qquad cos\ \frac{1}{2} \varphi_{r_2} = \frac{l}{r^2},$$

$$m = A'D' sin\ \psi, \qquad n = A'C' sin\ \psi,$$

$$V = \frac{1}{2} l r^3 sin\ \varphi = r^{\frac{9}{2}} \frac{5 - k^2}{4} \sqrt{k}.$$

Zijn de driehoeken rechthoekig, dan is

$$cos\ \psi = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad cos\ \varphi = \sqrt{\sqrt{5} - 2}\text{, enz.}$$

5. Nemen we een der beide driehoeken met de zijden r^3, r^2, r (fig. 10) tot grondvlak aan, noemen wij de tegenover die zijden liggende hoekpunten A, B, C, duiden we de overliggende hoeken des driehoeks en de gelijke hoeken der andere zijvlakken door A, B, C aan en slaan we de opstaande zijvlakken naar buiten om op het grondvlak neer, dan ontstaat een onregelmatige zeshoek $A B' C A' B C'$ met drie paar gelijke zijden. Uit deze figuur kan dan blijken, dat de drievlakshoeken van het viervlak alle gelijkbeenig zijn. Want om A en om den top T liggen twee hoeken A en een hoek B, om B en om C liggen twee hoeken C en een hoek B. Ook hierin onderscheidt zich dit tweede viervlak van het eerste, dat daarentegen gelijke overstaande ribben en gelijke overstaande standhoeken heeft. Heeft dit eerste viervlak dus recht op den naam van gelijkbeenig viervlak als men let op de overstaande ribben en overstaande standhoeken, zoo kan het tweede met betrekking tot de drievlaks-

hoeken dien naam dragen. In plaats van de lange benamingen »*gelijkbeenig met betrekking tot de paren van overstaande ribben*" en »*gelijkbeenig met betrekking tot de drievlakshoeken*" gebruiken wij liever de minder sprekende uitdrukkingen *regelmatig en onregelmatig gelijkbeenige viervlakken* *).

Uit het voorgaande blijkt verder, dat de som der zes vlakke hoeken aan de ribbe $A\,B$ gelijk is aan $2(A+B+C)$ d. i. aan 360^0 en dit met de zes vlakke hoeken aan de ribbe $A\,C$ eveneens het geval is. Dit leert ons, dat de bollen in de daken $A\,B$, $C\,T$ en $A\,C$, $B\,T$ oneindig groot zijn. Slaan we dus de opstaande zijvlakken naar binnen om, waarbij A' komt in A'', B' in B'' op $C\,B$ en C' in C'' op $A\,C$, dan ligt B'' op $A'\,C'$ en C'' op $A'\,B'$. Want volgens de door HERMARY †) gegeven constructie van de raakpunten dier bollen moeten de cirkels $A'\,B''\,C'$ en $A'\,B'\,C''$ in rechte lijnen overgaan. De raakpunten dier bollen met het grondvlak zijn dus in de loodrecht op $A'\,B'$ en $A'\,C'$ staande richtingen $C\,K_\infty$ en $B\,L_\infty$ in het oneindige verdwenen. En terwijl B'' en C'' op bepaalde lijnen der figuur liggen, is A'' een punt van den om $A\,B\,C$ beschreven cirkel en wel het snijpunt van dien cirkel met de lijn door A evenwijdig aan $B\,C$ getrokken §).

We onderzoeken waar de raakpunten van het grondvlak met de zes andere bollen liggen en maken daartoe gebruik van de stelling, volgens welke de acht raakpunten uit vier paren bestaan, waarvan de punten isogonaal verwant zijn

---

*) In een willekeurig viervlak zijn de zijden van de antiparallelle doorsneden evenredig met de producten der overstaande ribben en dus de antiparallelle doorsneden der vier drievlakshoeken onderling gelijkvormig (NEUBERG, t. a. p., art. 16). Bij het onregelmatig gelijkbeenige viervlak zijn deze doorsneden bovendien gelijkvormig met de zijvlakken; m. a. w. het viervlak door een antiparallelle doorsnee van een gelijkbeenig viervlak afgesneden is weer een gelijkbeenig viervlak. Deze eigenschap bezit het regelmatig gelijkbeenige viervlak niet.

†) Men raadplege de aangegeven literatuur.

§) De vierhoek $A\,C\,A''\,B$ is het antiparallelogram van HART, dat met de cel van PEAUCELLIER bij de omzetting van de rechtlijnige beweging in de cirkelbeweging (parallelogram van WAIT) voorkomt.

met betrekking tot driehoek $A\,B\,C$ *). Zoo doen de oneindig ver gelegen raakpunten K_∞ en L_∞ twee andere raakpunten K en L kennen. Deze punten moeten liggen op den omgeschreven cirkel, wijl deze kromme isogonaal overeenkomt met de lijn in het oneindige. En wijl de lijnen $A\,K_\infty$ en $A\,L_\infty$ isogonaal verwant zijn ten opzichte van $\angle\,B\,A\,C$ $\left(\text{want } \angle\,C\,A\,K_\infty = \frac{1}{2}\angle\,C\,A\,B' = \frac{1}{2}B\right.$ en $\left.\angle\,L_\infty\,A\,B = \angle\,L_\infty\,C\,A' = \frac{1}{2}\angle\,B\,C\,A' = \frac{1}{2}B\right)$ komt met K_∞ het snijpunt K van $A\,L_\infty$ en den cirkel, met L_∞ het snijpunt L van $A\,K_\infty$ en den cirkel overeen. Dus is $B\,L$ de deellijn van $\angle\,B$ en $K\,L$ evenwijdig met $B\,C$.

Op de deellijn van den hoek B liggen nog twee raakpunten M en M', de middelpunten der cirkels $A''\,B''\,C''$ en $A'\,B'\,C'$. Het eerste punt is het snijpunt der lijnen $B\,L_\infty$ en $C\,K$; want $B\,L_\infty$ deelt $A''\,C''$ en $C\,K$ deelt $A''\,B''$ rechthoekig middendoor. En het tweede punt is het snijpunt van $B\,L$ met de lijn isogonaal verwant met $A\,M$ ten opzichte van $\angle\,B\,A\,C$. Het verdient opmerking, dat L, M, M' gelegen zijn op de stralen van den omgeschreven cirkel, die loodrecht staan op de zijden $A\,C$, $C\,B$, $B\,A$ van $A\,B\,C$. Van L en M is dit onmiddellijk duidelijk. En wat M' betreft, vindt men $\angle\,B\,A\,M' = \angle\,M\,A\,C = \frac{1}{2}\angle\,B''\,A\,C = \frac{1}{2}B = \angle\,M'\,B\,A$. Bovendien ligt M' op de lijn $C\,K_\infty$, die isogonaal verwant is met $C\,K$ ten opzichte van $\angle\,A\,C\,B$.

Eindelijk worden de twee nog ontbrekende raakpunten gevonden met behulp van de stelling, volgens welke de acht punten twee aan twee op vier lijnen door A, op vier lijnen door B, op vier lijnen door C liggen †). Zoo is het eene het snijpunt N der lijnen $A\,M$, $B\,K_\infty$, $C\,L_\infty$, het andere het snijpunt N' der lijnen $A\,M'$, $B\,K$, $C\,L$. Bovendien ligt het snijpunt D van $A'\,A''$, $B'\,B''$, $C'\,C''$, dat de projectie is van

---

*) Neuberg, t. a. p., art. 20.

†) *Wiskundige Opgaven,* deel 2, 1882—1886, blz. 16.

den top T op het grondvlak, op de lijnen $K K_{\infty}$, $L L_{\infty}$, $N N'$. Dit punt D is tevens het tweede snijpunt der cirkels $A'' B'' C'$ en $A'' B' C''$ uit K en L beschreven. Want $K D = A L = A'' K$ en $L D = A K = L A''$.

Uit het feit, dat de top T zich in een punt D van de verbindingslijn $B D$ der punten van Brocard projecteert, volgt nog een merkwaardige bijzonderheid van het onregelmatig gelijkbeenige viervlak, die aldus onder woorden kan gebracht worden De vlakken, die door een hoekpunt en de punten van Brocard van het overstaande zijvlak gebracht worden, staan loodrecht op die zijvlakken en snijden elkaar in het middelpunt van den ingeschreven bol. Elk dier vlakken gaat door een der vier ribben, die men verkrijgt door de grootste en kleinste ribben weg te laten, nl. door de topribbe van den bij het hoekpunt behoorenden gelijkbeenigen drievlakshoek.

6. Tusschen de punten en lijnen der beschouwde figuur bestaan nog een reeks van betrekkingen, die achtereenvolgens mogen worden aangewezen.

a). De driehoeken $A C' B'$, $B C' A'$, $C A' B'$ (fig. 11) zijn gelijkbeenig en gelijkvormig, want hun tophoeken zijn het supplement van $C—A$. We vinden dus

$$\frac{C' A'}{r^2} = \frac{A' B'}{r} = \frac{C' B'}{1}, \text{ d. i. } \frac{C' A'}{B C} = \frac{A' B'}{C A} = \frac{B' C'}{A B}.$$

Hieruit blijkt, dat de driehoeken $A B C$ en $B' C' A'$ rechtstreeks gelijkvormig zijn.

b). De driehoeken $C A'' B''$ en $A B'' C''$ zijn gelijkbeenig en gelijkvormig, want hun tophoeken zijn B. We vinden dus

$$\frac{A'' B''}{r} = \frac{B'' C''}{1}, \text{ d. i. } \frac{A'' B''}{B C} = \frac{B'' C''}{A C}.$$

Bovendien is $\angle C'' B'' A''$, d. i. de hoek waaronder $C'' B''$ en $B'' A''$ elkaar snijden, gelijk aan $\angle A C B$, den hoek waaronder $A C$ en $C B$ elkaar snijden. Dus zijn de driehoeken $A B C$ en $C'' A'' B''$ rechtstreeks gelijkvormig.

c) Beschouwen we de drie rechtstreeks gelijkvormige figuren door de driehoeken ABC, $B'C'A'$, $C''A''B''$ bepaald, dan blijkt al aanstonds, dat de drie overeenkomstige lijnen BC, $C'A'$, $A''B''$ elkaar in B'' en de drie overeenkomstige lijnen CA, $A'B'$, $B''C''$ elkaar in C'' snijden. Maar ook de overeenkomstige lijnen AB, $B'C'$, $C''A''$ gaan door een punt. We bewijzen dit door te doen zien, dat het snijpunt P van AB en $B'C'$ ook op $C''A''$ ligt. Hiertoe merken we op, dat de punten P, B'', C'' gelijkstandige punten zijn van de bases der gelijkvormige gelijkbeenige driehoeken $AC'B'$, $BC'A'$, $CA'B'$, wat volgt uit de gelijkheid der hoeken PAB', $B''BA'$, $C''CB'$ (supplement van C). We hebben dus

$$\frac{C'P'}{C'B'} = \frac{C'B''}{C'A'} = \frac{A'C''}{A'B'},$$

d. w. z. $PB''A'C''$ is een parallelogram. Maar dan ligt P ook op $C''A''$. Want, omdat $A'C'$ en $C''A''$ door dezelfde lijn, nl. de deellijn van hoek $C'BA'$, rechthoekig middendoorgedeeld worden, zijn deze lijnen de evenwijdige zijden van een gelijkbeenig trapezium $A'C'A''C''$.

d) Volgens de theorie van drie rechtstreeks gelijkvormige figuren *) leveren deze in het algemeen een oneindig aantal van door een punt gaande overeenkomstige lijnendrietallen op, en gaan deze lijnen in elk der drie figuren door een vast punt, welke drie »onveranderlijke punten" op een cirkel liggen met de drie dubbelpunten der figuren twee aan twee. Blijkens het bovenstaande kan echter in het stelsel ABC elk der drie punten A, B, C op den rang van onveranderlijk punt aanspraak maken, daar de drie zijden van driehoek ABC tot drie drietallen van samenloopende overeenkomstige lijnen behooren. Wijl nu de negen hoekpunten der drie driehoeken niet op een cirkel liggen, hebben we hier te doen met het bijzondere geval, waarin de door de dubbelpunten gaande cirkel onbepaald wordt, door dat de dubbelpunten in een zelfde punt Q samenvallen. Denken we ons drie

*) Men vergelijke CASEY, t. a. p. en de laatste noot van art. 3.

rechtstreeks gelijkvormige stelsels met een gemeenschappelijk dubbelpunt Q door dit punt en drie overeenkomstige punten $R_1\ R_2\ R_3$ bepaald, dan kunnen zich twee gevallen voordoen. Òf de cirkel $R_1\ R_2\ R_3$ gaat door Q, òf hij doet dit niet. Wijl de vorm van den vierhoek $Q\ R_1\ R_2\ R_3$ niet verandert, als men van het drietal $R_1\ R_2\ R_3$ tot een ander drietal overeenkomstige punten overgaat, zal de verhouding van den cirkel $R_1\ R_2\ R_3$ tot Q in dit opzicht beslissend zijn voor alle cirkels door drie overeenkomstige punten. Bovendien zal elk drietal overeenkomstige lijnen in het eerste geval door een punt gaan en dit bij het tweede geval nooit kunnen plaats vinden. Zijn nl. l_1, l_2, l_3 overeenkomstige lijnen door R_1, R_2, R_3, dan volgt, als $Q\ R_1\ R_2\ R_3$ een koordenvierhoek is, uit de gelijkheid der hoeken $(Q\ R_1, l_1)$, $(Q\ R_2, l_2)$, $(Q\ R_3, l_3)$, dat l_1, l_2, l_3 den om $Q\ R_1\ R_2\ R_3$ beschreven cirkel in hetzelfde punt snijden, enz. *).

---

*) Gewoonlijk wordt de behandeling van dit bijzondere geval bij de algemeene theorie gemist. Men vergelijke TARRY's verhandeling (*Mathesis*, deel 2, 1882, blz. 73) en CASEY, t. a. p.

Als volgt kan ook stelkundig blijken, dat bij drie rechtstreeks gelijkvormige figuren met gemeenschappelijk dubbelpunt alle drietallen van overeenkomstige lijnen samenloopende lijnen zijn, als dit met een niet door het dubbelpunt gaand drietal het geval is. Zij het gemeenschappelijk dubbelpunt oorsprong van coördinaten, dan kunnen drie overeenkomstige lijnen door de vergelijkingen

$$\left.\begin{array}{l} x \cos \varphi + y \sin \varphi - a = 0 \\ x \cos (\varphi + \alpha) + y \sin (\varphi + \alpha) - p\, a = 0 \\ x \cos (\varphi + \beta) + y \sin (\varphi + \beta) - q\, a = 0 \end{array}\right\}$$

worden voorgesteld. Deze lijnen snijden elkaar onder de voorwaarde

$$\Delta \equiv \left| \begin{array}{lll} \cos \varphi &, \sin \varphi &, 1 \\ \cos (\varphi + \alpha), & \sin (\varphi + \alpha), & p \\ \cos (\varphi + \beta), & \sin (\varphi + \beta), & q \end{array} \right| = 0,$$

die reeds onafhankelijk van a blijkt te zijn. Maar ze is ook onafhankelijk van φ. Want, volgens den regel voor de vermenigvuldiging van determinanten, vinden we

$$\Delta^2 \equiv \left| \begin{array}{lll} 2 &, p + \cos \alpha &, q + \cos \beta \\ p + \cos \alpha, & 1 + p^2 &, p\, q + \cos (\alpha - \beta) \\ q + \cos \beta, & p\, q + \cos (\alpha - \beta), & 1 + q^2 \end{array} \right|,$$

Daar de figuren der driehoeken ABC, $B'C'A'$, $C''A''B''$ door een punt gaande drietallen van overeenkomstige lijnen toelaten, moeten de cirkels $AB'C''$, $BC'A''$, $CA'B''$ door het gemeenschappelijk punt Q der stelsels gaan. We bevestigen dit door rechtstreeks de drie dubbelpunten der figuren twee aan twee te bepalen.

e) We duiden de driehoeken verder aan door $U_1 V_1 W_1$, $U_2 V_2 W_2$, $U_3 V_3 W_3$ (fig. 12) en zoeken nu het dubbelpunt Q van de figuren F_2 en F_3. Daartoe brengen we volgende constructie in toepassing. Zijn twee rechtstreeks gelijkvormige figuren bepaald door twee segmenten DE en $D'E'$ van twee elkaar in S snijdende lijnen, dan is het dubbelpunt dier figuren het tweede snijpunt der cirkels $DD'S$ en $EE'S$ *).

Denken we ons F_2 en F_3 bepaald door $U_2 V_2$ en $U_3 V_3$, dan is het dubbelpunt het tweede snijpunt der cirkels $U_2 U_3 P$ en $V_2 V_3 P$. Van deze cirkels gaat de eerste ook door U_1, omdat de hoeken U_1 en U_2, die op den boog PU_3 staan, gelijk zijn, en de tweede ook door V_1, omdat de hoek $V_3 V_1 W_3$ het supplement is van C, d. i. van $W_3 V_2 V_3$. Dus is het gezochte punt op de cirkels $V_1 V_2 V_3$ en $W_1 W_2 W_3$ gelegen. Evenzoo bewijst men, dat het op den cirkel $U_1 U_2 U_3$ ligt, door van $U_2 W_2$ en $U_3 W_3$ uit te gaan. Dus hebben de cirkels $U_1 U_2 U_3$, $V_1 V_2 V_3$, $W_1 W_2 W_3$ een punt gemeen en is dit punt het dubbelpunt van F_2 en F_3. Maar langs denzelfden weg blijkt het ook het dubbelpunt te wezen van F_3 en F_1, enz.

f) Voert het tegelijkertijd naar buiten en het tegelijkertijd naar binnen omslaan der opstaande zijvlakken tot twee driehoeken, die rechtstreeks gelijkvormig zijn met ABC, zoo

---

waarin φ niet voorkomt, zoodat de voorwaarde $\triangle^2 = 0$ onafhankelijk is van φ.

Nemen we in $\triangle$ voor φ de waarde nul, dan is de voorwaarde door

$$\frac{p - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{q - \cos\beta}{\sin\beta}$$

voorgesteld, wat dan ook juist uitdrukt, dat drie overeenkomstige punten op een cirkel liggen, die door den oorsprong gaat.

*) Casey, t. a. p.

wordt door het naar buiten omslaan van telkens een en het naar binnen omslaan van de beide andere zijvlakken een drietal driehoeken verkregen, die alle bij tegenoverstand gelijkvormig zijn met $A\,B\,C$ en dus onderling rechtstreeks gelijkvormig. Deze driehoeken $B''\,C''\,A'$, $A''\,B'\,C'$, $A''\,B''\,C'$, (fig. 10) *) zijn gelijkvormig met $A\,B\,C$ om de volgende redenen. In driehoek $B''\,C''\,A'$ is $\angle A' = C$ en $\angle B'' = \angle B''\,C''\,A'' = A$. In driehoek $A''\,B'\,C''$ is $\angle C'' = C$, terwijl $B'\,C'' = B''\,C''$ is en de zijden om hoek C'' dus tot elkaar staan als $A''\,C''$ en $B''\,C''$, d. i. als 1 tot r. In driehoek $A''\,B''\,C'$ is $\angle C' = C$ en $\angle B'' = \angle B''\,A''\,C'' = B$. We stellen deze driehoeken verder voor door $U_4\,V_4\,W_4$, $U_5\,V_5\,W_5$, $U_6\,V_6\,W_6$ (fig. 13).

De dubbelpunten der rechtstreeks gelijkvormige figuren F_4, F_5, F_6 door de rechtstreeks gelijkvormige driehoeken $U_4\,V_4\,W_4$, enz. bepaald worden gemakkelijk gevonden. Het dubbelpunt Q_4 van F_5 en F_6 is het met zich zelf overeenkomende punt $U_5 = U_6$. Het dubbelpunt Q_5 van F_6 en F_4 blijkt langs den boven aangegeven weg het tweede snijpunt der cirkels $U_6\,V_6\,W_6$ en $U_4\,V_4\,W_4$ te zijn en dus samen te vallen met het dubbelpunt Q der stelsels F_1, F_2, F_3. En de stelsels F_4 en F_5 zijn niet alleen gelijkvormig maar ook gelijkstandig; hun dubbelpunt is dus het snijpunt Q_6 van $U_4\,U_5$ met $V_4\,V_5 = W_4\,W_5$. De cirkel door $Q_4\,Q_5\,Q_6$ is de gelijkvormigheidscirkel; hij gaat ook door het snijpunt W_4 der overeenkomstige lijnen $V_4\,W_4$, $V_5\,W_5$, $V_6\,W_6$. De onveranderlijke punten P_4 en P_5 vallen met Q_6 samen †) en het onveranderlijke punt P_6 is het tweede snijpunt van $V_6\,W_6$ met den gelijkvormigheidscirkel. Het »richtpunt" E valt met Q_6 samen.

g). Behalve de beide stelsels van drie rechtstreeks gelijkvormige figuren, die we beschouwd hebben, geeft onze merkwaardige figuur nog twee andere, nl. die van de driehoeken

---

*) Om de figuur niet te overladen is de lijn $A''\,B'$ weggelaten. Zij gaat niet door B, zooals uit de teekening zou schijnen te volgen; want voor het geval $r = 1$ $\left(\text{in de teekening is } r = \frac{2}{3}\right)$ maken $A''\,B$ en $A''\,B'$ een hoek van 120° met elkaar.

†) In fig. 13 staat P_4, P_5 abusievelijk bij Q_5 in plaats van bij Q_6.

$A B' C'$, $B A' C'$, $C B' A'$, (fig. 10) en die van de driehoeken $A B'' C''$, $B A'' C'$, $C A'' B''$. We laten de behandeling dezer figuren achterwege.

h) We maken nog opmerkzaam op het gelijkbeenige trapezium $W_2 V_2 V_3 U_3$ (fig. 12), dat door twee lijnen in drie gelijkvormige driehoeken is verdeeld. Nemen we de kleinste zijde van den kleinsten driehoek tot eenheid aan, dan komen in dit trapezium de lijnen $1, r, r^2, r^3, r^4$ voor. En dan is $U_5 V_5 = r^5$ (fig. 13).

De vierhoek $P B'' C' B$ (fig. 11) is wel een gelijkbeenig trapezium; maar dit trapezium is alleen gelijkhoekig en niet gelijkvormig met $A' C' A'' C''$ *).

Groningen, 1 Sept. 1889.

---

*) Hoewel de beschouwing van de vier rechtstreeks gelijkvormige ruimtefiguren F_1, F_2, F_3, F_4 door de driehoeken $A B C$, $B A D$, $A C D$, $B D C$ (fig. 9) bepaald een afzonderlijke behandeling vereischt, merken we hier ten slotte terloops het volgende op.

De figuren F_1 en F_2 zijn rechtstreeks gelijk en gaan door een draaiing van 180° om $P Q$ in elkaar over; evenzoo de figuren F_3 en F_4.

De figuren F_1 en F_3 hebben A tot dubbelpunt. Zetten we van A uit naar B, C, D op $A B$, $A C$, $A D$ gelijke stukken $A B_1$, $A C_1$, $A D_1$ af, dan is de loodlijn uit A op het vlak $B_1 C_1 D_1$ een met zich zelve overeenkomende lijn, het vlak door A evenwijdig aan het vlak $B_1 C_1 D_1$ een met zich zelf overeenkomend vlak der beide figuren. Door F_1 een zekeren hoek om de aangewezen lijn te draaien en de voerstralen van A uit met r te vermenigvuldigen wordt F_3 verkregen.

Evenzoo hebben de figuren F_2 en F_4 het punt B, de figuren F_1 en F_4 het punt C, de figuren F_2 en F_3 het punt D tot dubbelpunt.

Vier overeenkomstige punten P_1, P_2, P_3, P_4 zijn de hoekpunten van een viervlak, waarvan de ribben $P_1 P_2$ en $P_3 P_4$ de lijn PQ tot mediaan en lijn van kortsten afstand hebben.

Vier overeenkomstige lijnen hebben in het algemeen geen hyperboloïdische ligging, enz.

Deze uitkomsten en die van de 2de noot van art. 3 kunnen ons tot de opmerking voeren, dat de overdracht van de voor het platte vlak verkregen resultaten op de ruimte, die in den aanhef van dit opstel bedoeld werd — en dit is dan nog optimistisch uitgedrukt — niet langs dezen eenvoudigen weg geschieden kan. In het geval van het regelmatige gelijkbeenige viervlak hebben de vier rechtstreeks gelijke stelsels een gemeenschappelijk dubbelpunt en elk der zes combinaties dier stelsels twee aan twee een lijn van dubbelpunten. In het geval van het onregelmatig gelijkbeenige viervlak komt een lijn van dubbelpunten slechts bij twee

der zes combinaties voor en zijn de hoekpunten de dubbelpunten van de overige vier. En bij het eenige viervlak, dat een andere regeling van de overeenkomst toelaat, het regelmatige viervlak, hebben, zooals gemakkelijk blijkt, òf alle zes, òf drie der zes, òf twee der zes combinaties het middelpunt O tot dubbelpunt, terwijl de overige combinaties dan geen dubbelpunt bezitten. Omdat de vier stelsels in dit geval gelijk zijn, moet elk dubbelpunt nl. evenver van de vier hoekpunten verwijderd zijn. En nu kan O alleen dubbelpunt zijn van de beide stelsels $O\,A\,B\,C$ en $O\,B\,C\,D$, als de driehoeken $A\,B\,C$ en $B\,C\,D$ van O uit gelijkdraaiend zijn. Daargelaten dat het geval van het regelmatige viervlak weinig belangrijks kan aanbieden, moet het dus om de aangevoerde reden in deze richting onvruchtbaar zijn.

Uit deze voorloopige beschouwingen mag dus het besluit getrokken worden, dat men de met de punten, de hoeken en den cirkel van Brocard overeenkomende ruimtevormingen, zoo deze bestaan, waarschijnlijk langs anderen weg bereiken moet.

OVERZICHT

VAN DE

BOEKEN, KAARTEN, PENNINGEN, ENZ.

OVERZICHT

VAN DE

BOEKEN, KAARTEN, PENNINGEN, ENZ.,

INGEKOMEN BIJ DE

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN

TE AMSTERDAM.

VAN APRIL 1889 TOT EN MET MAART 1890.



AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1889.

GEDRUKT BIJ DE ROEVER KRÖBER - BAKELS.

OVERZICHT

VAN DE

BOEKWERKEN

DOOR DE

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN

ONTVANGEN EN AANGEKOCHT.

1889—1890.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAANDEN APRIL, MEI EN JUNI 1889.

NEDERLAND.

Verslag van den toestand der Gemeente Amsterdam gedurende het jaar 1888. Amsterdam 1889. roy. 8°.

Revue internationale scientifique et populaire des falsifications. Amsterdam 1889. 2e Année. Livr. 9—11. 4°.

H. Y. Groenewegen. Paulus van Hemert, als godgeleerde en als wijsgeer. Amsterdam 1889. Academisch Proefschrift. 8°.

Archives Néerlandaises des Sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des Sciences à Harlem. 1889. Tome XXIII. Livr. 2. 8°.

Verhandelingen uitgegeven door Teylers tweede Genootschap. Haarlem 1889. Nieuwe Reeks. Deel III. St. 1—2. 2 Dl. 8⁰.

Inhoud:

J. Dirks. Beschrijving der Nederlandsche of op Nederland en Nederlanders betrekking hebbende penningen, geslagen tusschen November 1813 en November 1863.

Archives du Musée Teyler. Haarlem 1889. 2e Série. Vol. III. Part. 3. roy. 8⁰.

J. Ritzema Bos. L'anguillule de la tige (Tylenchus devastatrix Kühn) et les maladies des plantes dues à ce Nematode. Haarlem 1889. Part. 2. roy. 8⁰.
(Extrait des Archives Teyler. 2e Série. Tome III.)

Tijdschrift van de Nederlandsche Maatschappij ter bevordering van Nijverheid. Haarlem 1889. April—Juni. 8⁰.

S. J. Fockema Andreae. Bijdragen tot de Nederlandsche Rechtsgeschiedenis. Haarlem 1889. 2e Bundel. 8⁰.

Recueil des travaux chimiques des Pays-Bas. Leide 1889. Tome VIII. N⁰. 3. 8⁰.

G. Schlegel. Nederlandsch-Chineesch Woordenboek in het Tsiang-Tsiu dialekt. Leiden 1889. Deel IV. Afl. 2. roy. 8⁰.

Handelingen en Mededeelingen van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden, over het jaar 1888. Leiden 1888. 8⁰.

Si-Benteng (Dr. C. L. van der Burg). Opleiding van geneeskundigen voor Nederlandsch-Indië. Leiden 1889. 8⁰.

Annales de l'Ecole polytechnique de Delft. Leide 1889. Tome IV. Livr. 4. 4⁰.

M. F. A. G. Campbell. Annales de la typographie Néerlandaise au XVᵉ siècle. la Haye 1889. 3ᵉ Supplément. 8⁰.

Verslag aan den Koning van de bevindingen en handelingen van het geneeskundig staatstoezicht in het jaar 1887. 's Gravenhage 1888. 4⁰.

Catalogus van de boeken en kaarten uitmakende de Bibliotheek van het Departement van Koloniën. 's Gravenhage 1889. Tweede Vervolg. 8⁰.

Jaarboek van de koninklijke Nederlandsche Zeemacht, 1887—1888. 's Gravenhage 1889. 8⁰.

Tijdschrift van het koninklijk Instituut van Ingenieurs. 's Gravenhage 1889. Afl. 3. 1ste Gedeelte. Afl. 4. 2de Gedeelte. 4⁰.

Bijdragen tot de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië, uitgegeven door het koninklijk Instituut voor de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië. 's Gravenhage 1889. 5de Reeks. Deel IV. Afl. 2. 8⁰.

Tijdschrift voor Entomologie, uitgegeven door de Nederlandsche entomologische Vereeniging. 's Gravenhage 1889. Deel XXXII. Afl. 2. 8⁰.

Archief voor Nederlandsche kerkgeschiedenis. 's Gravenhage 1889. Deel III. Afl. 4. 8⁰.

Algemeen Nederlandsch Familieblad. Tijdschrift voor geschiedenis, geslacht-, wapen-, zegelkunde, enz. 's Gravenhage 1889. Jaarg. VI. N⁰. 3—5. 4⁰.

K. F. H. Langen. Handleiding voor de beoefening der Atjehsche taal. 's Gravenhage 1889. 8°.
(Uitgegeven door het koninklijk Instituut voor de taal-, land- en volkenkunde van N. I.).

——————— Woordenboek der Atjehsche taal. 's Gravenhage 1889. 8°.
(Uitgegeven door het koninklijk Instituut voor de taal-, land- en volkenkunde van N. I.).

Bijdragen voor vaderlandsche geschiedenis en oudheidkunde. 's Gravenhage 1889. 3e Reeks. Deel V. Afl. 3. 8°.

Nederlandsch meteorologisch Jaarboek voor 1888, uitgegeven door het koninklijk Nederlandsch meteorologisch Instituut. Utrecht 1889. Jaarg. 40. 4°. Oblong.

Onderzoekingen gedaan in het physiologisch Laboratorium der Utrechtsche Hoogeschool. Utrecht 1889. 3e Reeks. Dl. XI. 8°.

Het jubileum van professor F. C. Donders gevierd te Utrecht op 27 en 28 Mei 1888. Gedenkboek uitgegeven door de Commissie. Utrecht 1889. roy. 8°.

W. G. Brill. Betwiste bijzonderheden op het gebied der studie van de geschiedenis van ons vaderland. Utrecht 1889. 8°.

K. H. M. van der Zande. Over eenige asymmetrische dialkylurea en di-isopropylamine. Arnhem 1889. Academisch Proefschrift. 8°.

Mededeelingen en Berichten der Geldersch-Overijsselsche Maatschappij van Landbouw over 1889. Arnhem 1889. N°. 1. 8°.

Catalogus van het Museum van Oudheden te Nijmegen. 1ste Gedeelte. Gedenkteekenen van vóór-Germaanschen, Germaanschen en Romeinschen oorsprong. Nijmegen 1889. 3e druk. 8°.

60ste Verslag der handelingen van het Friesch Genootschap van geschied-, oudheid- en taalkunde te Leeuwarden, over het jaar 1887—1888. 8°.

De vrije Fries. Mengelingen uitgegeven door het Friesch Genootschap van geschied-, oudheid- en taalkunde. Leeuwarden 1888. 3e Reeks. Deel V. Afl. 2—3. 8°.

G. J. P. J. Bolland. Het objectiveerend standpunt van natuuropvatting en zijne eenzijdigheid. 8°. (Theologisch Tijdschrift 1889).

Statistiek van het koninkrijk der Nederlanden. Nieuwe Serie. Staten van de in-, uit- en doorgevoerde voornaamste handelsartikelen gedurende de maanden Maart-April 1889. 's Gravenhage 1889. fol.

Verzamelingstabellen der waterhoogten langs de kusten van de Noordzee, de Zuiderzee en de Nederlandsche rivieren, waargenomen in de maanden November-December 1888. Januari 1889. fol.

Verzamelingstabellen der waterhoogten volgens de zelfregistreerende peilschalen, waargenomen in de maanden November-December 1888. Januari 1889. fol.

NEDERLANDSCH OOST-INDIË.

Tijdschrift voor Indische taal-, land- en volkenkunde, uitgegeven door het Bataviaasch Genootschap van Kun-

sten en Wetenschappen. Batavia 1889. Deel XXXII. Afl. 5—6. 8⁰.

Notulen van de algemeene en bestuurs-vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Batavia 1888. Deel XXVI. Afl. 3—4. 8⁰.

Algemeen Reglement en Reglement van Orde voor het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen opgericht op den 24 April 1778 onder de zinspreuk: »Tot nut van 't algemeen". Batavia 1889. 8⁰.

Dagh-Register gehouden int Casteel Batavia vant passerende daer ter plaetse als over geheel Nederlants-India. Anno 1659. Batavia 1889. roy. 8⁰.
(Uitgegeven door het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen).

Geneeskundig Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Vereeniging tot bevordering der geneeskundige Wetenschappen in Nederlandsch-Indië. Batavia 1889. Deel XXVIII. Afl. 5. Deel XXIX. Afl. 1. 8⁰.

Tijdschrift voor Nijverheid en Landbouw in Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Nederlandsch-Indische Maatschappij van Nijverheid en Landbouw. Batavia 1889. Deel XXXVIII. Afl. 2. 8⁰.

P. H. van der Kemp. Bijdragen tot de wordingsgeschiedenis van het reglement op de particuliere landerijen bewesten de Tji-Manoek. Batavia 1889. 8⁰.

BELGIE.

Bulletin de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des beaux-Arts de Belgique. Bruxelles 1889. 3e Série. Tome XVII. N°. 3—5. 8°.

Bulletin de l'Académie royale de Médecine de Belgique. Bruxelles 1889. 4e Série. Tome III. N°. 2—5. 8°.

F. de Potter en J. Broeckaert. Geschiedenis van de gemeenten in de provincie Oost-Vlaanderen. Gent 1889. Dl. XLIII. 8°.

C. Ubaghs. Le crane de Chelone Hoffmanni. Bruxelles 1889. 8°.
(Extrait du Bulletin de la Société belge de Géologie. Tome II).

Verslagen en Mededeelingen der koninklijke Vlaamsche Academie voor Taal- en Letterkunde. Gent 1889. N°. 1—2. 8°.

Sleeckx. De patriottentijd. Gent 1889. 8°.
(Volksboekje uitgegeven door het Willemsfonds. N°. 6).

FRANKRIJK.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. Paris 1889. Tome CVIII. N°. 16—24. 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Inscriptions et belles-Lettres. Paris 1889. 4e Série. Tome XVI. Novembre-Décembre. Tome XVII. Janvier-Février. 8°.

Bulletin de l'Académie de Médecine. Paris 1889. 3e Série. Tome XXI. N⁰. 12—24. 8⁰.

Bulletin de la Société mathématique de France. Paris 1889. Tome XVII. N⁰. 1. 8⁰.

Bulletin de la Société philomatique de Paris. 1889. 8e Série. Tome I. N⁰. 1—3. 8⁰.

Comptes rendus des séances de la Société philomatique de Paris. 1889. N⁰. 4—9. 8⁰.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de la Société de Biologie. Paris 1889. 9e Série. Tome I. N⁰. 10—23. 8⁰.

Publications de l'Ecole des langues orientales vivantes. Paris 1883—1889. 1e Série. Tome XI, XX. 2e Série. V, XII. 1e Partie. XVI. 3e Série. Tome II, IV. 8 Dl. roy. 8⁰.

Inhoud:

a. H. CORDIER. Bibliotheca Sinica. Tome II. Fasc. 1—4.
b. E. LEGRAND. Ephémérides daces ou chronique de la guerre de quatre ans (1736—1739).
c. A. C. BARBIER DE MEYNARD. Dictionnaire Turc-Francais. Supplément. Vol II. Livr 2—3.
d. H. DERENBOURG. Ousâma ibn Mounkidh. Un Emir Syrien au prémier siècle des croisades. 1e Partie.
e. O. HOUDAS. Nozhet-Elhâdi. Histoire de la dynastie Saadienne au Maroc. (1511—1670).
f. A. DOZON. Histoire du Khanat de Khokand.
g. L. DE ROSNY. Histoire des dynasties divines.

Revue internationale de l'Electricité et de ses applications. Paris 1889. 5e Année. Tome VIII. N⁰. 76—84. roy. 8⁰.

Journal d'Hygiène. Paris 1889. 15e Année. Vol. XIV. N°. 654—666. 4°.

Le Galilée. Revue des Sciences cosmologiques. Paris 1889. N°. 1—2. roy. 8°.

R. Bonaparte. Les premiers voyages des Néerlandais dans l'Insulinde (1595—1602). Versailles 1884. 4°.

——————— Les récents voyages des Néerlandais à la Nouvelle-Guinée. Versailles 1885. 4°.

——————— Les derniers voyages des Néerlandais à la Nouvelle-Guinée. Versailles 1885. 4°.

——————— Note on the Lapps of Finmark. Paris 1886. 4°.

F. Escard. Le Prince Roland Bonaparte en Laponie. Paris 1886. 4°.

H. G. van de Sande Bakhuyzen. Mesure des clichés d'après la méthode des coordonnées rectangulaires. 4°. (Extrait du Bulletin pour l'exécution photographique de la carte du ciel. 1889).

GROOT-BRITTANNIË EN IERLAND.

Philosophical Transactions of the royal Society. London 1889. Vol. CLXXIX. 4°.

Inhoud:

H. Tomlinson. The influence of stress and strain on the physical properties of matter.

G. D. Liveing and I. Dewar. On the spectrum of the oxyhydrogen flame.

A. B. Basset. On the motion of a sphere in a viscous liquid.

J. J. Sylvester. On Hamilton numbers. Part 2.

W. N. Shaw. Report on hygrometric methods; Part 1, including the saturation method and the chemical method and dew-point instruments.

J. J. Walker. On the diameters of a plane cubic.

S. Bidwell. On the changes produced by magnetisation in the dimensions of rings and rods of iron and of some other methods.

G. D. Liveing and J. Dewar. On the ultra-violet spectra of the elements. Part 3.

V. H. Veley. The conditions of the evolution of gases from homogeneous liquids.

S. H. Burbury. The induction of electric currents in conducting shells of small thickness.

J. A. Ewing and G. C. Cowan. Magnetic qualities of nickel.

Ch. Roberts-Austen. On certain mechanical properties of metals considered in relation to the periodic law.

R. T. Glazebrook and T. C. Fitzpatrik. On the specific resistance of mercury.

A. R. Forsyth. Invariants, covariants and quotient derivatives associated with linear differential equations.

A. E. H. Love. The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell.

Abney and Festing. Colour photometry.

H. B. Baker. Combustion in dried oxygen.

V. Horsley. A record of experiments upon the functions of the cerebral cortex.

W. C. Williamson. On the organisation of the fossil plants of the coal measures. Part XIV.

H. G. Seeley. Researches on the struction, organization and classification of the fossil reptilia. Part II.

J. Y. Mackay. The development of the branchial arterial arches in birds, with special reference to the origin of the subclavians and carotids.

F. G. Heathcote. The post-embryonic development of Julus terrestris.

R. Owen. On parts of the skeleton of Meiolania platyceps (Ow.).

S. J. Hickson. On the sexual cells and the early stages in the development of Millepora plicata.

Ch. E. Beevor and V. Horsley. A further minute analysis by

electric stimulation of the so-called motor region of the cortex cerebri in the monkey (Macacus sinicus).

H. Bury. The early stages in the development of Antedon rosacea.

S. Brown and E. A. Schäfer. An investigation into the functions of the occipital and temporal lobes of the monkey's brain.

F. Gotch. Further observations on the electromotive properties of the electrical organ of Torpedo marmorata.

C. B. Lockwood. The early development of the pericardium, diaphragm, and great veins.

W. Kitchen-Parker. On the structure and development of the wing in the common fowl.

J. C. Ewart. The electric organ of the skate.

J. B. Sanderson. On the electromotive properties of the leaf of Dionaea in the excited and unexcited states.

H. Gadow. On the modifications of the first and second visceral arches, with especial reference to the homologies of the auditory ossicles.

E. T. Newton. On the skull, brain, and auditory organ of a new species of Pterosaurian (Scaphognathus Purdoni) from the Upper Lias near Whitby, Yorkshire.

Proceedings of the royal Society. London 1889. Vol. XLV. N⁰. 277—279. 8⁰.

List of the royal Society. 1888. 4⁰.

Proceedings of the royal Institution of Great Britain. London 1888. Vol. XII. Part 2. 8⁰.

List of the members of the royal Institution of Great Britain. London 1888. 8⁰.

Proceedings of the royal geographical Society. London 1889. New Series. Vol. XI. N⁰. 4—6. 8⁰.

Monthly Notices of the royal astronomical Society. London 1889. Vol. XLIX. N⁰. 5—7. 8⁰.

Journal of the royal microscopical Society. London 1889. Part 2—3. 8⁰.

Transactions of the sanitary Institute of Great Britain. London 1888. Vol. IX. 8⁰.

Transactions of the zoological Society of London. 1889. Vol. XII. Part 8. 4⁰.

Inhoud:

J. H. Scott and T. J. Parker. On a specimen of Ziphius recently obtained near Dunedin.

Proceedings of the scientific meetings of the zoological Society for 1888. London 1888. Part 4. 8⁰.

Meteorological Observations of the Rousdon Observatory, Devon for the year 1888. London 1889. Vol. V. 4⁰.

J. W. Moll. Intracellular Pangenesis. 8⁰. (From the botanical Gazette. Vol. XIV).

Proceedings of the Cambridge philosophical Society. Cambridge 1889. Vol. VI. Part 5. 8⁰.

Reports from the Laboratory of the royal College of Physicians. Edinburgh 1889. Vol. I. 8⁰.

OOSTENRIJK.

Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Wien 1889. N⁰. 3—6. 4⁰.

A. R. v. Miller-Hauenfels. Richtigstellung der in bisheriger Fassung unrichtigen mechanischen Wärmetheorie und Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Aetherbewegungen. Wien 1889. 8⁰.

O. Benndorf und G. Niemann. Reisen in Lykien und Karien. Wien 1884. fol.

E. Petersen und F. von Luschau. Reisen in Lykien, Milyas und Kibyratis. Wien 1889. 2 Dln. fol.

O. Benndorf und G. Niemann. Das Heroon von Gjölbaschi-Trysa. Wien 1889. Theil I. fol. Met atlas.

Mittheilungen der anthropologischen Gesellschaft. Wien 1889. Band XIX. Heft 1—2. 4⁰.

Mittheilungen aus dem Jahrbuche der kön. ungarischen geologischen Anstalt. Budapest 1889. Band VIII. Heft 7—8. roy. 8⁰.

Földtani Közlöny (Geologische Mittheilungen). Zeitschrift der ungarischen geologischen Gesellschaft. Budapest 1889. Kötet XIX. Füzet 1—6. roy. 8⁰.

Jahresbericht der kön. ungarischen geologischen Anstalt für 1887. Budapest 1889. roy. 8⁰.

L. Petrik. Der Hollohazaer (Radvanyer) Rhyolith-Kaolin. Budapest 1889. roy. 8⁰.

Bollettino della Societa Adriatica di Scienze naturali. Trieste 1889. Vol XI. 8⁰.

Bulletin international de l'Académie des Sciences de Cracovie. 1889. N⁰. 1—5. 8⁰.

DUITSCHLAND.

Sitzungsberichte der kön. preussischen Akademie der Wissenschaften. Berlin 1888. N⁰. 38—52. 1889. N⁰. 1—21. roy. 8⁰.

Archiv für pathologische Anatomie und Physiologie und für klinische Medicin. Berlin 1889. Band CXVI. Heft 1—3. 8⁰.

G. Studemund. Anecdota varia graeca musica metrica grammatica. Berolini 1886. roy. 8⁰.

Wochenschrift für klassische Philologie. Berlin 1889. Jahrg. VI. N⁰. 1—15. 4⁰.

Jahrbücher des Vereins von Alterthumsfreunden im Rheinlande. Bonn 1888. Heft LXXXVI. 8⁰.

Nachrichten von der kön. Gesellschaft der Wissenschaften aus dem Jahre 1888. Göttingen 1888. 8⁰.

72 und 73 Jahresbericht der naturforschenden Gesellschaft in Emden. 1889. 8⁰.

J. Thikötter. Halleluja. Lateinische und Deutsche Hymnen. Bremen 1888. 8⁰.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. Leipzig 1889. Jahrg. 24. Heft 1—2. 8⁰.

Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1889. Jahrg. XII. N⁰. 306—310. 8⁰.

G. A. von Peschka. Freie Perspektive (centrale Projektion) in ihrer Begründung und Anwendung mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse höherer Lehranstalten und das Selbststudium. Leipzig 1888—1889. 2 Bd. 8⁰.

Zeitschrift für Naturwissenschaften, herausgegeben im Auftrage des naturwissenschaftlichen Vereins für Sachsen und Thüringen. Halle a/S. 1888. 5te Folge. Band VII. Heft 1—6. 8⁰.

Petermann's Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt. Gotha 1889. Band XXXV. Heft 3—6. Ergänzungsheft N⁰. 93. 4⁰.

H. de Vries. Intracellulare Pangenesis. Jena 1889. 8⁰.

R. von Jhering. Der Besitzwille. Zugleich eine Kritik der herrschenden juristischen Methode. Jena 1889. 8⁰.

Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, herausgegeben von der medizinisch-naturwissenschaftlichen Gesellschaft. Jena 1889. Band XXIII. Heft 2—3. 8⁰.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der kön. bayr. Akademie der Wissenschaften. München 1888. Heft 3. 1889. Heft 1. 8⁰.

Sitzungsberichte der philosophisch-philologischen und historischen Classe der kön. bayr. Akademie der Wissenschaften. München 1889. Jahr 1888. Band II. Heft 3. Jahr 1889. Heft 1. 8⁰.

E. Maass. De Attali Rhodii fragmentis arateis commentatio. Gryphiswaldiae 1888. 4⁰.

F. Susemihl. Analectorum Alexandrinorum chronologicorum Particula 2. Gryphiswaldiae 1888. 4⁰.

H. Almann. Kaiser Maximilian's I Absichten auf das Papstthum in den Jahren 1507—1511. Stuttgart 1888. 8⁰.

G. Pescatore. Die Glossen des Irnerius. Greifswald 1888. 8⁰.

M. Lewis und E. Haupt. Kaiser Wilhelm I und Kaiser Friedrich. Greifswald 1888. 8⁰.

O. Blümcke. Beitrag zur Statistik der Echinococcen-Krankheit in Vorpommern. Greifswald 1888. 8⁰.

P. Boshamer. Ueber die fäulniswidrige Kraft concentrierter Salzlösungen. Greifswald 1888. 8⁰.

F. Braun. Ueber Enblocreposition mit Beschreibung eines durch Operation geheilten Falles. Greifswald 1888. 8⁰.

J. Bremer. Ueber Conjunctivitis traumatica und Fremdkörper im Conjunctivalsack einschl. der Hornhautoberfläche. Greifswald 1888. 8⁰.

P. Buchholtz. Ueber Verbesserung von Exartikulationsstümpfen. Greifswald 1888. 8⁰.

E. Büge. Beitrag zur Casuistik der von den Knochen ausgehenden Beckensarcome. Greifswald 1888. 8⁰.

H. Coburg. 2 Fälle von Resection des Sternum. Greifswald 1888. 8⁰.

F. C. Colley. Ueber abnorm niedrige Körpertemperaturen. Greifswald 1888. 8⁰.

C. Cyrus. Beitrag zur Lehre der Lymphosarcome. Greifswald 1888. 8⁰.

A. Dieckmann. Beitrag zur Casuistik der Gehirn-Schussverletzungen. Greifswald 1888. 8⁰.

M. Dreyling. Zur Pathologie und Therapie des Furunkels. Greifswald 1888. 8⁰.

F. Ehm. Ueber die operative Behandlung der ectopischen Schwangerschaft. Greifswald 1888. 8⁰.

P. Fischer. Beitrag zur Statistik der Echinococcenkrankheit in Pommern in den jahren 1886—1887. Greifswald 1888. 8°.

M. Fritsche. Ueber die während der Jahre 1885—1888 behandelten Fälle von Keratitis phlyctaenulosa mit Berücksichtigung der Perforationen. Greifswald 1888. 8°.

N. Golliner. Zwei Fälle von Ileus. Greifswald 1888. 8°.

C. Gottwald. Beitrag zur Casuistik der circulären Darm-Resectionen. Greifswald 1888. 8°.

A. Grimm. Ueber den Wert der Colotomie bei Rectumcarcinom. Greifswald 1888. 8°.

B. Hegge. Ueber den Zusammenhang zwischen Chorea minor mit der Polyarthritis rheumatica acuta und der Endocarditis. Greifswald 1888. 8°.

L. Henneberg. Beiträge zur Kenntniss der Santoninwirkung. Greifswald 1888. 8°.

A. Hennewig. Ueber die Bedeutung der Wundbehandlung unter dem feuchten Blutschorf nach Schede für die Fälle von Necrosis ossium. Greifswald 1888. 8°.

E. Hennies. Zur Kenntniss der Fälle von tuberkulöser Caries der Symphyse auf Grund klinischer Beobachtung. Greifswald 1888. 8°.

W. Hiltrop. Beiträge zur Magenchirurgie. Greifswald 1887. 8°.

P. Hoffmann. Zur Casuistik der Knochenerkrankungen nach Typhus abdominalis. Greifswald 1887.

G. Hohensee Statistik über die im Jahre 1887 in Bärwalde aufgetretenen Infectionskrankheiten. Greifswald 1888. 8⁰.

F. Holtmeyer. Ueber Arthrodesis nebst Beschreibung einiger neuer Fälle. Greifswald 1888. 8⁰.

W. Jacob. Alkalimetrische Untersuchungen des Blutes bei Gesunden und Kranken. Greifswald 1888. 8⁰.

J. Joppich. Beitrag zur Kenntniss der angeborenen Luxation des Capitulum radii. Greifswald 1888. 8⁰.

F. Koch. Ein Beitrag zur Casuistik der Uterusfibrome. Greifswald 1888. 8⁰.

H. Kracht. Experimentelle und statistische Untersuchungen über die Ursachen der Brustfellentzündung. Greifswald 1888. 8⁰.

R. Krause. Zur operativen Behandlung der Nabelhernien. Greifswald 1888. 8⁰.

M. Metz. Ueber Verwendbarkeit des Salols zu diagnostischen Zwecken bei Prüfung der Magenfunction. Greifswald 1888. 8⁰.

J. Neumann. Ptosis congenita und ihre Behandlung. Greifswald 1888. 8⁰.

O. Nimsch. Beitrag zur Casuistik der Geschwülste an der Portio vaginalis uteri. Greifswald 1888. 8⁰.

R. Oenicke. Ein Fall von Compressionsfractur des oberen Tibiaendes. Greifswald 1888. 8⁰.

C. Pfeiffer. Ueber den Wert der Aspiration bei Hydrocephalus chronicus. Greifswald 1888. 8⁰.

L. Philipp. Fälle von primärem Carcinom der Leber und der Gallenblase mit Abcessbildung. Greifswald 1888. 8⁰.

P. Radeke. Ueber die Behandlung chronischer Conjunctivitis granulosa mit starker Sublimatlösung. Greifswald 1888. 8⁰.

F. Reiche. Zur Therapie der Inversio vesicae. Greifswald 1888. 8⁰.

P. Scharff. Ein Beitrag zur Stielbildung der Dermoidcysten des Ovariums. Greifswald 1888. 8⁰.

G. Schemmel. Ueber das Vorkommen von Tetanus im Zusammenhang mit antiseptisch behandelten Wunden. Greifswald 1888. 8⁰.

E. Schmidt. Beitrag zur Amputation des Penis bei Carcinom. Greifswald 1888. 8⁰.

G. Schmidt. Beiträge zur Casuistik der Cataracta traumatica. Greifswald 1888. 8⁰.

J. E. Schoene. Zwei Fälle von Hebephrenie. Greifswald 1888. 8⁰.

O. Schoenermarck. Ueber die Einlagerung von Nerven in Knochencallus bei Fracturen. Greifswald 1888. 8⁰.

R. Schömann. Zur Casuistik der Arthrektomia genu. Greifswald 1888. 8⁰.

F. Schubert. 6 Fälle von Episio-Perineoraphie nach Sänger (Lawson Tait). Greifswald 1888. 8⁰.

A. Seidel. Ueber die Behandlung der Hydrocele mit Punction und nachfolgender Injection von reiner Carbolsäure. Greifswald 1888. 8⁰.

C. Seidler. Ueber Carcinoma mammae. Greifswald 1888. 8⁰.

H. Seligsohn. Zur Diagnose der Ovarialcysten. Greifswald 1888. 8⁰

E. Setzke. Die Befestigung aneinanderpassender Knochenflächen mittelst pfriemenartiger Stahlnadeln. Greifswald 1888. 8⁰.

R. Seyffert. Zur Pathologie der Gallengänge. Greifswald 1888. 8⁰.

H. Sinell. Indikation und Applikation des Atropins bei Iritis. Greifswald 1888. 8⁰.

A. Smierzchalski. Behandlung der Fibrome des Uterus. Greifswald 1888. 8⁰.

F. J. Sonnenschein. Zur Aetiologie der Orbitalphlegmone bei Neugeborenen. Greifswald 1888. 8⁰.

P. Stoewer. Drei Fälle von Phlegmone orbitae. Greifswald 1888. 8⁰.

E. Strahl. Wesen und Bedeutung der Durchwachsung von Sequestern. Greifswald 1888. 8⁰.

H. Taube. Ein Beitrag zur Wirkung der Aqua amygdalarum amararum. Greifswald 1888. 8⁰.

G. Thurmann. Die Antisepsis im Dienste der Staar-Extraction. Greifswald 1888. 8⁰.

E. Unruh. Ueber die Behandlung der Unterschenkel-Geschwüre mit Circumcisio. Greifswald 1888. 8⁰.

E. Weber. Ueber biliöses Typhus-Recidiv. Greifswald 1888. 8⁰.

H. Witting. Ueber Resection von Harnröhrenstrikturen. Greifswald 1888. 8°.

H. Zühlke. Ueber die Gewebsveränderungen der in Salzlaken conservierten Präparate. Greifswald 1888. 8°.

P. Hauptfleisch. Zellmembran und Hüllgallerte der Desmidiaceen. Greifswald 1888. 8°.

A. Gülzow. Die Temperatur-Verhältnisse von Putbus auf Rügen auf Grund 23 jähriger Beobachtungen. Greifswald 1888. 8°.

A. Koch. Ueber die Dämpfung der Torsionsschwingungen von verschiedenen Metalldrähten. Greifswald 1888. 8°.

R. Kusserow. Ueber Derivate der Brom- und Anilidobernsteinsäure und über die Constitution der Fumar- und Maleinsäure. Greifswald 1888. 8°.

C la Roche. Untersuchungen über die Magnetisierung elliptischer und rechteckiger Platten von weichem Eisen. Greifswald 1888. 8°.

K. Schreber. Ueber die elektromotorischen Kräfte dünner Schichten von Superoxydhydraten. Greifswald 1888. 8°.

K. Schulze. Ueber Derivate des m-Nitro-und-m-Amidobenzamids nebst einer krystallographischen Untersuchung über das m-Amidobenzamid. Greifswald 1888. 8°.

E. Tummeley. Ueber Azoverbindungen des Salicylaldehyd, des Salicylamid und des Salicylalkohol. Greifswald 1888. 8°.

J. B. von Ulatowski. Ueber Sulfazide. Greifswald 1888. 8°.

M. Borheck. Ueber Strophen- und Vers-Enjambement im Mittelhochdeutschen. Greifswald 1888. 8⁰.

L. Czischke. Die Perfektbildung der starken Verba der si-Klasse im Französischen (XI—XVI Jahrhundert). Greifswald 1888. 8⁰.

M. Dembski. Montaigne und Voiture. Ein Beitrag zur Geschichte der Entwickelung der französischen Syntax des XVI und XVII S. Greifswald 1888. 8⁰.

W. Dittmer. Die Pronomina possessiva im Altfranzösischen. Greifswald 1888. 8⁰.

K. Ganzlin. Die Pronomina demonstrativa im Altfranzösischen. Greifswald 1888. 8⁰.

K. Körner. Beiträge zur Geschichte des Geschlechtswechsels der englischen Substantiva. Greifswald 1888. 8⁰.

O. Leichsenring. De metris graecis quaestiones onomatologae. Gryphiswaldensiae 1888. 8⁰.

M. Schaper. Die Sachsenhäuser Appellation von 1324. Berlin 1888. 8⁰.

G. Scharff. Die Lehre vom Gewährerlass (pactum de non praestanda evictione) nach römischem Recht. Greifswald 1888. 8⁰.

O. Stock. Descartes' Grundlegung der Philosophie. Greifswald 1888. 8⁰.

H. Wehlitz. Die Congruenz des Participii Praeteriti in activer Verbalconstruction im Französischen. Greifswald 1887. 8⁰.

Verhandlungen des naturhistorischen Vereins zu Heidelberg. 1889. Neue Folge. Band IV. Heft 2. 8°.

Archiv des Vereins der Freunde der Naturgeschichte in Mecklenburg. Güstrow 1889. Jahr. 42. 8°.

GRUNERT's Archiv der Mathematik und Physik. Leipzig 1889. 2[te] Reihe. Theil VII. Heft 4. 8°.

Abhandlungen herausgegeben vom naturwissenschaftlichen Vereine. Bremen 1889. Band X. Heft 3. 8°.

Schriften der naturforschenden Gesellschaft. Danzig 1889. Neue Folge. Band VII. Heft 2. 8°.

ITALIË.

Atti della reale Accademia dei Lincei. Roma 1888. Serie 4ª. Rendiconti. Vol. IV. Fasc. 11—12. Vol. V. Fasc. 1. 3—5. 4°.

Bollettino delle Opere moderne straniere. Roma 1889. Vol. IV. N°. 2. 8°.

Bollettino delle Pubblicazioni italiane. Firenze 1889. N°. 78—83. 8°.

Pubblicazioni del real Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento. Firenze 1883—1885. roy. 8°.

Inhoud:

a. G. PELLIZZARI. Archivio della Scuola d' Anatomia patologica. Vol. II.

b. A. FILIPPI. Esegesi medico legale sul methodus testificandi di G. B. Codronchi.

c. A. ROITI ed L. PASQUALINI. Osservazioni continue della elettricita atmosferica istituite a Firenze.

d. L. Luciani. Linee generali della fisiologia del cervelletto.
e. G. Rondoni. I piu antichi frammenti dell costituto fiorentino.
f. A. del Vecchio. Le seconde nozze del coniuge superstite.

Archivio per l'Antropologia e la Etnologia. Firenze 1888. Vol XVIII. Fasc. 3. 8⁰.

Atti della reale Accademia delle Scienze. Torino 1889. Vol XXIV. Disp. 6—12. 8⁰.

Bollettino dell' Osservatorio della regia Universita di Torino. 1889. Anno XXII. 4⁰.

Atti del reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. Venezia 1888. Serie 6. Tomo VI. Disp. 10. Tomo VII. Disp. 1—2. 8⁰.

Mittheilungen aus der zoologischen Station zu Neapel. Berlin 1889. Band IX. Heft 1. 8⁰.

Atti della Societa Toscana di Scienze naturali. Processi Verbali. Vol. VI. Adunanza del 13 Gennaio 1889. 8⁰.

Commemorazione di G. Meneghini. Pisa 1889. 8⁰.

SPANJE EN PORTUGAL.

Anuario de la real Academia de Ciencias exactas, fisicas y naturales. Madrid 1889. 8⁰.

Historia e Memorias da Academia real das Sciencias de Lisboa 1882—1887. Nova Serie. Tomo V. Parte 2. Tomo VI. Parte 1—2. 4⁰.

Inhoud, Tome V. Parte 2.

J. M. Latino Coelho. Panegyrico de Luiz de Camoẽs.
Ticalho. Flora dos Lusiadas.
L. Garrido. Elegio historico de Thiers.

I. S. Ribeiro. Luiza Sigéa.
S. P. M. Estacio da Veiga. A tabula de bronze de Aljustrel lida, deduzida e commentada em 1876.
L. Garrido. L' Histoire romaine au septième siécle 622—677.

Vol. VI.

J. P. d' Oliveira Martins. A circulaçao fiduciaria.
M. Carreras y Gonzalez. El movimiento contemporaneo de las doctrinas y las practicas economico-estadisticas en Espana.
De Figanière. Memoria sobre o valor da expressao „Aquas Aquarum" dos diplomas antigos.
W. T. Hiern. Memoria sobre algumas plantas da Africa central.
J. M. Rodrigues. Memoria sobre a theoria da balistica.
M. E. da Veiga. Orchideas de Portugal.
A. Furtado. Sur une nouvelle espèce de Céphalopode appartenant au genre Ommatostrephes.
E. Cesaro. Forme poliedriche regolari e semi-regolari in tutti gli spazii.

Jornal de Sciencias mathematicas physicas y naturaes. Lisboa 1882—1888. N⁰. XXIX—XLVIII. 8⁰.

Portugaliae Monumenta historica. Olisipone 1888. Inquisitiones. Vol. I. Fasc. 1—2. fol.

Corpo diplomatico Portuguez contendo os actos e relaçoes politicas e diplomaticas de Portugal. Lisboa 1884—1886. Tomo VI—IX. 4⁰.

Cartas de Alfonse de Albuquerque. Lisboa 1884. Tomo I. 4⁰.

Documentos remettidos da India ou livros das Monçoes. Lisboa 1884—1885. Tomo II—III. 4⁰.

De Benalcanfor. Elogio historico de sua magestade el rei o senhor D. Fernando II. Lisboa 1886. 4⁰.

C. Roma du Bocage. Origem do condado de Portugal. Lisboa 1887. 4⁰.

A. L. Lopes. A moderna cirurgia pulmonar. Lisboa 1888. 4°.

J. S. Ribeiro. Historia dos estabelecimentos scientificos litterarios e artisticos. Lisboa 1882—1888. Tomo X—XV. 8°.

J. de Andrade Corvo. Roteiro de Lisboa a Goa por D. J. de Castro. Lisboa 1882. 8°.

——————— Estudos sobre as provincias ultramarinas. Lisboa 1883—1887. Vol. I—IV. 8°.

A. X. P. Coutinho. Curso de silvicultura. Lisboa 1886—1887. 2 Vol. 8°.

V. Machado. A electricidade. Estudo de algumas das suas principaes applicaçoes. Lisboa 1887. 8°.

E. A. Motta. Licoes de pharmacologia e therapeutica geraes. Lisboa 1888. 8°.

DENEMARKEN.

Mémoires de la Société royale des Antiquaires du Nord. Copenhague 1888. Nouvelle Série. Année 1888. 8°.

Aarböger for nordisk oldkyndighet og historie, udgivne af det kongelige nordiske Oldskrift-Selskab. Kjobenhavn 1889. 2e Raekke. Bind IV. Hefte 1—2. 8°.

ZWEDEN EN NOORWEGEN.

Runa. Minnesblad fran Nordiska Museet. Stockholm 1888. 4°.

Afbildningar af föremäl i Nordiska Museet. Stockholm 1888. I. Smaland. 4°.

Minnen fran Nordiska Museet. Stockholm 1888. Bandet 1—2. 4⁰.

Samfundet for Nordiska Museets främjande ar 1881—1887. Stockholm 1883—1889. 8⁰.

Le Musée d'Ethnographie Scandinave a Stockholm fondé et dirigé par le Dr. A. Hazelius. Notice historique par J. H. Kramer. Stockholm 1879. 8⁰.

A. Hazelius. Bidrag till vär oldlings häfder. Stockholm 1885. 8⁰.

G. Retzius. Finnland im Nordischen Museum. Berlin 1885. 8⁰.

Das Nordische Museum in Stockholm. Stimmen aus der Fremde. Stockholm 1888. 8⁰.

Führer durch die Sammlungen des Nordischen Museums in Stockholm. 1888. 8⁰.

Programme pour la construction d'un édifice destiné au Musée du Nord. Stockholm 1883. 8⁰.

Bulletin mensuel de l'Observatoire météorologique de l'Université d'Upsal. 1888—89. Vol. XX. 4⁰.

Acta Universitatis Lundensis. Lund 1887—88. Tomus XXIV. 4⁰.

RUSLAND.

Matériaux pour servir à l'archéologie de la Russie. N⁰. 3. Antiquités Sibériennes par W. Radloff. St. Pétersbourg 1888. Tome I. Livr. 1. gr. 4⁰.

Verslagen van het keiz. aardrijkskundig Genootschap. St. Petersburg 1889. Deel XXIV. N°. 4—5. 8°. (In het Russisch).

Sitzungsberichte der Naturforscher Gesellschaft. Dorpat 1889. Band VIII. Heft 3. 8°.

Archiv für die Naturkunde Liv-, Ehst- und Kurlands, herausgegeben von der Naturforscher Gesellschaft. Dorpat 1889. 1ste Serie. Band IX. Lief 5. 8°.

Fennia. Bulletins de la Société de Géographie Finlandaise. Helsingfors 1889. N°. 1. 8°.

Sitzungsberichte der kurländischen Gesellschaft für Literatur und Kunst aus dem Jahre 1888. Mitau 1889. 8°.

AZIË.

Journal of the Asiatic Society of Bengal. Calcutta 1889. New Series. Vol. LVII. Part 2. N°. 4—5. 8°,

Proceedings of the Asiatic Society of Bengal. Calcutta 1889. Year 1888. N°. 9—10. 8°.

Indian meteorological Memoirs. Calcutta 1889. Vol. IV. Part 6. 4°.

Report on the meteorology of India in 1887. Calcutta 1887. Year 13. fol.

Meteorological Observations recorded at seven stations in India, October-November 1888. fol.

Meteorological Observations made at the magnetic and meteorological Observatory at Simla during the years 1841—45. London 1877. 4°.

A Catalogue of the moths of India. Calcutta 1888. Part 4 (Geometries) Part 5. (Pyrales) Part 6. (Crambites, Tortrices and Addenda). 8°.

Mittheilungen der deutschen Gesellschaft für Natur-und Völkerkunde Ostasiens. Yokohama 1889. Heft 41 und Supplement Heft. 4°.

Journal of the College of Science, Imperial University of Japan. Tokio 1889. Vol. II. Part 5. 4°.

AMERIKA.

Report of the Commissioner of Education for the year 1886—87. Washington 1888. 8°.

Bureau of Education. Circular N°. 5—6. Washington 1888. 8°.

Annals of the astronomical Observatory of Harvard College. Cambridge 1889. Vol. XVIII. N°. 7—8. Vol. XX. Part 1. 4°.

Inhoud. Vol XVIII.

7. A photographic determination of the brightness of the stars.
8. Index to observations of variable stars.

Vol XX. Part 1.

A. L. Rotch. Observations made at the Blue Hill meteorological Observatory in the year 1887.

3^d Annual Report of the photographic study of stellar spectra. Cambridge 1889. 4°.

Bulletins of the United States coast and geodetic Survey. N°. 1—8. 4°.

E. Loomis. Contributions to Meteorology. New Haven 1889. Chapter 3. 4⁰.

Journal of the American medical Association. Chicago 1889. Vol. XII. N⁰. 11—23. 4⁰.

A. J. Hall. A grammar of the Kwagiutl language. Montreal 1889. 4⁰.

Annual Report of the Canadian Institute. Session 1887—1888. Toronto 1889. 8⁰.

Proceedings of the Canadian Institute. Toronto 1889. 3d Series. Vol. VI. Fasc. 2. 8⁰.

Memorias de la Sociedad cientifica »Antonio Alzate". Mexico 1888—1889. Tomo I. N⁰. 11. Tomo II. N⁰. 1, 6—8. 8⁰.

Boletin mensual. Mexico 1888. Tomo I. N⁰. 11—12. fol.

Revista do Observatorio, publicaçao mensal do imperial Observatorio do Rio de Janeiro. 1889. N⁰. 2—4. roy. 8⁰.

Annales de la Sociedad cientifica Argentina. Buenos Aires 1888—1889. Tomo XXVI. Entr. 4—6. Tomo XXVII. Entr. 1. 8⁰.

AUSTRALIË.

Transactions of the royal Society of Victoria. Melbourne 1885. Vol. XXII. 8⁰.

F. von Mueller. Iconography of Australian species of Acacia. Melbourne 1888. Decade 12—13. 4⁰.

Prodromus of the zoology of Victoria. Melbourne 1888. Decade XVII. 8⁰.

AANGEKOCHT.

Oud-Holland. Nieuwe Bijdragen voor de geschiedenis der Nederlandsche Kunst, Letterkunde, Nijverheid, enz. Amsterdam 1889. Jaarg. VII. Afl. 1. 4°.

De Navorscher. Nijmegen 1889. Nieuwe Serie. Jaarg. 22. N°. 4—6. 8°.

Ch. Daremberg et E. Saglio. Dictionnaire des antiquités grecques et romaines. Paris 1889. Fasc. 13. 4°.

La grande Encyclopédie. Inventaire raisonné des Sciences, des Lettres et des Arts. Paris 1889. Livr. 176—188. 4°.

Journal des Savants. Paris, Mars—Mai 1889. 4°.

Annales des Sciences naturelles. Paris 1829—1889. 1e Série. Tome XVI. 7e Série. Botanie. Tome VIII. Supplément. 8°.

Archives de Zoologie expérimentale et génerale. Paris 1888. 2e Série. Tome VI. N°. 4. 8°.

Bulletin des Sciences mathématiques. Paris 1889. 2e Série. Tome XII. Mars-Juin. 8°.

Annales de Chimie et de Physique. Paris 1889. 6e Série. Tome XVI. Avril. Tome XVII. Mai-Juin. 8°.

Revue générale de Botanique. Paris 1889. Tome I. N°. 4—5. 8°.

A. Laporte. Histoire littéraire du dix-neuvième Siècle. Paris 1889. Tome VI. Livr. 1—2. 8⁰.

The London, Edinburgh, and Dublin philosophical Magazine and Journal of Science. London 1889. 5th Series. Vol XXVII. N⁰. 168—169. 8⁰.

Annals and Magazine of natural History. London 1889. 6th Series. Vol III. N⁰. 16—18. 8⁰.

Journal of Anatomy and Physiology normal and pathological. London 1889. Vol XXIII. Part 3. 8⁰.

The zoological Record for 1887. London 1888. Vol. XXIV. 8⁰.

L. Stephen. Dictionary of national Biography. London 1889. Vol XVIII. (Esdaile-Finan). 8⁰.

Official Yearbook of the scientific and learned Societies of Great Britain and Ireland. London 1889. 6th Issue. 8⁰.

Astronomische Nachrichten. 1889. N⁰. 2885—2904. 4⁰.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1889. N⁰. 7—13. 8⁰.

Arbeiten aus dem kais. Gesundheitsamte. Berlin 1889. Band V. Heft 2. 4⁰.

Veröffentlichungen des kais. Gesundheitsamtes. Berlin 1889. Jahrg. XIII. N⁰. 13—25. 4⁰.

Berichte der deutschen botanischen Gesellschaft. Berlin 1889. Jahrg. VII. Heft 2—4. 8⁰.

Archiv für Naturgeschichte. Berlin 1888. Jahrg. 54. Band I. Heft 3. Jahrg. 55. Band I. Heft 1. 8⁰.

Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1888. Neue Folge. Band XXXVII. Heft 1—2. 8⁰.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAAND OCTOBER 1888.

NEDERLAND.

Wiskundige opgaven met de oplossingen door de leden van het wiskundig Genootschap »Een onvermoeide arbeid komt alles te boven". Amsterdam 1888. Deel III. St. 5. 8°.

Register naar eene wetenschappelijke verdeeling op de werken van het wiskundig Genootschap »Een onvermoeide arbeid komt alles te boven" gedurende het tijdsverloop van 1818—1882. Amsterdam 1885. 8°.

Revue internationale scientifique et populaire des falsifications. Amsterdam 1888. 2e Année. Livr. 3. 4°.

Rembrandt. Vereeniging tot behoud in Nederland van kunstschatten. Jaarverslag uitgebracht op 24 Juli 1888. 4°.

Archives du Musée Teijler. Haarlem 1888. 2e Série. Vol. III. Partie 2. roy. 8°.

Catalogue de la Bibliothèque de la Fondation Teijler. Harlem 1887. Livr. 7—8. roy. 8°.

J. Ritzema Bos. L'anguillule de la tige (Tylenchus devastatrix Kühn) et les maladies des plantes dues à ce Nématode. Harlem 1888. Livr. 1. 8°.
(Extrait des Archives Teijler. 2e Série. Tome III).

Willem de Clercq naar zijn dagboek, door A. Pierson en de Clercq's jongste kleindochter. Haarlem 1888. 2 Dl. 8°.

Tijdschrift der Nederlandsche dierkundige Vereeniging. Leiden 1888. Supplement. Deel II. 8°.

K. MARTIN. Aanteekeningen bij eene geognostische overzichtskaart van Suriname. Leiden 1888. 8°.
(Overgedr. uit het Tijdschrift v. h. Nederl. aardrijksk. Genootschap. 1888).

Tijdschrift van het koninklijk Instituut van Ingenieurs. 's Gravenhage 1888. Jaarg. 1887—1888 5e Afl. 1ste Gedeelte. 1888—1889. 1ste Afl. 2d Gedeelte. 4°.

Bijdragen tot de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië, uitgegeven door het koninklijk Instituut voor de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië. 's Gravenhage 1888. 5e Reeks. Deel III. Afl. 4. 8°.

Algemeen Nederlandsch Familieblad. Tijdschrift voor geschiedenis, geslacht-, wapen-, zegelkunde enz. 's Gravenhage 1888. Jaarg. V. N°. 9. 4°.

J. RITZEMA BOS. lasioderma Laeve Illiger, in zijne verschillende ontwikkelingstoestanden 's Gravenhage 1888. 8°.
(Overgedrukt uit het Tijdschrift voor Entomologie. Dl. XXIV).

Verslagen omtrent 's Rijks verzamelingen van geschiedenis en kunst. 's Gravenhage 1888. N°. IX (1886). 8°.

J. RITZEMA BOS. De dierlijke parasieten van den mensch en de huisdieren. Zwolle 1888. 8°.

—————— Landbouwdierkunde. Nuttige en schadelijke dieren van Nederland. Groningen 1878—1882 Deel I. Afl. 4—7. Deel II. Afl. 2—9. roy.

J. RITZEMA BOS. Bijdrage tot de kennis van de entomologische fauna der Noordzee-eilanden. 8°. (Overgedrukt uit het Tijdschrift voor Entomologie. Deel XVI).

Verzamelingstabel der waterhoogten langs de kusten van de Noordzee, de Zuiderzee en de Nederlandsche rivieren, waargenomen in de maand Mei 1888. fol.

Verzamelingstabel der waterhoogten volgens de bladen der zelfregistreerende peilschalen, waargenomen in de maand Mei 1888. fol.

NEDERLANDSCH OOST-INDIË.

Tijdschrift voor Indische taal-, land- en volkenkunde, uitgegeven door het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Batavia 1888. Deel XXXII. Afl. 4. 8°.

Notulen van de algemeene- en bestuurs-vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Batavia 1888. Deel XXVI. Afl. 2. 8°.

Tijdschrift voor Nijverheid en Landbouw in Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Nederlandsch-Indische Maatschappij van Nijverheid en Landbouw. Batavia 1888. Deel XXXVII. Afl. 2. 8°.

BELGIË.

Bulletin de l' Académie royale des Sciences, des Lettres et des beaux-Arts de Belgique. Bruxelles 1888. 3e Série. Tome XVI. N°. 8. 8°.

Bulletin de l' Académie royale de Médecine de Belgique. Bruxelles 1888. 4e Série. Tome II. N°. 8. 8°.

Annales du Musée royal d'Histoire naturelle de Belgique. Bruxelles 1887. Tome XIV. fol.

Inhoud:

Faune du calcaire carbonifère de la Belgique. 6e Partie. Brachiopodes par L. G. de Koninck.

Annales de l' Observatoire royal de Bruxelles. 1885—1887. Nouvelle Série. Annales astronomiques. Tome V. Fasc. 3. Tome VI. Annales météorologiques. Tome II. 4⁰.

Annuaire de l' Observatoire royal de Bruxelles. 1884—1887. Année 52—55. 4 Dl. 8⁰.

J. C. Houzeau et A. Lancaster. Bibliographie générale de l' astronomie. Bruxelles 1887. Part. 1. roy. 8⁰.

Procès-Verbaux de la Société royale malacologique de Belgique du 3 juillet 1887 à 3 Décembre 1887. 8⁰.

Jaarboek van het Willems-Fonds. Gent 1888. Jaar 38. 8⁰

FRANKRIJK.

Comptes rendus des séances de l' Académie des Sciences. Paris 1888. Tome CVII. N⁰. 13—16. 4⁰.

Bulletin de l' Académie de Médecine. Paris 1888. 2e Série. Tome XX. N⁰. 39—42. 8⁰.

Journal d'Hygiène. Paris 1888. 14e Année. Vol. XIII. N⁰. 627—630. 4⁰.

Revue internationale de l' Electricité et de ses applications. Paris 1888. 4e Année. Tome VII. N⁰. 66—68. roy. 8⁰.

Revue de botanique. Bulletin mensuel de la Société française de Botanique. Courrensan 1887. Tome V. N⁰. 60. 8⁰.

GROOT-BRITTANNIË EN IERLAND.

Proceedings of the royal geographical Society. London 1888. New Series. Vol. X. N⁰. 10. 8⁰.

Journal of the royal microscopical Society. London 1888. Part 5. 8⁰.

Proceedings of the zoological Society of London. 1888. Part 3. 8⁰.

Proceedings and Transactions of the natural History Society. Glasgow 1888. New Series. Vol. II. Part 1. 8⁰.

Journal of the royal geological Society of Ireland. Dublin 1888. Vol. XVII. Part 2. 8⁰.

OOSTENRIJK.

Jahrbuch der kais. kön. geologischen Reichsanstalt. Wien 1888. Band XXXVIII. Heft 1—2. roy. 8⁰.

Verhandlungen der kais. kön. geologischen Reichsanstalt. Wien 1888. N⁰. 12. roy. 8⁰.

Mittheilungen des historischen Vereines für Steiermark. Graz 1888. Heft 36. 8⁰.

DUITSCHLAND.

J. Ritsema-Bos. Beiträge zur Kenntniss landwirthschaftlich schädlicher Thiere. III. Die Narzissen- Schenkelfliege (Merodon equestris Meigen). IX. Allgemeine

Bemerkungen, das Auftreten schädlicher Tiere betreffend. 8°.
(Landwirthschaftliche Versuchs- Stationen, 1885 et 1887).

J. Ritzema-Bos. Einige Bemerkungen über Pleuronectiden. 8°.
(Sonderabdruck a. d. biologischen Centralblatt. Band VI).

———————— Futteränderung bei Insekten. 8°.
(Sonderabdruck a. d. biologischen Centralblatt. Band VII).

Jahrbuch der Gesellschaft für bildende Kunst und vaterländische Altertümer. Emden 1888. Band VIII. Heft 1. 8°.

Jahrbücher des Vereins von Alterthumsfreunden im Rheinlande. Bonn 1888. Heft LXXXV. roy. 8°.

Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der kön. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Leipzig 1888. Band XIV. N°. 7—9. 4°.

Inhoud:

7. W. His. Zur Geschichte des Gehirns sowie der centralen und peripherischen Nervenbahnen beim menschlichen Embryo.
8. W. Braune und O. Fischer. Ueber den Antheil den die einzelnen Gelenke des Schultergürtels an der Beweglichkeit des menschlichen Humerus haben.
9. G. Heinricius und H. Kronecker. Beiträge zur Kenntniss des Einflusse der Respirationsbewegungen auf den Blutlauf im Aortensysteme.

Abhandlungen der philologisch-historischen Classe der kön. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Leipzig 1888. Band X. N°. 9. 4°.

Inhoud:

W. Roscher. Umrisse zur Naturlehre des Cäsarismus.

Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1888. Jahrg. 11. N⁰. 289—91. 8⁰.

Wochenschrift für klassische Philologie. Berlin 1888. Jahrg. 5. N⁰. 27—40. 4⁰.

Neues lausitzisches Magazin, herausgegeben von der oberlausitzischen Gesellschaft der Wissenschaften. Görlitz 1888. Band LXIV. Heft 1. 8⁰.

Jahreshefte des Vereins für vaterländische Naturkunde in Württemberg. Stuttgart 1888. Jahrg. 44. 8⁰.

Annalen des Vereins für nassauische Altertumskunde und Geschichtsforschung. Wiesbaden 1888. Band XX. Heft 2. roy. 8⁰.

ITALIË.

Atti della real Accademia delle Scienze. Torino 1888. Vol. XXIII. Disp. 13—15. 8⁰.

Bollettino delle pubblicazioni Italiane. Firenze 1888. N⁰. 66—67. 8⁰.

Annali delle reale Scuola normale superiore. Pisa 1888. Vol. IX. 8⁰.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Tomo II. Fasc. 5. roy. 8⁰.

RUSLAND.

Nouveaux Mémoires de la Société impériale des Naturalistes. Moscou 1885—1888. Tome XV. Livr 3-5. 4⁰.

Inhoud:

N. A. Sewertzow. Zwei neue oder mangelhaft bekannte russische Jagdfalken.

———————— Etudes sur les variations d'âge des Aquilinés paléarctiques et leur valeur taxonomique.

H. Trautschold. Le néocomien de Sably en Crimée.

Bulletin de la Société impériale des Naturalistes. Moscou 1888. N⁰. 2. 8⁰.

Acta Societatis scientiarum Fennicae. Helsingforsiae 1888. Tomus XV. 4⁰.

Inhoud:

H. Mellin. Om en ny klass af transcendenta funktioner, hvilka äro nära beslägtade med Gammafunktionen.

E. Goursat. Recherches sur l'équation de Kummer.

O. Nordqvist. Beitrag zur Kenntniss der inneren männlichen Geschlechtsorgane der Cypriden.

A. F. Sundell. Ueber eine Modifikation der Quecksilberluftpumpe.

P. A. Karsten. Icones selectae Hymenomycetum Fenniae nondum delineatorum.

A. F. Sundell. Spectralversuche.

L. Lindelöf. Statistisk undersökning af ställningen i Finska ecklesiastikstatens enke- och pupillkassa den 1 Maj 1884.

O. M. Reuter. Revisio synonymica Heteropterorum palaearcticorum quae descripserunt auctores vetustiores (Linnaeus 1758—Latreille 1806).

H. A. Schwarz. Ueber ein die flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung.

E. R. Neovius. Anwendung der Theorie der elliptischen Functionen auf eine die Krümmungslinien eines Ellipsoids betreffende Aufgabe.

A. F. Sundell. Transportables Barometer.

W. Söderhjelm. Petrarca in der deutschen Dichtung.

Ofversigt af Finska Vetenskaps-Societetens förhandlingar. Helsingfors 1886—1887. N⁰. XXVIII—XXIX. 8⁰.

Bidrag till Kännedom af Finlands Natur och Folk,

utgifna af Finska Vetenskaps Societeten. Helsingfors 1887—1888. Häftet 45—47. 8⁰.

Finska vetenskaps Societeten 1838—1888, dess organisation och verksamhets. Helsingfors 1888. 8⁰.

A Z I Ë.

A Catalogue of the moths of India, compiled by E. C. Cotes and C. Swinhoe. Part 3. Noctues, Pseudo-Deltoides and Deltoides. Calcutta 1888. 8⁰.

A M E R I K A.

Smithsonian miscellaneous Collections. Washington 1888. Vol. XXXII—XXXIII. 2 Dl. 8⁰.

Annual Report of the board of regents of the Smithsonian Institution showing the operations to July 1885. Washington 1886. Part 2. 8⁰.

Memoirs of the Boston Society of natural History. Boston 1888. Vol. IV. N⁰. 5—6. 4⁰.

Inhoud:

5. J. Marcou. The taconic of Georgia and the report on the geology of Vermont.
6. R. Thaxter. The Entomophthoreae of the United States.

Journal of the Academy of natural Science. Philadelphia 1888. 2d Series. Vol. IX. Part 2. gr. 4⁰.

Inhoud:

W. B. Scott. On some new and little-known Creodonts.
H. F. Osborn. On the structure and classification of the mesozoic Mammalia.

Proceedings of the American philosophical Society. Philadelphia 1888. Vol. XXV. N⁰. 127. 8⁰.

Annual Report of the geological Survey of Pennsylvania for 1886. Harrisburg 1887. Part 3. 2 Vol. 8^0.

Proceedings of the American Association for the advancement of Science. Salem 1888. Vol. XXXVI. 8^0.

American Journal of Mathematics, edited by S. Newcomb. Baltimore 1888. Vol. X. N^0. 3. 4^0.

American Journal of Philology, edited by B. L. Gildersleeve. Baltimore 1888. Vol. IX. N^0. 1. 8^0.

American chemical Journal, edited by Ira Remsen. Baltimore 1888. Vol. X. N^0. 3. 8^0.

Studies from the biological Laboratory. Baltimore 1888. Vol. IV. N^0. 3. 8^0.

Johns Hopkins University Studies in historical and political Science. Baltimore 1888. Vol. VI. 8^0.

American Journal of Science. New Haven 1888. Vol. XXXV. N^0. 210. Vol. XXXVI. N^0. 211—213. 8^0.

26th Annual Report of the state board of agriculture of the state of Michigan from October 1886 to June 30, 1887. Lansing 1887. 8^0.

Banquet given by the learned societies of Philadelphia at the American Academy of Music, September 17, 1887; closing the ceremonies in commemoration of the framing and signing of the constitution of the United States. Philadelphia 1888. 8^0.

Journal of the American medical Association. Chicago 1888. Vol XI. N^0. 11—14. 4^0.

15th Annual Report of the geological and natural History Survey of Minnesota. St. Paul 1887. 8^0.

Bulletin of the geological and natural History Survey of Minnesota. St. Paul 1887. N⁰. 2—4. 8⁰.

Journal of the Trenton natural History Society. Trenton N⁰. 1. 1888. N⁰. 3. 8⁰.

Proceedings of the Elliott Society of Science and Arts. Charlestown 1888. Vol. II. N⁰. 2. 8⁰.

Memorias de la Sociedad cientifica »Antonio Alzate". Mexico 1888. Tomo II. N⁰. 2. 8⁰.

Boletin mensual del Observatorio meteorologico-magnetico de Mexico. 1888. N⁰. 5—6. fol.

AUSTRALIË.

Australian Museum. Annual Report of the trustees for 1887. fol.

AANGEKOCHT.

Oud-Holland. Nieuwe Bijdragen voor de geschiedenis der Nederlandsche Kunst, Letterkunde, Nijverheid, enz. Amsterdam 1888. Jaarg. 6. Afl. 3. 4⁰.

De Navorscher. Amsterdam 1888. Nieuwe Serie. Jaarg. 21. Afl. 10. 8⁰.

La grande Encyclopédie. Inventaire raisonné des Sciences, des Lettres et des Arts. Paris 1888. Livr. 150—153. 4⁰.

Journal des Savants. Paris, Septembre 1888. 4⁰.

Bulletin des Sciences mathématiques. Paris 1888. 2e Série. Tome XII. Aout. 8⁰.

Annales de Chimie et de Physique. Paris 1888. 6e Série. Tome XV. Octobre. 8⁰.

The London, Edinburgh and Dublin philosophical Magazine and Journal of Science. London 1888. 5th Series. Vol. XXVI. N⁰. 161. 8⁰.

Annals and Magazine of natural History. London 1888. 6th Series. Vol. II. N⁰. 10. 8⁰.

Journal of Anatomy and Physiology normal and pathological. London 1888. Vol. XXIII. Part 1. 8⁰.

Annals of Botany. London 1888. Vol. II. N⁰. 6. 8⁰.

Dictionary of national Biography. London 1888. Vol. XVI. (Drant-Edridge) 8⁰.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1888. N⁰. 20—21. 8⁰.

Astronomische Nachrichten. N⁰. 2859—2861. 4⁰.

Veröffentlichungen des kais. Gesundheitsamtes. Berlin 1888. Jahrg. XII. N⁰. 39—42. 4⁰.

Allgemeine deutsche Biographie. Leipzig 1888. Band XXVII. (Quad-Reinald). 8⁰.

Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1888. Neue Folge. Band XXXV. Heft 2. Beiblätter. Band XII. Heft 9. 8⁰.

Zeitschrift für physikalische Chemie. Leipzig 1888. Band II. Heft 10. 8⁰.

Der zoologische Garten. Frankfurt a. M. 1888. Jahrg. XXIX. N⁰. 9. 8⁰.

Flora. Regensburg 1888. N⁰. 22—27. 8⁰.

Dingler's polytechnisches Journal. Stuttgart 1888. Band CCLXIX. Heft 13. Band CCLXX. Heft 1—3. 8⁰.

Bibliothèque universelle et revue Suisse. Lausanne 1888. 3e Période. Tome XXXIX. N⁰. 116—117. 8⁰.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAAND NOVEMBER 1888.

NEDERLAND.

Volks-Almanak der Maatschappij tot Nut van 't Algemeen, voor het jaar 1889. Amsterdam z.j. 8⁰.

J. P. N. Land. Het luitboek van Thysius. Amsterdam 1889. 8⁰.

Al de boeken van het Nieuwe Testament in het Boegineesch vertaald door B. F. Matthes. Amsterdam 1874—1888. 2 Dl. 8⁰.

Revue internationale scientifique et populaire des falsifications. Amsterdam 1888. Livr. 4. 4⁰.

Tijdschrift uitgegeven door de Nederlandsche Maatschappij ter bevordering van Nijverheid. Haarlem 1888. 4e Reeks. Deel XII. Afl. 11. 8⁰.

Verslag van den toestand der Stads-Bibliotheek in de gemeente Haarlem over 1887. 8⁰.

J. de Haas Jr. Inleiding tot de wijsbegeerte. Haarlem 1889. 8°.

Flora Batava. Leiden 1888. Afl. 281—282. 4°.

Onderzoek omtrent de afsluiting en droogmaking van de Zuiderzee, de Wadden en de Lauwerzee. Leiden 1888. Nota. N°. 3. fol.

Inhoud:

De afsluiting Noord-Holland—Wieringen—Friesland en de droogmaking van het gedeelte der Zuiderzee binnen die afsluiting. A. de afsluiting. 2. De invloed der afsluiting op de waterloozing der provinciën langs de Zuiderzee.

P. P. C. Hoek. Bibliografie der fauna van Nederland. Leiden 1888. 8°.

In Memoriam Mr. C. Vosmaer. Leiden 1888. 8°.

Tijdschrift voor Entomologie, uitgegeven door de Nederlandsche entomologische Vereeniging. 'sGravenhage 1888. Deel XXXI. Afl. 4. 8°.

Algemeen Nederlandsch Familieblad, tijdschrift voor geschiedenis-, geslacht-, wapen-, zegelkunde enz. 'sGravenhage 1888. Jaarg. 5. N°. 10. 8°.

I. G. R. Acquoy. Middeleeuwsche geestelijke liederen en leisen, met eene klavier-begeleiding naar den aard hunner tonen. 'sGravenhage 1888. 4°.

Jaarboek der Rijks-Universiteit te Groningen, 1887—1888. Groningen 1888. 8°.

Algemeen verslag gedaan te Groningen in de jaarlijksche vergadering van contribueerende leden, den 2^{den} Juli 1888 wegens het Instituut van Doofstommen. 8°.

Koninkrijk der Nederlanden. Statistiek van den in-, uit- en doorvoer over het jaar 1887. 'sGravenhage 1888. 2de gedeelte. fol.

Statistiek van het koninkrijk der Nederlanden. Nieuwe Serie. Staten van de in-, uit- en doorgevoerde voornaamste handelsartikelen gedurende de maand September 1888. 'sGravenhage 1888. fol.

Verzamelingstabel der waterhoogten langs de kusten van de Noordzee, de Zuiderzee en de Nederlandsche rivieren, waargenomen in de maand Juni 1888. fol.

Verzamelingstabel der waterhoogten volgens de bladen der zelfregistreerende peilschalen, waargenomen in de maand Juni 1888. fol.

NEDERLANDSCH OOST-INDIË.

Geneeskundig Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Vereeniging tot bevordering der geneeskundige Wetenschappen in Nederlandsch-Indië. Batavia 1888. Deel XXVIII. Afl. 3. 8°.

Tijdschrift voor nijverheid en landbouw in Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Nederlandsch-Indische Maatschappij van nijverheid en landbouw. Batavia 1888. Deel XXXVII. Afl. 3. 8°.

BELGIË.

Mémoires des concours et des savants étrangers publiés par l'Académie royale de Médecine de Belgique. Bruxelles 1888. Tome VIII. Fasc. 5. 4°.

Inhoud:

G. T. Stevens. Essai sur les maladies des centres nerveux, leurs causes et leur traitement.

Bulletin de l'Académie royale de Médecine. Bruxelles 1888. 4e Série. Tome II. N°. 9. 8°.

Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége. Bruxelles 1888. 2e Série. Tome XV. 8°.

Verslagen en Mededeelingen der koninklijke Vlaamsche Academie voor Taal- en Letterkunde. Gent 1888. Afl. 4. 8°.

Jaarboek der koninklijke Vlaamsche Academie voor Taal- en Letterkunde. Gent 1888. 2de jaar. 8°.

Vlaamsche Bibliographie. Lijst van Nederlandsche boeken in 1887 in België verschenen. Gent 1888. 8°. (Uitgave van het Willems-fonds.)

F. de Potter. Geschiedenis van de gemeenten der provincie Oost-Vlaanderen. Gent 1888. Deel XLII. 8°.

FRANKRIJK.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Paris 1888. Tome CVII. N°. 17—20. 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Inscriptions et belles-Lettres. Paris 1888. 4e Série. Tome XVI. Mai-Juin. 8°.

Bulletin de l'Académie de Médecine. Paris 1888. 3e Série. Tome XX. N°. 43—46. 8°.

Comptes rendus hebdomadaires de la Société de Biologie. Paris 1888. 8e Série. Tome V. N°. 29—31. 8°.

Journal d'Hygiène. Paris 1888. Année 14. Vol. XIII. N°. 631—635. 4°.

Revue internationale de l'Electricité et de ses applications. Paris 1888. 4e Année. Tome VII. N⁰. 69. roy. 8⁰.

E. Lemoine. Notes sur diverses questions de la géométrie du triangle. 8⁰.
(Association française pour l'avancement des Sciences, 1888).

——————— De la mesure de la simplicité dans les sciences mathématiques. 8⁰.
(Association française pour l'avancement des Sciences, 1888).

——————— De la mesure de la simplicité dans les constructions mathématiques. 8⁰.
(Mathésis. Tome VIII).

GROOT-BRITTANNIË EN IERLAND.

Proceedings of the royal Society. Londen 1888. Vol. XLIV. N⁰. 271. 8⁰.

Monthly Notices of the royal astronomical Society. London 1888. Vol. XLVII. N⁰. 9. 8⁰.

Proceedings of the royal geographical Society. London 1888. New Series. Vol. X. N⁰. 11. 8⁰.

Journal of the anthropological Institute of Great-Britain and Ireland. London 1888. Vol. XVIII. N⁰. 2. 8⁰.

Astronomical and magnetical and meteorological Observations made at the royal Observatory, Greenwich in the year 1886. London 1888. 4⁰.

Results of meridian observations made at the royal Observatory, Cape of good Hope, during the years 1882 till 1885, February 8, under the direction of D. Gill. London. 8⁰.

Annals of the Cape Observatory. Vol. II. Part 2. 4°.

Inhoud:

W. H. FINLAY. On the variations of the instrumental adjustments of the Cape transcit-circle.

OOSTENRIJK.

Verhandlungen der k.k. geologischen Reichsanstalt. Wien 1888. N°. 13. 4°.

DUITSCHLAND.

Abhandlungen der kön. preussischen Akademie der Wissenschaften aus dem Jahre 1887. Berlin 1888. 4°.

Inhoud:

SCHULZE. Zur Stammesgeschichte der Hexactinelliden.
GÖPPERT. Nachträge zur Kenntniss der Coniferenhölzer der palaeozoischen Formationen.
WEBER. Ueber den Pârasiprakâca des Krishnadâsa.
NÖLDEKE. Die Ghassânischen Fürsten aus dem Hause Gafna's.
RAWITZ. Die Fussdrüse der Opistobranchier.
KÖTTER. Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der algebraischen ebenen Curven.
GRÄBER. Die Wasserleitungen von Pergamon.

Sitzungsberichte der kön. preussischen Akademie der Wissenschaften. Berlin 1888. N°. 21—37. roy. 8°.

Archiv für pathologische Anatomie und Physiologie und für klinische Medicin. Berlin 1888. Band CXIII. Heft 3. Band CXIV. Heft 1. 8°.

Jahresbericht des naturhistorischen Museums in Lubeck für das Jahr 1887. Lubeck 1888. 8°.

Bericht über die Senckenbergische naturforschende Gesellschaft. Frankfurt a/M. 1888. 8°.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. Leipzig 1888. Jahrg. 23. Heft 1—2. 8⁰.

R. Hoppe. Grunert's Archiv der Mathematik und Physik. Leipzig 1888. 2te Reihe. Teil VII. Heft 1. 8⁰.

Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1888. Jahrg. XI. N⁰. 292—293. 8⁰.

Flavii Josephi Opera omnia. Post Immanuelem Bekkerum recognovit S. A. Naber. Lipsiae 1888. Vol. I. 8⁰.

Petermann's Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt. Gotha 1888. Band XXXIV. N⁰. 10. 4⁰.

Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, herausgegeben von der medizinisch-naturwissenschaftlichen Gesellschaft. Jena 1888. Band XXII. Heft 3—4. 8⁰.

Festschrift zur Jubelfeier des 25-jährigen Bestehens des Vereins für Erdkunde. Dresden 1888. 8⁰.

Jahrbuch für Geschichte, Sprache und Litteratur Elsass-Lothringens, herausgegeben von dem historisch-literarischen Zweigverein des Vogesen-Clubs. Strassburg 1888. Jahrg. IV. 8⁰.

Abhandlungen der philosophisch-philologischen Classe der kön. bayerischen Akademie der Wissenschaften. München 1888. Band XVIII. Abth. 1. 4⁰.

Inhoud:

J. Kelle. Die philosophischen Kunstausdrücke in Notkers Werken.
F. Ohlenschlager. Die römische Grenzmark in Bayern.
H. Brunn. Ueber die Ausgrabungen der Certosa von Bologna. Zugleich als Forsetzung der Probleme in der Geschichte der Vasenmalerei.
J. Kelle. Die S. Galler deutschen Schriften und Notker Labeo.

C. M. von Bauernfeind. Das bayerische Praecisions-Nivellement. München 1888. 7e Mittheilung. 4°.

ZWITSERLAND.

Bulletin de la Société vaudoise des Sciences naturelles. Lausanne 1888. 3e Série. Vol. XXIV. N°. 98. 8°.

ITALIË.

Atti della reale Accademia dei Lincei. Roma 1888. Serie 4a. Rendiconti. Vol IV. 1° Semestre. Fasc. 11—13. 2° Semestre. Fasc. 1—5. 4°.

Bollettino delle opere moderne straniere. Roma 1888. Vol. III. N°. 1—3. 8°.

Bollettino delle pubblicazioni italiane. Firenze 1888. N°. 68—69. 8°.

Memorie del reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Classe di Scienze matematiche e naturali. Milano 1888. Serie 3. Vol. VII. Fasc. 2. 4°.

Inhoud:

O. Murani. Ricerche sulla distanza esplosiva della scintilla elettrica.
G. Sangalli. Di alcune anomalie di prima formazione piu rare ed importanti del corpo umano.
A. Verga. Poche parole sulla spina trocheale dell' orbita umano.
A. Corradi. Della minutio sanguinis e dei salassi periodici.

Memorie del reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Classe di Lettere e Scienze morali e politiche. Milano 1887. Serie 3. Vol. IX. Fasc. 1. 4°.

Inhoud:

C. Cantu. I Balcani.

C. Ferrini. Scolii inediti allo Pseudo-Teofilo.
A. Buccellati. Esposizione critica del progetto di Codice penale Italiano.

Rendiconti del reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Milano 1887. Serie 2. Vol. XX. 8°.

SPANJE.

Memorial de Ingenieros del Ejercito. Madrid 1886—1887. Epoca 3. Tomo III—IV. 4 Dl. 8°.

ZWEDEN EN NOORWEGEN.

Upsala Universitets Arsskrift 1887. Upsala z. j. 8°.

RUSLAND.

Verslagen van het keiz. aardrijkskundig Genootschap. St. Petersburg 1888. Deel XXIV. N°. 2. 8°.
(In het Russisch.)

Jaarverslag van het keiz. aardrijkskundig Genootschap over 1887. St. Petersburg 1888. 8°.

Mémoires du Comité géologique. St. Pétersbourg 1888. Vol. V. N°. 2—4. Vol. VI. Vol. VII. N°. 1—2. 4°.

Inhoud, Vol. V.

2. S. Nikitin. Les vestiges de la période crétacée dans la Russie centrale.
3. M. Tzwetaw. Céphalopodes de la section supérieure du calcaire carbonifère de la Russie centrale.
4. A. Stuckenberg. Anthozoen und Bryozoen des obern mittelrussischen Kohlenkalks.

Vol. VI.

P. Krotow. Geologische Forschungen am westlichen Ural-Abhänge in den Gebieten von Tscherdyn und Ssolikamsk. Lief 1—2.

Vol. VII.

1. Carte géologique de la Russie; feuille 92. Saratovpensa composée par J. Sintzov.
2. S. Nikitin et P. Ossoskov. La région transvolgienne de la feuille 92 de la Carte géologique générale de la Russie.

Bulletins du Comité géologique. St. Pétersbourg 1887—1888. Vol. VI. N⁰. 11—12. Vol. VII. N⁰. 1. 8⁰.

Bibliothèque géologique de la Russie, 1887. St. Pétersbourg 1888. 8⁰.

G. Loeschcki. Die westliche Giebelgruppe am Zeustempel zu Olympia. Dorpat 1888. 4⁰.

Festrede zur Jahresfeier der Stiftung der Universität Dorpat am 12 December 1887. Dorpat 1887. 4⁰.

W. Hoerschelmann. Een griechisches Lehrbuch der Metrik. Dorpat 1888. 8⁰.

H. Arronet. Quantitative Analyse des Menschenblutes nebst Untersuchungen zur Controlle und Vervollständigung der Methode. Dorpat 1887. 8⁰.

J. Atlass. Ueber Senegin. Dorpat 1887. 8⁰.

A. Bary. Beiträge zur Baryumwirkung. Dorpat 1888. 8⁰.

H. Dehio. Untersuchungen über den Einfluss des Coffeïns und Thees auf die Dauer einfacher psychischer Vorgänge. Dorpat 1887. 8⁰.

W. Demitsch. Literärische Studien über die wichtigsten russischen Volksheilmittel aus dem Pflanzenreiche. Dorpat 1888. 8⁰.

R. von Engelhardt. Beiträge zur Toxikologie des Anilin, Dorpat 1888. 8⁰.

A. Friedrichson. Untersuchungen über bestimmte Veränderungen der Netzhautcirculation bei Allgemeinleiden mit besonderer Berücksichtigung der Blutbeschaffenheit bei Anämie und Chlorose Dorpat 1888. 8°.

W. Greiffenhagen. Ueber den Mechanismus der Schädelbrüche. Dorpat 1887. 8°.

E. von Haudring. Bacteriologische Untersuchung einiger Gebrauchswässer Dorpats. Dorpat 1888. 8°.

P. Hellat. Eine Studie über die Lepra in den Ostseeprovinzen, mit besonderer Berücksichtigung ihrer Verbreitung und Aetiologie. Dorpat 1887. 8°.

C. Johansen. Die Gastrostomie bei carcinomatoeser Strictur des Oesophagus. Dorpat 1888. 4°.

E. Kiwull. Pharmakologische Untersuchungen über einige Solvinpräparate. Dorpat 1888. 8°.

A. Kroeger. Beiträge zur Pathologie des Rückenmarkes. Dorpat 1888. 8°.

A. Natanson. Beiträge zur Kenntniss der Pyrogallolwirkung. Dorpat 1888. 8°.

R. von Oettingen. Ueber Enterostomie und Laparotomie bei acuter inneren Darmocclusion bedingt durch Volvulus, Strangulation und Inflexion. Dorpat 1888. 8°.

D. Pachoruwkow. Ueber Sapotoxin. Dorpat 1887. 8°.

H. Pander. Beiträge zur Chromwirkung. Dorpat 1887. 8°.

R. Radziwillowicz. Ueber Nachweis und Wirkung des Cytisins. Dorpat 1887. 8°.

E. Sack. Ueber Phlebosklerose und ihre Beziehungen zur Arteriosklerose. Dorpat 1887. 8⁰.

D. Scherenziss. Untersuchungen über das foetale Blut im Momente der Geburt. Dorpat 1888. 8⁰.

A. Schwartz. Ueber die Wechselbeziehung zwischen Haemoglobin und Protoplasma nebst Beobachtungen zur Frage vom Wechsel der rothen Blutkörperchen in der Milz. Dorpat 1888. 8⁰.

H. Stillmark. Ueber Ricin, ein giftiges Ferment aus den Samen von Ricinus comm. L. und einigen anderen Euphorbiaceen. Dorpat 1888. 8⁰.

St. Trzebinski. Ueber circumscripte Bindegewebshyperplasien in den peripheren Nerven, besonders in den Plexus brachiales. Dorpat 1888. 8⁰.

P. Wagner. Beitrag zur Toxicologie des aus den Aconitum Napellus-knollen dargestellten reinen Alcaloïds: Aconitinum crystallisatum purum und seiner Zersetzungsproducte. Dorpat 1888. 8⁰.

R. Wanach. Ueber die Menge und Vertheilung des Kaliums, Natriums und Chlors im Menschenblut. St. Petersburg 1888. 8⁰.

P. Birkenwald. Beiträge zur Chemie der Sinapis juncea und des ätherischen Senföls. Dorpat 1888. 8⁰.

C. Böning. Untersuchungen des Inversionsproductes der aus Trehalamanna stammenden Trehalose. Dorpat 1888. 8⁰.

E. Dohrmann. Beiträge zur Kenntniss des Lycaconitins. Dorpat 1888. 8⁰.

F. EINBERG. Beiträge zur Kenntniss des Myoctonins. Dorpat 1887. 8⁰.

G. GROFE. Ueber die Pendelbewegung an der Erdoberfläche. Dorpat 1888. 4⁰.

R. KORDES. Vergleichung der wichtigeren narcotischen Extracte der russischen Pharmacopoë mit den anderer Pharmacopoën unter besonderer Berücksichtigung des Alkaloidgehaltes. St. Petersburg 1888. 8⁰.

L. NATANSON. Ueber die kinetische Theorie unvollkommener Gase. Dorpat 1887. 4⁰.

W. PETERSEN. Die Lepidopteren-Fauna des arktischen Gebietes von Europa und die Eiszeit. Dorpat 1887. 8⁰.

L. STRUVE. Bestimmung der Constante der Praecession und der eigenen Bewegung des Sonnensystems. St. Petersburg 1887. 4⁰.

G. THOMS. Zur Werthschätzung der Ackererden auf naturwissenschaftlich-statistischer Grundlage. Riga 1888. 8⁰.

J. LEZIUS. De Alexandri magni expeditione indica quaestiones. Dorpati 1887. 8⁰.

W. LUTOSTAWSKI. Erhaltung und Untergang der Staatsverfassungen nach Plato, Aristoteles und Machiavelli. Dorpat 1887. 8⁰.

W. VON ROHLAND. Die strafbare Unterlassung. Dorpat 1887. 8⁰.

——————— Die Gefahr im Strafrecht. Dorpat 1888. 8⁰.

A. Sonny. De Massiliensium rebus quaestiones. Petropoli 1887. 8°.

Acta Societatis pro fauna et flora fennica. Helsingforsiae 1886—1888. Vol. III—IV. 2 Dl. 8°.

Meddelanden af Societas pro fauna et flora fennica. Helsingfors 1888. Heft 14. 8°.

Finska geologiska Undersökning. Beskrifning till kartbladet N°. 10 et 11. Helsingfors 1887. 8° Met 2 kaarten. 4°.

AZIË.

T. Moore. Descriptions of new indian lepidopterous insects. Part III. Heterocera. (Pyralidae, Crambidae, Geometridae, Tortricidae, Tineidae). Calcutta 1888. 4°. (Published by the Asiatic Society of Bengal).

Mittheilungen der deutschen Gesellschaft für Natur-und Völkerkunde Ostasiens. Tokio 1888. Heft 38. 4°.

AFRIKA.

Transactions of the South African philosophical Society. Capetown 1888. Vol. V. Part 1. 8°.

AMERIKA.

Journal of the American medical Association. Chicago 1888. Vol. XI. N°. 15—18. 8°.

Transactions of the Kansas Academy of Science. Topeka 1887. Vol. X. 8°.

Memorias de la Sociedad cientifica »Antonio Alzate." Mexico 1888. Tomo II. N°. 3. 8°.

Revista do Observatorio, publicacao mensal do imperial Observatorio do Rio de Janeiro. 1888. Anno III. N°. 9. 8°.

Boletin de la Academia nacional de ciencias en Cordoba. Buenos-Aires 1887. Tomo XI. Entr. 1. 8°.

Anales del Museo nacional. Republica de Costa Rica. San José 1888. Tomo I. 8°.

AUSTRALIË.

Proceedings of the Linnean Society of N. S. W. Sydney 1887—1888. 2d Series. Vol. II. Part 1—4. Vol. III. Part 1. 8°.

List of the names of contributors to the first Series (Vol. I—X) of the Proceedings of the Linnean Society of N. S W. (from 1875 to 1885) with the titles of, and references to the papers and exhibits contributed by each. Sydney 1888. 8°.

AANGEKOCHT.

De Navorscher. Amsterdam 1888. Nieuwe Serie. Jaarg. 21. Afl. 11. 8°.

I. G. Frederiks en F. J. van den Branden. Biographisch Woordenboek der Noord- en Zuid-Nederlandsche Letterkunde. Amsterdam 1888. Afl. 3. 8°.

La grande Encyclopédie. Inventaire raisonné des Sciences, des Lettres et des Arts. Paris 1888. Livr. 154—157. 4°.

Journal des Savants. Paris, Octobre 1888. 4°.

Annales de Chimie et de Physique. Paris 1888. 6e Série. Tome XV. Novembre 8°.

A. Laporte. Histoire littéraire du 19e siècle. Paris 1888. Tome V. Livr. 4. 8°.

The London, Edinburgh, and Dublin philosophical Magazine and Journal of Science. London 1888. 5th Series. Vol. XXVI. N°. 162. 8°.

Annals and Magazine of natural History. London 1888. 6th Series. Vol. II. N°. 11. 8°.

Report of the 57th meeting of the British Association for the advancemement of Science. London 1888. 8°.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1888. N°. 22. 8°.

Astronomische Nachrichten. 1888. N°. 2862—2866. 4°.

Veröffentlichungen des kais. Gesundheitsamtes. Berlin 1888. Jahrg. XII. N°. 43—46. 4°.

Corpus inscriptionum Atticarum. Berolini 1888. Vol. XII. Pars 3. fol.

Archiv für Naturgeschichte. Berlin 1886—1888. Jahrg. 52. Band II. Heft 3. Jahrg. 54. Band I. Heft 1. Band II. Heft 2. 8°.

Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1888. Neue Folge. Band XXXV. Heft 3. Beiblätter. Band XII. St. 10. 8°.

Zeitschrift für physikalische Chemie. Leipzig 1888. Band II. Heft 11. 8°.

Bibliotheca zoologica. II. Leipzig 1888. Lief. 6. 8⁰.

Der zoologische Garten. Frankfurt a. M. 1888. Jahrg. 29. N⁰. 10. 8⁰.

Dinglers polytechnisches Journal. Stuttgart 1888. Band CCLXX. Heft 4—6. 8⁰.

Flora oder allgemeine botanische Zeitung. Regensburg 1888. Jahrg. 71. N⁰. 28—32. 8⁰.

Archives des Sciences physiques et naturelles. Genève 1888. 3e Période. Tome XX. N⁰. 10. 8⁰.

A. DE GUBERNATIS. Dictionnaire international des écrivains du jour. Florence 1889. Livr. 5. roy. 8⁰.

Journal of Morphology. Boston 1888. Vol. II. N⁰. 1. 8⁰.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAAND DECEMBER 1888.

NEDERLAND.

Revue internationale scientifique et populaire des falsifications. Amsterdam 1888. 2e Année. Livr. 5. 4⁰.

Archives Néerlandaises des Sciences exactes et naturelles. Harlem 1888. Tome XXIII. Livr. 1 3⁰.

Tijdschrift uitgegeven door de Nederlandsche Maatschappij ter bevordering van Nijverheid. Haarlem 1888. 4e Reeks. Deel XII. Afl. 12. 8⁰.

R. van Boneval Faure. Het Nederlandsche burgerlijk Procesrecht. Leiden 1889. 2e Druk. Deel III. 8°.

Tijdschrift van het koninklijk Instituut van Ingenieurs 1888—1889. 's Gravenhage 1888. Afl. 1. 1ste Gedeelte. Afl. 2. 2de Gedeelte. 4°.

Bijdragen voor vaderlandsche Geschiedenis en Oudheidkunde. 's Gravenhage 1888. 3e Reeks. Deel V. Afl. 2. 8°.

Algemeen Nederlandsch Familieblad. Tijdschrift voor geschiedenis, geslacht-, wapen-, zegelkunde, enz. 's Gravenhage 1888. Jaarg. 5. N°. 11. 4°.

Onderzoek naar den aard en de oorzaak der Beri-Beri, en de middelen om die ziekte te bestrijden. Ingesteld, op last der Regeering, door Dr. C. A. Pekelharing en Dr. C. Winkler. Utrecht 1888. 4°.

Mededeelingen en Berichten der Geldersch- Overijsselsche Maatschappij van Landbouw over 1888. Arnhem 1888. N°. 3. 8°.

Publications de la Société historique et archéologique dans le duché de Limbourg. Ruremonde 1888. Tome XXIV. 8°.

Hoe waren de Friezen in het midden der dertiende eeuw gekleed en gewapend? Welke waren hunne middelen van bestaan? Twee vragen beantwoord door Mr. J. Dirks. 4°.

Statistiek van het koninkrijk der Nederlanden. Nieuwe Serie. Staten van de in-, uit- en doorgevoerde voor-

naamste handelsartikelen gedurende de maand October 1888. 's Gravenhage 1888. fol.

Verzamelingstabel der waterhoogten langs de kusten van de Noordzee, Zuiderzee en de Nederlandsche rivieren waargenomen, in de maand Juli 1888. fol.

Verzamelingstabel der waterhoogten volgens de bladen der zelfregistreerende peilschalen, waargenomen in de maand Juli 1888. fol.

NEDERLANDSCH OOST-INDIË.

Tijdschrift voor Nijverheid en Landbouw in Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Nederlandsch-Indische Maatschappij van Nijverheid en Landbouw. Batavia 1888. Deel XXXVII. Afl. 4. 8°.

Observations made at the magnetical and meteorological Observatory at Batavia. 1888. Vol. VIII. X. 2 Dl. 4°.

Regenwaarnemingen in Nederlandsch-Indië. Batavia 1888. Jaarg. 9. 8°.

BELGIË.

Bulletin de l' Académie royale des Sciences, des Lettres et des beaux-Arts de Belgique. Bruxelles 1888. 3e Série. Tome XVI. N°. 9—11. 8°.

Bulletin de l' Académie royale de Médecine de Belgique. Bruxelles 1888. 4e Série. Tome II. N°. 10. 8°.

F. Plateau. Recherches expérimentales sur la vision chez les arthropodes. Bruxelles 1888. 4e Partie. 8°. (Extrait des Mémoires couronnés de l' Académie royale de Belgique. Tome XLIII).

FRANKRIJK.

Comptes rendus des séances de l' Académie des Sciences. Paris 1888. Tome CVII. N°. 21—25. 4°.

Comptes rendus des séances de l' Académie des Inscriptions et belles-Lettres. Paris 1888. 4e Série. Tome XVI. Juillet-Août. 8°.

Bulletin de l'Académie de Médecine. Paris 1888. 3e Série. Tome XX. N°. 47—51. 8°.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de la Société de Biologie. Paris 1888. 8e Série. Tome V. N°. 32—37. roy. 8°.

L. Lallemand. De l'assistance des classes rurales au XIXe Siècle. Paris 1889. 8°.

Journal d' Hygiène. Paris 1888. 14e Année. Vol. XIII. N°. 636—639. 4°.

Revue internationale de l' Electricité et de ses applications. Paris 1888. 4e Année. Tome VII. N°. 70—71. roy. 8°.

GROOT-BRITTANNIË en IERLAND.

Proceedings of the royal Society of London. 1888. Vol. XLIV. N°. 272. 8°.

Monthly Notices of the royal astronomical Society. London 1888. Vol. XLIX. N°. 1. 8°.

Proceedings of the royal geographical Society. London 1888. New Series. Vol. X. N°. 12. 8°.

Journal of the royal microscopical Society. London 1888. Part 6. 8°.

Medico-chirurgical Transactions published by the royal medical and chirurgical Society. London 1888. Vol. XXXVII. 8⁰.

Transactions of the Linnean Society of London. 1887. 2d Series. Botany. Vol. II. Part 15. Vol. III. Part 1. 4⁰.

Inhoud, Vol. III. Part. 15:

D. Oliver. Enumeration of the plants collected by Mr. H. H. Johnston on the Kilima-Njaro expedition, 1884.

Vol. III. Part. 1.

J. E. T. Aitchison. The botany of the Afghan delimitation commission.

Transactions of the Linnean Society of London. 1887—1888. 2d Series. Zoology. Vol. IV. Part 5—6. 4⁰

Inhoud:

A. E. Aeton. A revisional monograph of recent Ephemeridae or mayflies. Part 5—6.

Journal of the Linnean Society of London. 1887—1888. Botany. Vol. XXIII. N⁰. 152—155. Vol. XXIV. N⁰. 159—162. Zoology. Vol. XX. N⁰. 118. Vol. XXI. N⁰. 130—131. Vol. XXII. N⁰. 136—139. 8⁰.

List of the Linnean Society of London. Session 1887—1888. London 1888. 8⁰.

Report of the scientific results of the voyage of H. M. S. Challenger during the years 1873—76. London 1888. Zoology. Vol. XXIII—XXVII. 6 Dl. 8⁰.

Proceedings of the philosophical Society. Glasgow 1887. Vol. XIX. 8⁰.

OOSTENRIJK-HONGARIJE.

Denkschriften der kais. Akademie der Wissenschaften. Wien 1887. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. Band LIII. 4°.

Inhoud:

OPPOLZER. Ueber die astronomische Refraction.

WEISS. Ueber die Berechnung der Präcession mit besonderer Rücksicht auf die Reduction eines Sternkataloges auf eine andere Epoche.

VON ETTINGSHAUSEN. Beiträge zur Kenntniss der Tertiärflora Australiens.

——————— Beiträge zur Kenntniss der fossilen Flora Neuseelands.

ROLLETT. Beiträge zur Physiologie der Muskeln.

STEINDACHNER und DÖDERLEIN. Beiträge zur Kenntniss der Fische Japan's.

SERSAWY. Ueber den Zusammenhang zwischen den vollständigen Integralen und der allgemeinen Lösung bei partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung.

SKIBINSKI. Der Integrator des Prof. Dr. ZMURKO in seiner Wirkungsweise und praktischen Verwendung.

HEIMERL. Beiträge zur Anatomie der Nyctagineen. I. Zur Kenntniss des Blüthenbaues und der Fruchtentwicklung einiger Nyctagineen. (Mirabilis Ialapa L. und longiflora L., Oxybaphus nyctagineus Sweet.

MERK. Die Mitosen im Centralnervensysteme. Ein Beitrag zur Lehre vom Wachsthume desselben.

BOBEK. Ueber Curven vierter Ordnung vom Geschlechte Zwei, ihre Systeme berührender Kegelschnitte und Doppeltangenten.

IGEL. Zur Theorie der Combinanten und zur Theorie der Jerard'schen Transformation.

VON WETTSTEIN. Monographie der Gattung Hedraeanthus.

Denkschriften der kais. Akademie der Wissenschaften. Wien 1888. Philosophisch-historische Classe. Band XXXVI. 4°.

Inhoud:

PFIZMAIER. Der chinesische Dichter PE-LO-THIEN.

Büdinger. Der Patriciat und das Fehderecht in den letzten Jahrzehnten der römischen Republik, eine staatsrechterliche Unter suchung.
Miklosich. Die Blutrache bei den Slaven.
Pfizmaier. Die elegische Dichtung der Chinesen.
Kremer. Ueber das Einnahmebudget des Abbasiden-Reiches vom Jahre 306 H. (918—919).
Wünsch-Müller. Die Keil-Inschrift von Aschrut-Darga.
Wessely. Griechische Zauberpapyrus von Paris und London.
Auer. Der Tempel der Vesta und das Haus der Vestalinnen am Forum Romanum.

Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch - naturwissenschaftliche Classe. Wien 1887—1888. 1e Abth. Band XCV—XCVI. 2e Abth. Band XCV. Heft 3—5. Band XCVI. Heft 1—5. 3e Abth. Band XCV—XCVI. 8°.

Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften. Philosophisch-historische Classe. Wien 1887—1888. Band CXIV. Heft 2. Band CXV. 8°.

Archiv für oesterreichische Geschichte. Wien 1887—1888. Band LXXI. 1ste & 2te Hälfte. Band LXXII. 1ste Hälfte. 8°.

Almanach der kais. Akademie der Wissenschaften. Wien 1887. Jahrg. 37. 8°.

Jahrbuch der kais. kön. geologischen Reichsanstalt. Wien 1888. Band XXXVII. Heft 3—4. Band XXXVIII. Heft 3. 4°.

Zeitschrift des Ferdinandeums für Tirol und Vorarlberg. Innsbruck 1888. 3te Folge. Heft 32. 8°.

Mittheilungen des naturwissenschaftlichen Vereines für Steiermark. Graz 1888. Jahrg. 1887. 8°.

Lotos. Jahrbuch für Naturwissenschaft; im Auftrage des Vereines »Lotos" Prag 1888. Neue Folge. Band IX. 8⁰.

DUITSCHLAND.

Ergebnisse der Beobachtungsstationen an den deutschen Küsten über die physikalischen Eigenschaften der Ostsee und Nordsee und die Fischerei. Berlin 1888. Jahrg. 1887. Heft 7—9. 4⁰. Obl.

Archiv für pathologische Anatomie und Physiologie und für klinische Medicin. Berlin 1888. Band CXIV. Heft 2—3. 8⁰.

L. F. von Eberstein. Urkundliche Nachträge zu den geschichtlichen Nachrichten von dem reichsritterlichen Geschlechte Eberstein vom Eberstein auf der Rhön. Berlin 1885—1887. 5te & 6te Folge. 2 Dl. roy. 8⁰.

———————— Entwurf einer zusammenhängenden Stammreihe des freifränkischen Geschlechts Eberstein von den in den ältesten Urkunden erscheinenden Vorvätern an bis zur Gegenwart. Berlin 1887. 8⁰.

Publicationen der Sternwarte in Kiel. 1882—1888. 4⁰.

Inhoud:

E. Lamp. Das Aequinoctium für 1860. 0 abgeleitet aus den von Dr. C. F. Pape am Meridiankreise der Altonaer Sternwarte in den Jahren 1859—1862 angestellten Sonnenbeobachtungen.

H. Kreutz. Untersuchungen über das Cometensystem 1843 I, 1880 I und 1882 II. Theil I. Der grosse Septembercomet 1882 II.

Abhandlungen der philologisch-historischen Classe der kon. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Leipzig 1888. Band XI. N⁰. 1. 4⁰.

Inhoud:

F. Zarncke. Kurzgefasstes Verzeichniss der Originalaufnahmen von Goethe's Bildniss.

Grunert's Archiv der Mathematik und Physik. Leipzig 1888. 2te Reihe. Theil VII. Heft 2. 8°.

Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1888. Jahrg. XI. N°. 294—295. 8°.

Petermann's Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt. Gotha 1888. Band XXXIV. Heft 11—12. Ergänzungsheft N°. 91. 4°.

Abhandlungen der naturforschenden Gesellschaft. Halle a/S. 1888. Band XVII. Heft 1—2. 4°.

Inhoud:

H. Grenacher. Abhandlungen zur vergleichenden Anatomie des Auges II. Das Auge der Heteropoden, geschildert am Pterotrachea coronata Forsk.

G. Kraus. Beiträge zur Kenntniss fossiler Hölzer.

W. Zopf. Ueber einige niedere Algenpilze (Phycomyceten) und eine neue Methode ihre Keime aus dem Wasser zu isoliren.

D. Leicher. Ueber den Einfluss des Durchströmungswinkels auf die elektrische Reizung der Muskelfaser.

I. Bernstein. Neue Theorie der Erregungsvorgänge und elektrischen Erscheinungen an der Nerven- und Muskelfaser.

———— Ueber die Sauerstoffzehrung der Gewebe.

Bericht über die Sitzungen der naturforschenden Gesellschaft im Jahre 1887. Halle 1888. 8°.

Sitzungsberichte der philosophisch-philologischen und historischen Classe der kön. bayr. Akademie der Wissenschaften. München 1888. Heft 3. Band II. Heft 1—2. 8°.

ZWITSERLAND.

H. G. van de Sande Bakhuijzen. Rapport sur les longitudes, latitudes et azimuths. Neuchatel 1888. 4°.
(Extrait des Comptes-rendus de la session de l'Association géodésique internationale 1887.)

ITALIË.

Bollettino delle opere moderne straniere. Roma 1888. Vol. III. N°. 4. 8°.

Bollettino delle pubblicazioni italiane. Firenze 1888. N°. 70—71. 8°.

Archivio per l' Antropologia e la Etnologia. Firenze 1888. Vol XVIII. Fasc. 2. 8°.

G. de Lorenzo. Memorie ed osservazioni di clinico-medica idrologia ed igiene. Napoli 1889. 8°.

Atti della Societa Toscana die Scienze Naturali. Pisa 1888. (Memorie) Vol. IX. roy. 8°.

Atti della Societa Toscana di Scienze naturali. Processi Verbali del' Luglio 1888. 8°.

DENEMARKEN.

Aarböger for nordisk oldkyndighed og historie, udgivne af det kongelige nordiske Oldskrift-Selskab. Kjobenhavn 1888. 2e Raekke. Bind III. Hefte 3. 8°.

ZWEDEN EN NOORWEGEN.

A. Blijtt. On variations of climate in the course of time. Christiania 1886. 8°.
(Christiania videnkabs Selskabs forhandlinger 1886. N°. 8.)

A. Blijtt. The probable cause of the displacement of beach-lines. An attempt to compute geological epochs. Christiania 1889. 8°.

(Christiania videnskabs Selskabs forhandlinger 1889. N°. 1.)

RUSLAND.

Catalogus alphabeticus librorum qui in Bibliotheca speculae imperialis literarum Universitatis Petropolitanae asservantur. Petropoli 1888. 8°.

AZIË.

Meteorological Observations recorded at seven stations in India, May-July. 1888. 4°.

Journal of the Asiatic Society of Bengal. Calcutta 1888. Vol. LVII. Part 1. N°. 1—2. Part 2. N°. 2—3. 8°.

Proceedings of the Asiatic Society of Bengal. Calcutta 1888. N°. 4—8. 8°.

AMERIKA.

Monographs of the U. S. geological Survey. Washington 1886. Vol. XII. 4°.

Inhoud:

S. Franklin Emmons. Geology and mining industry of Leadville Colorado. Met Atlas. plano.

Memoirs of the American Academy of Arts and Sciences. Cambridge 1887—1888. Vol. XI. Part V. N°. 6. Part VI. N°. 7. 4°.

Inhoud:

6. S. P. LANGLEY, C. A. YOUNG and E. C. PICKERING. Pritchard's Wedge photometer.
7. M. WYMAN. Memoir of Daniel Treadwell.

Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences. Boston 1888. New Series. Vol. XV. Part 1. 8°.

Annals of Harvard College Observatory. Cambridge 1888. Vol. XVIII. N°. 6. 4°.

Inhoud:

Detection of new nebulae by photography.

Transactions of the American philosophical Society. Philadelphia 1888. New Series. Vol. XVI. Part 2. 4°.

Inhoud:

E. D. COPE. On the intercentrum of the terrestrial Vertebrata.
H. C. DE S. ABBOTT. A chemical study of Yucca angustifolia.
E. D. COPE. Systematic Catalogue of the species of Vertebrata found in the beds of the permian epoch in North America.
———— Synopsis of the vertebrate fauna of the Puerco series.
———— On the shoulder-girdle and extremities of Eryops.

Proceedings of the Academy of natural Sciences. Philadelphia 1888. Part 2. 8°.

Annual Report of the geological Survey of Pennsylvania for 1886. Harrisburg 1887. Part IV. 8°.

American Journal of Science. New Haven 1888. 3d Series. Vol XXXVI. N°. 214—215. 8°.

Journal of the American medical Association. Chicago 1888. Vol. XI. N°. 19—23. 4°.

Proceedings and Transactions of the royal Society of Canada for the year 1887. Montreal 1888. Vol. V. 4°.

Proceedings of the Canadian Institute. Toronto 1888. 3[d] Series. Vol. VI. Fasc. 1. 8⁰.

Memorias de la Sociedad cientifica »Antonio Alzate". Mexico 1888. Tomo I. N⁰. 6—7. Tomo II. N⁰. 4. 8⁰.

Boletin de estadica del estado de Puebla. Puebla de Zaragoza 1888. Tomo II. N⁰. 1, 2, 16. fol.

Annales de l' Observatoire impérial de Rio de Janeiro. 1887. Tome III. 4⁰.

Inhoud:

Observations du passage de Vénus en 1882.

Revista do Observatorio, publicacao mensal do imperial Observatorio do Rio de Janeiro. 1888. Anno III. N⁰. 10—11. 4⁰.

Boletin de la Academia nacional de Ciencias en Cordoba. Buenos Aires 1888. Tomo XI. Entr. 2. 8⁰.

AUSTRALIË.

Journal and Proceedings of the royal Society of N. S. W. Vol. XXII. Part 1. 8⁰.

Transactions and Proceedings of the royal Society of Victoria. Melbourne 1887—1888. Vol. XXIV. Part 1—2. 8⁰.

AANGEKOCHT.

De Navorscher. Amsterdam 1888. Nieuwe Serie. Jaarg. 21. Afl. 12. 8⁰.

Jaarboek der Rijks-Universiteit te Leiden 1887—1888. Leiden 1888. 8⁰.

Journal des Savants. Paris, Novembre 1888. 4⁰.

La grande Encyclopédie. Inventaire raisonné des Sciences, des Lettres et des Arts. Paris 1888. Livr. 158—162. 4⁰.

Annales des Sciences naturelles. Paris 1888. 7e Série. Botanique. Tome VIII. N⁰. 1—3. Zoologie. Tome VI. N⁰. 1—3. 8⁰.

Archives de Zoologie expérimentale et générale. Paris 1888. 2e Série. Tome VI. N⁰. 2. 8⁰.

Bulletin des Sciences mathématiques. Paris 1888. 2e Série. Tome XII. Septembre—Octobre. 8⁰.

Annales de Chimie et de Physique. Paris 1888. 6e Série. Tome XV. Décembre. 8⁰.

The London, Edinburgh and Dublin philosophical Magazine and Journal of Science. London 1888. 5th Series. Vol. XXVI. N⁰. 163. 8⁰.

Annals and Magazine of natural History. London 1888. 6th Series. Vol. II. N⁰. 12. 8⁰.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1888. N⁰. 23—25. 8⁰.

Astronomische Nachrichten. 1888. N⁰. 2867—2871. 4⁰.

Veröffentlichungen des kais. Gesundheitsamtes. Berlin 1888. Jahrg. XII. N⁰. 47—51. 4⁰.

Berichte der deutschen botanischen Gesellschaft. Berlin 1888. Jahrg. VI. Heft 8. 8⁰.

Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1888. Neue Folge. Band XXXV. Heft 4. Beiblätter. Band XII. St. 11. 8⁰.

Sachregister zu den Annalen der Physik und Chemie. Band 1—160. Ergänzungsband 1—8 und Jubelband, 1824—1877. Leipzig 1888. 8⁰.

Journal für Ornithologie. Leipzig 1888. Jahrg. 36. Heft 2—3. 8⁰.

Dingler's polytechnisches Journal. Stuttgart 1888. Band CCLXX. Heft 7—11. 8⁰.

Bibliothèque universelle et Revue Suisse. Lausanne 1888. 3e Période. Tome XL. N⁰. 118. 8⁰.

Archives des Sciences physiques et naturelles. Genève 1888. 3e Période. Tome XX. N⁰. 11. 8⁰.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAAND JANUARI 1889.

NEDERLAND.

Werken van het Genootschap ter bevordering der Natuur-, Genees- en Heelkunde. Amsterdam 1888. Deel VI. N⁰. 2. 8⁰.

Jaarcijfers over 1887 en vorige jaren, uitgegeven door het statistisch Instituut. N⁰. 7. 2e Aflevering. 8⁰.

Revue internationale scientifique et populaire des falsifications. Amsterdam 1889. 2e Année. N⁰. 6. 4⁰.

Tijdschrift van de Nederlandsche Maatschappij ter bevordering van Nijverheid. Haarlem 1889. N⁰. 1. 8⁰.

Flora Batava. Leiden 1888. Afl. 283—284. 4⁰.

Recueil des travaux chimiques des Pays-Bas. Leide 1888. Tome VII. N⁰. 1—6. 8⁰.

13de Jaarverslag omtrent het zoölogisch station der Nederlandsche dierkundige Vereeniging. Leiden 1888. 8⁰.

Annales de l' Ecole polytechnique de Delft. Leide 1888. Tome IV. Livr. 3. 4⁰.

Inhoud:

S. Hoogewerff et W. A. van Dorp. Sur la constitution chimique de la berbérine.
A. E. Rahusen. Sur quelques propriétés des déterminants, appliquées à une question de géométrie à n dimensions.
Th. H. Behrens. Quelques considérations sur l' origine des cratères-lacs (Maare) de l' Eifel.

Beschouwingen over eenige rivieren, waaronder Nederlandsche, in verband met de handels- en scheepvaartbelangen, en met enkele vraagstukken die in de laatste jaren zijn voorgekomen, door I. G. W. Fijnje. 's Gravenhage 1888. 3e Gedeelte. 2 Dl. 4⁰.
(Uitgegeven door het Departement van Waterstaat, Handel en Nijverheid).

Bijdragen tot de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië, uitgegeven door het koninklijk Instituut voor de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië. 's Gravenhage 1889. 5e Reeks. Deel IV. Afl. 1. 8⁰.

Beschrijving van de haven van Batavia »Tandjong Priok". 's Gravenhage 1888. 8⁰.

Description de »Tandjong Priok" port de Batavia. la Haye 1888. 8°.

Beschreibung des Hafens von Batavia »Tandjong Priok". Haag 1888. 8°.

Description of the Harbour of Batavia »Tandjong Priok". The Hague 1888. 8°.

Verslag van het verhandelde in de algemeene vergadering van het provinciaal Utrechtsch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen, gehouden den 26 Juni 1888. Utrecht 1888. 8°.

Aanteekeningen van het verhandelde in de sectie-vergaderingen van het provinciaal Utrechtsch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen, ter gelegenheid van de algemeene vergadering, gehouden den 26 Juni 1888. Utrecht. 8°.

P. M. Netscher. Laatste levensjaren en liquidatie der Societeit van Berbice als particuliere handelsvennootschap, 1815—1848. 8°.

(Uitgegeven door het provinciaal Utrechtsch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen).

De Grondwet. Toelichting en kritiek door Mr. J. T. Buijs. Arnhem 1884—1888. Deel II—III. 8°.

Nederland en Oranje. Feestrede den 30 November 1888 in de Martinikerk te Groningen uitgesproken door Jhr. Prof. van der Wijck. Groningen 1888. 8°.

J. Ritzema Bos. Landbouwdierkunde. Nuttige en schadelijke dieren van Nederland. Groningen 1878. Afl. 1—3, Dl. II. Afl. 1. roy. 8°.

Statistiek van het koninkrijk der Nederlanden. Nieuwe Serie. Staten van de in-, uit- en doorgevoerde voornaamste handelsartikelen gedurende de maand November 1888. 's Gravenhage 1888. fol.

Verzamelingstabel der waterhoogten langs de kusten van de Noordzee, de Zuiderzee en de Nederlandsche rivieren, waargenomen in de maand Augustus 1888. 8°.

Verzamelingstabel volgens de bladen der zelfregistreerende peilschalen, waargenomen in de maand Augustus 1888. fol.

BELGIË.

Annuaire de l' Académie royale des Sciences, des Lettres et des beaux-Arts de Belgique. Bruxelles 1889. 55e Année. 8°.

Bulletin de l' Académie royale de Médecine de Belgique. Bruxelles 1888. 4e Série. Tome II. N°. 11. 8°.

Botanisch Jaarboek, uitgegeven door het kruidkundig Genootschap Dodonaea. Gent 1889. Jaarg. 1. 8°.

G. Staes. De bloemen van Daucus carota L. 8°.
(Overgedrukt uit het botanisch Jaarboek. Dl. I).

———— De waterplanten. 8°.
(Overgedrukt uit het botanisch Jaarboek. Dl. I).

J. Verschaffelt. Het nut der photomicrographie bij de studie der plantenkunde. 8°.
(Overgedrukt uit het botanisch Jaarboek. Dl. I).

———— De flora van het steenkooltijdperk. 8°.
(Overgedrukt uit het botanisch Jaarboek. Dl. I).

FRANKRIJK.

Comptes rendus des séances de l' Académie des Sciences. Paris 1888—1889. Tome CVII. N⁰. 26—27. Tome CVIII. N⁰. 1—2. 4⁰.

Bulletin de l' Académie de Médecine. Paris 1888—1889. 3e Série. Tome XX. N⁰. 52. Tome XXI. N⁰. 1—2. 8⁰.

Bulletin de la Société mathématique de France. Paris 1888. Tome XVI. N⁰. 5. 8⁰.

Journal d' Hygiène. Paris 1888—1889. 14e Année. Vol. XIII. N⁰. 640—641. 15e Année. Vol. XIV. N⁰. 642—644. 4⁰.

Revue internationale de l'Electricité et de ses applications. Paris 1888—1889. Tome VII. N⁰. 72. Tome VIII. N⁰. 73—74. roy. 8⁰.

GROOT-BRITTANNIË EN IERLAND.

Proceedings of the royal Society. London 1888. Vol. XLV. N⁰. 273. 8⁰.

Monthly Notices of the royal astronomical Society. London 1888. Vol. XLIX. N⁰. 2. 8⁰.

Proceedings of the royal geographical Society. London 1889. New Series. Vol. XI. N⁰. 1. 8⁰.

Report of a committee of the clinical Society of London to investigate the subject of Myxoedema. London 1888. 8⁰.

(Supplement to Vol. XXI. of the Transactions of the clinical Society.)

Proceedings of the Cambridge philosophical Society. Cambridge 1888. Vol. VI. Part 4. 8⁰.

Transactions of the royal Irish Academy. Dublin 1888. Vol. XXIX. Part 3—4. 4⁰.

Inhoud:

3. T. ALEXANDER and A. W. THOMSON. On two-nosed catenaries and their application to the design of segmental arches.
4. D. J. CUNNINGHAM and E. H. BENNETT. The brain and eyeball of a human cyclopian monster.

Proceedings of the royal Irish Academy. Dublin 1888. 3d Series. Vol. I. N⁰. 1. 8⁰.

O O S T E N R IJ K.

Mittheilungen der anthropologischen Gesellschaft. Wien 1888. Band XVIII. Heft 4. 4⁰.

Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft. Wien 1888. Band XXXVIII. N⁰. 3—4. 8⁰.

D U I T S C H L A N D.

Sitzungsberichte der Gesellschaft naturforschender Freunde. Berlin 1888. Jahrg. 1888. 8⁰.

Instruktion für die Beobachter an den meteorologischen Stationen II, III, und IVer Ordnung. Berlin 1888. 4⁰.

Wochenschrift für klassische Philologie. Berlin 1888. Jahrg. 5. N⁰. 41—52. 4⁰.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. Leipzig 1888. Jahrg. 23. Heft 3. 8⁰.

Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1888. Jahrg. 11. N⁰. 296. Jahrg. 12. N⁰. 297—298. 8⁰.

24ster Bericht der wissenschaftlichen Gesellschaft Philomathie. Neisse 1888. Zugleich Festschrift zur Feier des 50-jährigen Bestehens. 8°.

Jahrbücher des nassauischen Vereins für Naturkunde. Wiesbaden 1888. Jahrg. 41. 8°.

I T A L I Ë.

Indici e Cataloghi. IV. I r. Codici palatini della Biblioteca nazionale centrale di Firenze. Roma 1888. Vol. I. Fasc. 8. 8°.

Bollettino delle opere moderne straniere. Roma 1888. Vol. III. N°. 5. 8°.

Bollettino delle pubblicazioni italiane. Firenze 1888. N°. 72. 1889. N°. 73. 8°.

Atti della real Accademia delle Scienze. Torino 1889. Vol. XXIV. Disp. 1. 8°.

Atti del reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. Venezia 1888. Serie 6. Tomo V. N°. 10. Tomo VI. N°. 1—9.

R U S L A N D.

Verslagen van het keiz. aardrijkskundig Genootschap. St. Petersburg 1888. Deel XXIV. N°. 3. 8°.
(In het Russisch).

Magnetische Beobachtungen des Tifliser physikalischen Observatoriums im Jahre 1886—1887. Tiflis 1888. 8°.

J. Yarkovski. Hypothèse cinétique de la gravitation universelle en connexion avec la formation des éléments chimiques. Moscou 1888. 8°.

A Z I Ë.

Journal of the China branch of the royal Asiatic Society. Shanghai 1888. New Series. Vol. XXII. N°. 6. 8°.

Imperial University of Japan. Calendar for the year 1888—89. Tokio 1888. 8°.

Journal of the college of Science, imperial University, Japan. Tokio 1888. Vol. II. Part 4. 4°.

Inhoud:

K. Yamagawa. Determination of the thermal conductivity of marble.
H. Nagaoka. Combined effects of torsion and longitudinal stress on the magnetization of nickel.
———— On the magnetization and retentiveness of nickel wire under combined torsional and longitudinal stress.
M. Kuhara. Specific volume of camphor and of borneol determined with proximate accuracy.

A M E R I K A.

Index-Catalogue of the Library of the Surgeon-General's office U. S. Army. Washington 1888. Vol. IX. (Medicine-Nywelt). 4°.

Medical and surgical history of the war of the rebellion. Part III. Vol. I. Medical history. Washington 1888. 4°.

43th Annual Report of the director of the astronomical Observatory of Harvard College presented December 15, 1888. Cambridge 1888. 8°.

Journal of the American medical Association. Chicago 1888. Vol. XI. N°. 24—26. Vol. XII. N°. 1. 4°.

Journal of the Elisha Mitchell scientific Society. Raleigh 1888. Vol. V. Part 2. 8⁰.

Boletin mensual. Mexico 1888. Tomo I. N⁰. 8—10. fol.

AUSTRALIË.

Transactions of the royal Society of Victoria. Melbourne 1888. Vol. I. Part 1. 4⁰.

Inhoud:

W. B. Spencer. The anatomy of Megascolides australis (the giant Earth-worm of Gippsland).

Transactions and Proceedings of the royal Society of Victoria. Melbourne. Vol. XXIII. 8⁰.

AANGEKOCHT.

De Navorscher. Amsterdam 1889. Nieuwe Serie. Jaarg. 22. N⁰. 1. 8⁰.

Oud-Holland. Nieuwe Bijdragen voor de geschiedenis der Nederlandsche Kunst, Letterkunde, Nijverheid, enz. Amsterdam 1888. Jaarg. 6. Afl. 4. 4⁰.

I. G. Frederiks en F. J. van den Branden. Biographisch Woordenboek der Noord- en Zuid-Nederlandsche Letterkunde. Amsterdam 1888. Nieuwe druk. Afl. 4. 8⁰.

La grande Encyclopédie. Inventaire raisonné des Sciences, des Lettres et des Arts. Paris 1889. Livr. 163—166. 4⁰.

Journal des Savants. Paris, Décembre 1888. 4⁰.

Bulletin des Sciences mathématiques. Paris 1888. 2 Série. Tome XII. Octobre. 8⁰.

Annales de Chimie et de Physique. Paris 1889. 6e Série. Tome XVI. Janvier. 8⁰.

Voyage archéologique en Grèce et en Asie mineure sous la direction de PH. LE BAS. (1842—1844) publiées et commentées par S. REINACH. Paris 1888. roy. 8⁰.

The London, Edinburgh, and Dublin philosophical Magazine and Journal of Science. London 1889. 5th Series. Vol. XXVII. N⁰. 104. 8⁰.

Annals and Magazine of natural History. London 1889. 6th Series. Vol. III. N⁰. 13. 8⁰.

Journal of Anatomy normal and pathological. London 1889. Vol. XXIII. Part. 2. 8⁰.

Annals of Botany. London 1888. Vol. II. N⁰. 7. 8⁰.

Dictionary of national Biography. London 1889. Vol. XVII. (Edward-Erskine). 8⁰.

Astronomische Nachrichten. N⁰. 2872—2874. 4⁰.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1888. N⁰. 26. 1889. N⁰. 1. 8⁰.

Veröffentlichungen des kais. Gesundheitsamtes. Berlin 1889. Jahrg. 13. N⁰. 1—3. 4⁰.

Berichte der deutschen botanischen Gesellschaft. Berlin 1888. Jahrg. 6. Heft 9. 8⁰.

Archiv für Naturgeschichte. Berlin 1888. Jahrg. 54. Band I. Heft 2. 8⁰.

Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1889. Neue Folge. Band XXXVI. Heft 1. 8⁰.

Zeitschrift für physikalische Chemie. Leipzig 1888. Band II. Heft 12. 8⁰.

Der zoologische Garten. Frankfurt a. M. 1888. Jahrg. 29. N⁰. 11—12. 8⁰.

Flora. Regensburg 1888. N⁰. 33—36. 8⁰.

Dingler's polytechnisches Journal. Stuttgart 1888—89. Band CCLXX. Heft 12—13. Band CCLXXI. Heft 1—3. 8⁰.

Bibliothèque universelle et Revue Suisse. Lausanne 1888. 3e Période. Tome XL. N⁰. 119—120. 8⁰.

Archives des Sciences physiques et naturelles. Genève 1888. 3e Période. Tome XX. N⁰. 12. 8⁰.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAANDEN FEBRUARI EN MAART 1889.

NEDERLAND.

Catalogus van de Boekerij der Nederlandsche Maatschappij tot bevordering der Geneeskunst. Amsterdam 1885—1889. 4e en 5e Supplement. 8⁰.

Maandblad voor Natuurwetenschappen, uitgegeven door het Genootschap ter bevordering van Natuur-, Genees- en Heelkunde te Amsterdam 1885—1888. Jaarg. 12. N⁰. 1—8. Jaarg. 14. N⁰. 1—8.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Amsterdam 1888. Deel XV. Stuk 2. 8⁰.

Wiskundige opgaven met de oplossingen door de leden van het wiskundig Genootschap »Een onvermoeide arbeid komt alles te boven". Amsterdam 1889. Deel III. Stuk 6. Deel IV. Stuk 1. 8⁰.

Bijdragen van het statistisch Instituut. Amsterdam 1889. 5e Jaarg. N⁰. 1. 8⁰.

Jaarboek van het Mijnwezen in Nederlandsch Oost-Indië. Amsterdam 1888. Jaarg. 17. 2de gedeelte. 8⁰.

Revue internationale scientifique et populaire des falsifications. Amsterdam 1889. 2e Année. Livr. 7—8. 4⁰.

H. Blink. Nederland en zijne bewoners. Handboek der Aardrijkskunde en Volkenkunde van Nederland. Amsterdam z. j. Afl. 1. 8⁰.

Tijdschrift der Nederlandsche Maatschappij ter bevordering van Nijverheid. Haarlem 1889. N⁰. 2—3. 8⁰.

T. M. C. Asser. Studiën op het gebied van Recht en Staat (1858—1888). Haarlem 1889. 8⁰.

W. Druif. Mutismus hystericus. Leiden 1889. Academisch proefschrift. 8⁰.

Catalogus codicum arabicorum Bibliothecae Academiae Lugduno-Batavae. Editio secunda auctoribus M. J. de Goeje et M. Th. Houtsma. Lugduni Batavorum 1888. Vol. I. 8⁰.

Recueil de textes relatifs à l'histoire des Seldjoucides par M. Th. Houtsma. Lugduni Batavorum 1889. Vol. II. 8°.

Sammlungen des geologischen Reichsmuseums in Leiden. N°. I. Beiträge zur Geologie Ost-Asiens und Australiens. Leiden 1888. N°. 17. 8°.

K. Martin. Het eiland Urk, benevens eenige algemeene beschouwingen over de geologie van Nederland. Leiden 1889. 8°.
(Overgedrukt uit het Tijdschrift v. h. kon. Nederl. aardrijkskundig Genootschap. 1889.)

Recueil des travaux chimiques des Pays-Bas. Leide 1889. Tome VIII. N°. 1—2. 8°.

B. P. Moors. Beschrijving van een natten gasmeter met standvastig watervlak en verklaring van zijne werking. 's Gravenhage 1889. 4°.
(Uitgegeven door het Departement van Waterstaat, Handel en Nijverheid.)

Verslag van de aanwinsten der koninklijke Bibliotheek gedurende het jaar 1887. 's Gravenhage 1889. 8°.

Het Rijksarchief te 's Gravenhage. 1887—1888. 8°.

Tijdschrift van het koninklijk Instituut van Ingenieurs. 1888—1889. 's Gravenhage 1889. 2de Afl. 1ste gedeelte. 3de Afl. 2de gedeelte. 4°.

Tijdschrift uitgegeven door de Nederlandsche entomologische Vereeniging. 's Gravenhage 1889. Deel XXXII. Afl. 1. 8°.

Algemeen Nederlandsch Familieblad. Tijdschrift voor geschiedenis-, geslacht-, wapen-, zegelkunde enz. 's Gravenhage 1889. Jaarg. 6. N°. 1—2. 4°.

Nieuw kerkelijk Handboek, tevens compleet Predikantenboek door M. W. L. Alphen Sr. 's Gravenhage 1889. Jaarg. 1889. Met supplement I. 8°.

C. Snouck Hurgronje. Mekka. 's Gravenhage 1889. Band II. 8°. Met Atlas. fol.

Waterbouwkunde door N. H. Henket, Ch. M. Schols en J. M. Telders. 's Gravenhage 1888. Deel III. 3e gedeelte. Afl. 4. 4e gedeelte. Afl. 1. 8°.

30ste Jaarlijksch Verslag door de hoofd-commissie aan de leden van de Vereeniging tot daarstelling van eene algemeene openbare Bibliotheek en van een daaraan verbonden Leeskabinet te Rotterdam, medegedeeld in de algemeene vergadering van 25 Februari 1889. 8°.

Werken van het historisch Genootschap te Utrecht. 1888—1889. Nieuwe Serie. N°. 51—53. 8°.

Bijdragen en Mededeelingen van het historisch Genootschap, gevestigd te Utrecht 1888. Deel XI. 8°.

S. Muller Fzn. De registers en rekeningen van het bisdom Utrecht, 1325—1336. Utrecht 1889. Deel I. 8°. (Werken van het historisch Genootschap N°. 53.)

Nederlandsch meteorologisch Jaarboek voor 1879, uitgegeven door het koninklijk Nederlandsch meteorologisch Instituut. Utrecht 1889. Jaarg. 31. Deel II. 4°.

Routen voor stoomschepen tusschen Aden en Nederlandsch Oost-Indië. Utrecht 1888. 4°. Oblong.

Stroomen en temperatuur aan de oppervlakte in de golf van Aden en den indischen Oceaan bij kaap Guardafui. Utrecht 1888. 4°. Oblong.

Onweders in Nederland, naar vrijwillige waarnemingen in 1888. Amsterdam 1889. Deel IX. 8°.

Catalogus van de Buma-Bibliotheek te Leeuwarden. 1889. 1ste en 2de gedeelte. 8°.

J. C. G. Boot. Suspiciones Livianae. 8°. (Ex Mnemosynes Vol. XVII.)

A. D. Loman. Het hooglied als Oratorium. 8°.

Statistiek van het Koninkrijk der Nederlanden. Nieuwe Serie. Staten van de in-, uit- en doorgevoerde voornaamste handelsartikelen gedurende de maanden December 1888, Januari en Februari 1889. 's Gravenhage 1889. fol.

Verzamelingstabel der waterhoogten langs de kusten van de Noordzee, de Zuiderzee en de Nederlandsche rivieren, waargenomen in de maanden September en October 1888. fol.

Verzamelingstabel der waterhoogten volgens de bladen der zelfregistreerende peilschalen, waargenomen in de maanden September en October 1888. fol.

NEDERLANDSCH OOST-INDIË.

Leerstukken en preeken in de Favorlangsche taal (eiland Formosa) vervaardigd door Jac. Vertrecht. Batavia 1888. 8°.

Mr. J. A. van der Chijs. Nederlandsch-Indisch Plakaatboek, 1602—1811. Batavia 1888. Deel V. 8°.

Geneeskundig Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Vereeniging tot bevordering der geneeskundige Wetenschappen in Nederlandsch-Indië. Batavia 1888. Deel XXVIII. Afl. 4. 8°.

Tijdschrift voor Nijverheid en Landbouw. Batavia 1888—1889. Deel XXXVII. Afl. 4—5. Deel XXXVIII. Afl. 1. 8°.

G. J. P. J. Bolland. De wereldbeschouwing der toekomst. Batavia 1888. 8°.

Observations made at the magnetical and meteorological Observatory at Batavia. 1888. Vol. VIII. fol.

BELGIË.

Bulletin de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des beaux-Arts de Belgique. Bruxelles 1888. 3e Série. Tome XVI. N°. 12. Tome XVII. N°. 1—2. 8°.

F. Plateau. Recherches expérimentales sur la vision chez les Arthropodes. Bruxelles 1888. 5e Partie. 8°. (Extrait des Bulletins de l'Académie royale de Belgique. 3e Série. Tome XVI.)

G. van der Mensbrugghe. Sur les moyens d'évaluer et de combattre l'influence de la capillarité dans la densimétrie. Bruxelles 1888. 8°.
(Extrait des Bulletins de l'Académie royale de Belgique. 3e Série. Tome XVI.)

——————— Contribution à la théorie du siphon. Bruxelles 1889. 8°.
(Extrait des Bulletins de l'Académie royale de Belgique. 3e Série. Tome XVII.)

Bulletin de l'Académie royale de Médecine de Belgique. Bruxelles 1889. 4e Série. Tome III. N⁰. 1. 8⁰.

Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie royale de Médecine de Belgique. Bruxelles 1889. Tome IX. Fasc. 1. 8⁰.

Annuaire statistique de la Belgique. Bruxelles 1888. Tome XVIII. 8⁰.

Annales de la Société entomologique de Belgique. Bruxelles 1887. Tome XXXI. 8⁰.

A. Preudhomme de Borre. Répertoire alphabétique des noms spécifiques admis ou proposés dans la sous-famille des Libellulines. Bruxelles 1889. 8⁰.

Annales de la Société royale malacologique de Belgique. Bruxelles 1887. Tome XXII. 8⁰.

Procès-verbaux des séances de la Société royale malacologique de Belgique. Bruxelles 1888. Tome XVII. 8⁰.

Annales de la Société géologique de Belgique. Liége 1888. Tome XIII. Livr. 2. Tome XV. Livr. 2—3. 8⁰.

Annales de l'Académie d'Archéologie de Belgique. Anvers 1887. 4e Série. Tome III. 8⁰.

Bulletin de l'Académie d'Archéologie de Belgique. Anvers 1888. N⁰. XVI. 8⁰.

Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Vlaamsche Academie voor Taal- en Letterkunde. Gent 1888. Afl. 2—3. 8⁰.

FRANKRIJK.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. Paris 1889. Tome CVIII. N°. 3—11. 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Inscriptions et belles-Lettres. Paris 1888. 4e Série. Tome XVI. Septembre-Octobre. 8°.

Bulletin de l'Académie de Médecine. Paris 1889. 3e Série. Tome XXI. N°. 3—11. 8°.

Mémoires de la Société zoologique de France. Paris 1888. Vol. I. Part 2. 8°.

Bulletin de la Société zoologique de France pour l'année 1888. Paris 1888. Tome XIII. N°. 7—8. 8°.

Mémoires publiés par la Société philomatique à l'occasion du centenaire de sa fondation, 1788—1888. Paris 1888. 4°.

Bulletin de la Société philomatique. Paris 1888. 7e Série. Tome XII. N°. 4. 8°.

Compte-rendu sommaire des séances de la Société philomatique. Paris 1889. N°. 1—3. 8°.

Bulletin de la Société mathématique de France. Paris 1888. Tome XVI. N°. 6. 8°.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de la Société de Biologie. Paris 1888—1889. 8e Série. Tome V. N°. 37, 39—41. 9e Série. Tome I. N°. 1—9. 8°.

Journal d'Hygiène. Paris 1889. 15e Année. Vol. XIV. N°. 645—653. 4°.

Revue internationale de l'Electricité et de ses applications. Paris 1889. 5e Année. Tome VIII. N°. 75, 77—78 roy. 8°.

Annales du Musée Guimet. Paris 1888. Tome XIII. 4°.

Inhoud:

Ch. Schoebel. Le Râmâyana au point de vue religieux, philosophique et moral.

Revue de l'Histoire des Religions. Paris 1888. Tome XVII. N°. 3. Tome XVIII. N°. 1—2. 8°.

Archives de Médecine et de Pharmacie militaires. Paris 1887—1888. Tome X—11. 2 Dl. 8°.

Mission scientifique au Mexique et dans l'Amérique centrale. Recherches zoologiques. 3e Partie. Livr. 11. 7e Partie. Livr. 10. 4°.

Catalogue général des manuscrits des Bibliothèques publiques des départements. Paris 1885. Tome VII. Toulouse—Nimes. 4°.

M. Berthelot. Collection des anciens Alchimistes Grecs. Paris 1888. Livr. 3—4. 4°.

L. Delisle. Catalogue des manuscrits des fonds Libri et Barrois. Paris 1888. 8°.

I. G. de Man. Espèces et genres nouveaux de Nématodes libres de la mer du Nord et de la Manche. Paris 1889. 8°. (Extrait des Mémoires de la Société zoologique de France).

L. Lallemand. De l' organisation du travail dans les prisons cellulaires belges. Paris 1889. 8°.

le prince Roland Bonaparte. Note on the Laps of Finmark. Paris 1886. 4⁰.

——————————— La Nouvelle-Guinée. Paris 1887—1888. 3e Notice. Le fleuve Augusta. IVe Notice. Le golfe Huon. 4⁰.

le prince Albert de Monaco. Sur une expérience entreprise pour déterminer la direction des courants de l'Atlantique Nord. 2e Campagne de l' Hirondelle. 4⁰.

——————————— Sur les résultats partiels des deux premières expériences pour déterminer la direction des courants de l' Atlantique Nord. 4⁰.

——————————— Sur la troisiéme campagne scientifique de l' Hirondelle. 4⁰.

——————————— Sur la quatriéme campagne scientifique de l' Hirondelle. 4⁰.

——————————— Sur un cachelot des Açores. 4⁰.

——————————— Sur l' alimentation des naufragés en pleine mer. 4⁰.

Actes de l' Académie nationale des Sciences, belles-Lettres et Arts de Bordeaux. Paris 1887. 3e Série. Année 48. 8⁰.

Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Paris 1887. Tome III. Cahier 2. 8⁰.

Observations pluviométriques faites dans le département de la Gironde de Juin 1886 à Mai 1887. Bordeaux 1887. 8⁰.

Bulletin de la Société des Sciences de Nancy. Paris 1888. 2e Série. Tome IX. Fasc. 21. 8⁰.

Mémoires de l'Académie de Stanislas. Nancy 1888. 5e Série. Tome V. 8⁰.

Mémoires de l'Académie des Sciences, Inscriptions et belles-Lettres. Toulouse 1888. 8e Série. Tome X. 8⁰.

Recueil de l' Académie de Législation de Toulouse. 1887—88. Tome XXXVI. 8⁰.

Mémoires de la Société Académique des Sciences et Arts de St. Quentin. 1888. 4e Série. Tome VII. 8⁰.

Académie des Sciences et Lettres de Montpellier. Mémoires de la section des Lettres. Montpellier 1888. Tome VIII. Fasc. 2. 4⁰.

Inhoud:

Ch. Revillout. Le dictionnaire au théatre. Les mots à la mode.
Grasset-Morel. Différend entre le chapitre cathédral de Montpellier et le chapitre collégial de Saint-Sauveur (XVIIe et XVIIIe Siècles).
Ch. Revillout. Molière, Louis XIV et „Le Tartuffe".
F. Saurel. L'évêque François Reinaud de Villeneufve (né à Aix le 2 Avril 1683, mort à Montpellier le 24 Janvier 1766.)

D. Haigneré. Les chartes de Saint-Bertin. St. Omer 1888. Tome II. 4⁰.
(Publié par la Société des Antiquaires de la Morinie.)

Bulletin historique de la Société des Antiquaires de la Morinie. St. Omer 1888. Nouvelle Série. Livr. 147—148. 8⁰.

Bulletin de la Société Linnéenne de Normandie. Caen 1866—1888. Vol. X. 2e Série. Vol. I—III. VIII—X. 3e Série. Vol. I—III. 4e Série. Vol. I. 10 Dl. 8⁰.

Mémoires de la Société Dunkerquoise pour l'encouragement des Sciences. Dunkerque 1884 — 1885. Vol. XXII—XXIII. 2 Dl. 8⁰.

Mémoires de la Société d'émulation. Cambrai 1888. Tome XLIII. 8⁰.

Mémoires de l'Académie des Sciences, Arts et belles-Lettres de Dyon. 1888. 3e Série. Tome X. 8⁰.

Bulletin de la Société des Antiquaires de Picardie. Amiens 1888. Année 1888. N⁰. 2—3. 8⁰.

Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique publié par la Société d'Agriculture, Sciences et Arts. Valenciennes 1888. Tome XL. N⁰. 1—10. 8⁰.

GROOT-BRITTANNIË EN IERLAND.

Proceedings of the royal Society. London 1888. Vol. XLV. N⁰. 274—276. 8⁰.

Monthly Notices of the royal astronomical Society. London 1889. Vol. XLIX. N⁰. 3—4. 8⁰.

Proceedings of the royal geographical Society. London 1889. New Series. Vol. XI. N⁰. 2. 8⁰.

Journal of the royal microscopical Society. London 1889. Part 1. 8⁰.

Journal of the royal Asiatic Society. London 1888. New Series. Vol. XX. Part 4. 8⁰.

Journal of the anthropological Institute of Great Britain and Ireland. London 1889. Vol. XVIII. N⁰. 3. 8⁰.

Transactions of the Cambridge philosophical Society. Cambridge 1889. Vol. XIV. Part 3. 4⁰.

Inhoud:

E. W. Hobson. On a class of spherical harmonics of complex degree with application to physical problems.

F. W. NEWMAN. Table of the exponential function e_x to twelve places of decimals.
C. CHREE. The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates, their solution and application.
G. D. LIVEING. On solution and crystallization.

The collected mathematical papers of A. CAYLEY. Cambridge 1889. Vol. I. 4⁰.

Transactions of the royal Irish Academy. Dublin 1889 Vol. XXIX. Part 5. 4⁰.

Inhoud:

R. STAWELL BALL. On the theory of the content.

OOSTENRIJK-HONGARIJE.

Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Wien 1888. N⁰. 15—18. 1889. N⁰. 1—2 4⁰.

Földtani Közlöny. (Geologische Mittheilungen). Zeitschrift der ungarischen geologischen Gesellschaft. Budapest 1888. Kötet XVIII. N⁰. 5—12. roy. 8⁰.

FR. TESAR. Analysis gravitatis terrestris. Praze 1888. 4⁰.

DUITSCHLAND.

Die Venus-Durchgänge 1874 und 1882. Bericht über die deutschen Beobachtungen. Berlin 1889. Band II. 4⁰.

Ergebnisse der Beobachtungsstationen an den deutschen Küsten über die physikalischen Eigenschaften der Ostsee und Nordsee und die Fischerei. Berlin 1889. Jahrg. 1887. Heft X—XII. 4⁰. oblong.

Archiv für pathologische Anatomie und Physiologie und für klinische Medicin. Berlin 1889. Band CXV. Heft 1—3. 8°.

Verhandlungen des botanischen Vereins der Provinz Brandenburg. Berlin 1868—1888. Jahrg. X—XIII, XV—XXVIII. 8°.

Schriften des naturwissenschaftlichen Vereins für Schleswig-Holstein. Kiel 1889. Band VII. Heft 2. 8°.

Verhandlungen des naturhistorischen Vereines der preussischen Rheinlande. Bonn 1888. Jahrg. 45. 2t· Hälfte. 8°.

Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der kön. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Leipzig 1888. Band XIV. N°. 10—13. 4°.

Inhoud:

10. J. Walther. Die Korallenriffen der Sinaihalbinsel.
11. W. Spalteholz. Die Vertheilung der Blutgefässe im Muskel.
12. S. Lie. Zur Theorie der Berührungstransformationen.
13. C. Neumann. Ueber die Methode des arithmetischen Mittels. 2te Abhandlung.

Berichte über die Verhandlungen der kön. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Philologisch-historische Classe. Leipzig 1888. N°. 1—2. 8°.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. Leipzig 1888. Jahrg. 23. Heft 4. 8°.

R. Hoppe. Grunert's Archiv der Mathematik und Physik. Leipzig 1889. 2e Reihe. Teil VII. Heft 3. 8°.

Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1889. Jahrg. 12. N°. 299—303. 8°.

A. Nauck. Tragicorum graecorum fragmenta. Lipsiae 1889. Editio 2a. 8°.

Petermann's Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt. Gotha 1389. Band XXXV. N°. 1—2. Ergänzungsheft N°. 92. 4°.

Verhandlungen der kais. Leopoldinisch-Carolinischen deutschen Akademie der Naturforscher. Halle 1888. Band LII. 4°.

Inhoud:

R. Olbricht. Studien über die Kugel- und Cylinderfunctionen.

N. Wille. Beiträge zur Entwickelungsgeschichte der physiologischen Gewebesysteme bei einigen Florideen.

P. Gerber. Der absolute Nullpunkt der Temperatur. — Die Arbeit der Dämpfe beim sieden, und die Dämpfe im Zustande der Sättigung.

E. von Gumpenberg. Systema geometrarum zonae temperatioris septentrionalis.

M. Wilkens. Beitrag zur Kenntniss des Pferdegebisses mit Rücksicht auf die fossilen Equiden von Maragha in Persien.

E. Waelsch. Ueber das Normalensystem und die Centralfläche algebraischer Flächen, insbesondere der Flächen 2ten Grades.

W. Zopf. Zur Kenntniss der Infections-krankheiten niederer Thiere und Pflanzen.

Leopoldina. Amtliches Organ der kais. Leopoldino-Carolinischen deutschen Akademie der Naturforscher. Halle 1888. Heft 24. 4°.

R. Hamel. Die reaktionäre Tendenz der weltsprachlichen Bewegung. Halle a/S. 1889. 8°.

Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, herausgegeben von der medizinisch-naturwissenschaftlichen Gesellschaft. Jena 1888. Band XXIII. Heft 1. 8°.

Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der kön. bayr. Akademie der Wissenschaften. München 1888. Band XVI. Abth. 3. 4°.

Inhoud:

C. M. von Bauernfeind. Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraction. 3e Mittheilung.

A. Miller. Ueber die Grundlagen der Bestimmungsmethode des longitudinalen Elastizitätsmoduls.

F. Kohlrausch. Ueber den absoluten elektrischen Leitungswiderstand des Quecksilbers.

Abhandlungen der historischen Classe der kön. bayr. Akademie der Wissenschaften. München 1888. Band XVIII. Abth. 2. 4°.

Inhoud:

L. von Rockinger. Ueber die Abfassung des kaiserlichen Land- und Lehenrechts. 1ste Hälfte.

C. A. Cornelius. Die Rückkehr Calvins nach Genf. I. Die Guillermins.

F. Stieve. Wittelsbacher Briefe aus den Jahren 1590 bis 1610. Abtheilung 3.

Joseph von Fraunhofer's gesammelte Schriften. Im Auftrage der mathematisch-physikalischen Classe der kön. bayr. Akademie der Wissenschaften herausgegeben von E. Lommel. München 1888. 4°.

Anzeiger des germanischen Nationalmuseums. Nürnberg 1888. Band II. Heft 2. 8°.

Mittheilungen aus dem germanischen Nationalmuseum. Nürnberg 1888. Band II. Heft 2. 4°.

Katalog der im germanischen Museum befindlichen deutschen Kupferstiche des XV Jahrhunderts. Nürnberg 1888. 8°.

J. G. de Man. Ueber einige neue oder seltene indopacifische Brachyuren. 8°.
(Separatabdruck aus den zoologischen Jahrbüchern. Band IV.)

ZWITSERLAND.

Mémoires de la Société de Physique et d' Histoire naturelle. Genève 1888. Tome XXX. Part. 1. 4⁰.

Inhoud:

H. DE SAUSSURE. Additamenta ad Prodromum Oedipodiorum insectorum ex ordine Orthopterorum.
P. CHOFFAT et P. DE LORIOL. Matériaux pour l'étude stratigraphique et paléontologique de la province d' Angola.
I. MULLER. Pyrenocarpeae Feeanae in Feei Essai (1824) et Supplément (1837) edita e novo studio speciminum originalium expositae et in novam dispositionem ordinatae.
M. L. DE LA RIVE. Sur la composition des sensations et la formation de la notion d' espace.

Abhandlungen der schweizerischen paläontologischen Gesellschaft. Basel 1888. Vol. XV. 4⁰.

Inhoud:

L. RÜTIMEIJER. Beziehungen zwischen Säugethierstämmen alter und neuer Welt.
KOBY. Monographie des polypiers jurassiques de la Suisse. 8e partie.
GREPPIN. Description des fossiles de la grande Oolithe des environs de Bâle.
P. DE LORIOL et BOURGEAT. Etudes sur les mollusques des couches coralligènes de Valfin. 3e Partie.

ITALIË.

Atti della reale Accademia dei Lincei. Roma 1888. Serie 4a. Rendiconti. Vol. IV. 2e Semestre. Fasc. 6—10. 4⁰.

Bollettino delle opere moderne straniere. Roma 1888. Vol. III. N⁰. 6. Vol. IV. N⁰. 1. 8⁰.

Bollettino delle pubblicazioni italiane. Firenze 1889. N⁰. 74—77. 8⁰.

Per la edizione nazionale delle opere di Galileo Galilei. Indice alfabetico e topografica del commercio epistolare. Firenze 1889. 4^{0}.

Atti della reale Accademia delle Scienze. Torino 1889. Vol. XXIV. Disp. 2—5. 8^{0}.

Memorie della reale Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna. 1887. Serie 4^{a}. Tomo VIII. 4^{0}.

Inhoud :

C. Belluzzi. Storie di due gravidanze extra-uterine e considerazioni relative.

L. Caroli. Sopra due casi di varieta numeriche delle vertebre accompagnati da varieta numeriche delle costole e da altre anomalie.

A. Cavazzi. Intorno di metodi di preparazione dell'idrogene arsenicale.

F. Delpino. Fiori doppii (Flores pleni).

F. Morini. Ricerche sopra una nuova Chitridiacea.

S. Trinchese. Ricerche anatomiche ed embriologiche sulla Flabellina affinis (Gm).

G. Brugnoli. Delle epidemie di Cholera-morbus che hanno dominato nella citta e provincia di Bologna, brevi cenni e confronti.

E. Villari. Studii ed osservazioni intorno alla macchine elettriche ad influenza e descrizione di una nuova e grande macchina ad otto dischi.

A. Poggi. La divulsione digitale del piloro, ricerche anatomiche e sperimentali.

V. Mazzoni. Della terminazioni dei nervi nella pelle della rana rubra.

P. Albertoni. Sulla formazione e sul contegno dell'alcol e dell'aldeide nell'organismo.

E. Beltrami. Intorno ad alcuni problemi di propagazione del calore.

L. Donati. Di un nuovo modello di elettrometro a quadranti e dell' applicazioni delle correnti di Foucault allo smorzamento delle oscillazioni degli elettrometri.

———— Di una batteria per correnti di grande intensita con immersione simultanea degli elementi.

L. Bombicci. Sulla costituzione fisica del globo terrestre, sull'origine della sua crosta litoide, sulle cause dei moti sismici che piu frequentemente vi avvengono.

———— Sulla ipotesi dell'azione e selezione magnetica del globo terrestre sulle materie cosmiche interplanetarie contenenti ferro; nuove considerazioni coordinate collo studio della piu probabile costituzione fisica del globo.

D. Tivoli. Azione dell'idrogene arseniato sull'anidride arseniosa sciolta in acido cloridrico o in acido solforico.

P. Riccardi. Saggio di una bibliografia Euclidea.

G. V. Ciaccio. Della notomia minuta di quei muscoli che negl'insetti muovono le ali.

L. Caroli. Sulla splancnologia di uno sternopago umano notabile per inverzione parziale della cavita cardiache.

A. Cavazzi. Azione del fluoruro di silicio sulla chinina sciolta in liquidi diversi.

A. Saporetti. Analisi nuova per dimostrare giusto l'usato metodo pratico degl'immaginari e teoria, piu generale dell'usate, sulle relazioni fra i coefficienti delle funzioni algebrico-intere ad una variabile ed i fattori lineari, siano funzionali, siano propri delle equazioni.

D. Loreta. Colecistotomia e colecistorafia invece della colecistectomia.

——— Echinococco del fegato, resesione del fegato, escisione della cisti, guarigione.

G. Brugnoli. Uso della noce vomica nella epilessia da irritazione del Vago.

C. Razzaboni. Sopra alcune modificazioni in un molinello idrotachimetrico a volante di Robinson.

F. Delpino. Funzione mirmecofila nel regno vegetale.

F. Morini. Intorno ad una speciale degenerazione delle leuciti.

F. P. Ruffini. Di alcune propieta della rappresentazione sferica del Gauss.

F. Brazzola. Ricerche sull' istologia normale e patologica del testicolo.

L. Mazzotti. Della pleurite purulenta, secondaria alla pneumonite acuta fibrinosa, con evacuazione della marcia per le vie bronchiali ed esito in guarigione.

C. Taruffi. Intorno alla macrosomia puerile (neanio-macrosomia).

A. Reghi. Sulla forza elettromotrice delle coppie a liquido poco conduttore.

Note sur les derniers progrès de la question de l'unification du calendrier dans ses rapports avec l'heure universelle. Bologne 1888. 8°.

(Publié par la R. Académie des Sciences de l'Institut de Bologne.)

Statuti delle Universita e dei collegi dello studio Bolognese pubblicati da C. Malagola. Bologna 1888. fol.

Notizie concernenti la Scuola d' applicazione per gli Ingegneri e monografie dei Cabinetti. Bologna 1881. 8°.

Notizie concernenti la Scuola d' applicazione per gli Ingegneri, monografie dei Cabinette, delle collezioni e Catalogo delle pubblicazioni degle insegnanti in continuazione di quelle edite nel 1881. Bologna 1888. 8°.

A. MARESCOTTI. Conosci te stesso e l' ambiente della tua attivita. Dialoghi per l' istruzioni popolari. Bologna 1888. 8°.

V. POLACCO. Della dazione in pagamento. Padova 1888. Vol. I. 8°.

Memorie della regia Accademia di Scienze, Lettere ed Arti. Modena 1887. Serie 2. Vol. V. 4°.

Inhoud:

P. OLIVI. Delle prerogative delle persone che compongono il seguito dell' inviato diplomatico.
D. RAGONA. Nuove formule relative alla risoluzione dei triangoli sferici.
L. OLIVI. Dei poteri dell' agente diplomatico sulle persone del seguito.
D. RAGONA. Il barometro registratore Richard.
———— Il mese di febbraio in Modena.
P. RICCARDI. La statura dei Bolognesi contemporanei studiata in rapporto al sesso e a l'eta.
A. GRAZIANI. Sull' aumento progressivo delle spese pubbliche negli stati moderni in relazione colla ricchezza della nazione e dei privati.
L. OLIVI. Delle nozze di Ercole I d'Este con Eleonora d' Aragona.
G. CAMUS. Precetti di rettorica scritti per Enrico III re di Francia.
CH. HUGUES. Lo stile del duomo modenese e della nuova decorazione dipintavi nell' abside.

Atti della reale Accademia delle Scienze fisiche e matematiche. Napoli 1888. Serie 2a. Vol. I—II. 4°.

Inhoud Vol. I:

A. CAPELLI. Ricerca delle operazione invariantive fra piu serie di variabili permutabili con ogni altra operazione invariantiva fra le stesse serie.
A. COSTA. Notizie ed osservazioni sulla geo- fauna Sarda.
E. VILLARI. Ricerche microscopiche sulle tracce delle scintille elet. triche incise sul vetro, e sui diametri delle scintille istesse.
L. PALMIERI e A. OGLIALORO. Sul terremoto del' isola d' Ischia della sera del 28 Luglio 1883.

A. Scacchi. Sopra un frammento di antica roccia vulcanica invilupato nella lava vesuviana del 1872.

E. Fergola. Sulla latitudine del reale Osservatorio di Capodimonte.

S. Kantor. Premiers fondements pour une théorie des transformations périodiques univoques.

A. Scacchi. Nuove ricerche sulle forme cristalline dei paratartrati acidi di ammonio e di potassio.

A. Costa. Miscellanea entomologica.

G. Licopoli. Sull' anatomia e fisiologia del frutto nell' Anona reticulata L. e nell' Asimina triloba Dun.

G. A. Pasquale. Cenni sulla flora di Assab.

F. Balsamo. Sulla storia naturale delle alghe d' acqua dolce del comune di Napoli.

P. Malerba. Sulla natura e costituzione chimica dei grassi delle castagne comuni e su di una sostanza nuova in esse scoperta.

A. Marotta. Studi sulla struttura dell' Amnios del gatto.

F. Rho. Studi sullo sviluppo della Chromodoris elegans.

Vol. II:

G. Govi. Il microscopio composto inventato da Galileo.

A. Scacchi. La regione vulcanica fluorifera della Campania.

G. Guiscardi. Studii sul terremoto d' Ischia del 28 Luglio 1883.

G. Battaglini. Intorno ad un' applicazione della teoria delle forme binarie quadratiche all' integrazione dell' equazione differenziale ellittica.

G. Licopoli. Sul polline dell' Iris tuberosa L. e d' altre piante.

G. Battaglini. Sulle forme binarie bilineari.

A. Costa. Notizie ed osservazioni sulla geo-fauna Sarda.

G. Nicolucci. Antropologia dell' Italia nell' evo antico e nel moderno.

A. Scacchi. Le eruzioni polverose e filamentose dei vulcani.

F. S. Monticelli. Ricerche intorno al seno cutaneo interdigitale della pecora (Ovis aries, Lin.)

Rendiconti dell' Accademia delle Scienze fisiche e matematiche. Napoli 1887. Serie 2a. Vol. I. Fasc. 1—2. 4°.

Mittheilungen aus der zoologischen Station zu Neapel. Berlin 1888. Band VIII. Heft 3—4. 8°.

Atti e Memorie della reale Accademia di Scienze, Lettere ed Arti. Padova 1885—1887. Nuova Serie. Vol. I—III. 8°.

Atti della Societa Toscana di Scienze naturali. Processi Verbali di 11 November 1888. 8⁰.

A. Favaro. Intorno alle opere complete di Cristiano Huygens pubblicate dalla Societa Olandese delle Scienze. 8⁰.

DENEMARKEN.

Mémoires de l' Académie royale de Copenhague. 1888. Classe des Lettres. 6e Série. Vol. II. N⁰. 2—3. 4⁰.

Inhoud:

2. A. Lehmann. Om Genkendelse. Forsog paa en experimental verifikation af forestillings-associationernes teori.
3. I. L. Heiberg. Om scholierne til Euklids elementer. (Avec un résumé en français).

Oversigt over det kongelige danske Videnskabernes Selskabs forhandlinger. Kjobenhavn 1888. N⁰. 2. 8⁰.

Aarböger for Nordisk oldkyndighed og historie, udgivne af det kongelige nordiske Oldskrift-Selskab. Kjobenhavn 1888. 2e Raekke. Bind III. Hefte 4. Bind IV. Hefte 1.

A. B. Drachman. Catuls digtning belyst i forhold til den tidligere graeske og latinske litteratur. Kjobenhavn 1887. 8⁰.

——————— Guderne hos Vergil. Bidrag til belysning af Aeneidens komposition. Kjobenhavn 1887. 8⁰.

ZWEDEN EN NOORWEGEN.

A. Blytt. Additional Note to the probable cause of the displacement of beach-lines. 8⁰.

A. Blytt. The probable cause of the displacement of beach-lines. 2[d] Additional note. 8°.

Jahrbuch des norwegischen meteorologischen Instituts für 1885 und 1886. Christiania 1886—1887. 2 Dl. 4°.

Nyt Magazin for Naturvidenskaberne. Christiania 1886. Bind XXX. Hefte 3—4. 8°.

L. Daae. Joannis Agricolae Islebiensis Apophthegmata. Christiania 1886. 4°.

F. C. Schübeler. Viridarium Norvegicum. Norges Vaextrige. Et bidrag tel Nord-Europas Natur-og Culturhistorie. Christiania 1888. Band II. Hefte 2. 4°.

H. Reusch. Bommeloen og Karmoen med omgivelser geologisk beskrevne; samt an english summary of the contents. Kristiania 1888. 4°.

L. B. Stenersen. Udsigt over den romerske satires forskjellige arter og deres oprindelse. Kristiania 1887. 8°.

——————— Catul's digtning oplyst i dens sammenhaeng met den tidligere graeske og latinske literatur. Kristiania 1887. 8°.

Det kongelige norske Videnskabers Selskabs Skrifter 1886 og 1887. Throndhjem 1888. 8°.

R U S L A N D.

Mémoires de l'Académie impériale des Sciences de St. Pétersbourg. 1888. 7[e] Série. Tome XXXVI. N°. 1—8. 4°.

Inhoud:

1. H. Wild. Neuer magnetischer Unifilar-Theodolith.
2. F. Schmidt. Ueber eine neuentdeckte untercambrische Fauna in Estland.
3. Th. Pleske. Revision der turkestanischen Ornis.
4. A. E. Feoktistow. Eine vorläufige Mittheilung über die Wirkung des Schlangengiftes auf den thierischen Organismus.
5. E. Mojsisovics von Mojsvar. Ueber einige arktische Trias-Ammoniten des nördlichen Siberien.
6. M. Woronin. Ueber die Sclerotienkrankheit der Vaccinieen-Beeren.
7. O. Backlund. Ueber die Herleitung der im achten Bande der „Observations de Poulkova" enthaltenen Stern-Cataloge nebst einigen Untersuchungen über den Pulkowaer Meridiankreis.
8. C. V. L. Charlier. Ueber eine mit dem Problem der drei Körper verwandte Aufgabe.

Bulletin de l'Académie impériale des Sciences de St. Petersbourg. 1888. Tome XXXII. N^{0}. 2—4. 4^{0}.

A. Auwers. Neue Reduction der Bradley'schen Beobachtungen aus den Jahren 1750 bis 1762. St. Petersburg 1888. Band III. 4^{0}.

W. Döllen. Stern-Ephemeriden auf das Jahr 1889 zur Bestimmung von Zeit und Azimut, mittelst des tragbaren Durchgangsinstruments im Verticale des Polarsterns. St. Petersburg 1888. 8^{0}.

Observations de Poulkova. St. Petersbourg 1888. Vol. XIV. 4^{0}.

H. Struve. Beobachtungen der Saturnstrabanten. 1ste Abth. Beobachtungen am 15 zölligen Refractor. St. Petersburg 1888. 4^{0}.
(Supplément I aux Observations de Poulkova).

Annalen des physikalischen Central-Observatoriums. St. Petersburg 1888. Jahrg. 1887. Theil I. 4^{0}.

Korrespondenzblatt des Naturforscher-Vereins. Riga 1888. N⁰. XXXI. 8⁰.

A Z I Ë.

Registers of original observations in 1888 reduced and corrected. August-September 1888. 4⁰.

Indian meteorological Memoirs. Calcutta 1888. Vol. III. Part 3—4. Vol IV. Part 5. 4⁰.

Report on the administration of the meteorological department of the government of India in 1887—88. 8⁰.

Charts of the Arabian sea and the adjacent portion of the North Indian Ocean, shewing the mean pressure, winds and currents in each month of the year. Plano.

Journal of the China Branch of the royal Asiatic Society. Calcutta 1888. New Series. Vol XXIII. N⁰. 1 8⁰.

A F R I K A.

Transactions of the South African philosophical Society. Cape Town 1878—1882. Vol I. Part 1, 2, 4. Vol. II. Part 1—3. 8⁰.

A M E R I K A.

Report of the Surgeon General of the Army to the Secretary of War for the year ending June 30, 1888. Washington 1888. 8⁰.

Bulletin of the U. S. coast and geodetic Survey. N⁰. 5—8. 4⁰.

Proceedings of the Academy of natural Science. Philadelphia 1888. Part 3. 8⁰.

SETH S. BISHOP. Report of the committee on Ophthalmology and Otology. 8⁰.

Journal of the American medical Association. Chicago 1889. Vol. XII. N⁰. 2—10. 4⁰.

Memorias de la Sociedad cientifica »Antonio Alzate". Mexico 1888. Tome II. N⁰. 5. 8⁰.

D. FREIRE. La mission du Dr. Sternberg au Brésil. Réfutation du rapport publié par ce médecin sur la fièvre jaune. Rio-Janeiro 1889. 8⁰.

J. DE SALDANHA DA GAMA. Catalogo da exposiçao permanente dos cimelios da Bibliotheca Nacional. Rio de Janeiro 1885. 8⁰.

Guia da exposiçao permanente da Bibliotheca Nacional. Rio de Janeiro 1885. 8⁰.

Revista do Observatorio, publicaçao mensal do imperial Observatorio do Rio de Janeiro. 1888. Anno III. N⁰. 12. 1889. Anno IV. N⁰. 1. 4⁰.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. Buenos-Aires 1888. Tome XXVI. Entr. 1—3. 8⁰.

AUSTRALIË.

Prodromus of the zoology of Victoria. Melbourne 1888. Decade XVI. 8⁰.

AANGEKOCHT.

De Navorscher. Nijmegen 1889. Nieuwe Serie. Jaarg. 22. Afl. 2—3. 8°.

Bibliotheca Belgica. Livr. XC—XCVI. 8°.

La grande Encyclopédie. Inventaire raisonné des Sciences, des Lettres et des Arts. Paris 1889. Livr. 167—175. 4°.

Journal des Savants. Paris. Janvier-Février 1889. 4°.

Annales des Sciences naturelles. Paris 1888. 7e Série. Zoologie. Tome VI. N°. 4—6. Botanique. Tome VIII. N°. 4—6. 8°.

Archives de Zoologie expérimentale et générale. Paris 1888. 2e Série. Tome VI. N°. 3. 8°.

Revue générale de Botanique dirigeé par G. Bonnier. Paris 1889. Tome I. N°. 1—3. 8°.

Bulletin des Sciences mathématiques. Paris 1888—1889. 2e Série. Tome XII. Décembre. Tome XIII. Janvier-Février. 8°.

Annales de Chimie et de Physique. Paris 1889. 6e Série. Tome XVI. Février-Mars. 8°.

The London, Edinburgh, and Dublin philosophical Magazine and Journal of Science. London 1889. 5th Series. Vol. XXVII. N°. 165—166. 8°.

Annals and Magazine of Natural History. London 1889. 6th Series. Vol. III. N°. 14—15. 8°.

Annals of Botany. Londen 1889. Vol. III. N°. 9. 8°.

Zoological Record for 1887. London 1888. Vol. XXIV. 8°.

Astronomische Nachrichten. N°. 2875—2884. 4°.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1889. N°. 2—6. 8°.

Arbeiten aus dem kais. Gesundheitsamte. Berlin 1889. Band V. Heft 1. 4°.

Veröffentlichungen des kais. Gesundheitsamtes. Berlin 1889. Jahrg. XIII. N°. 4—12. 4°.

Berichte der deutschen botanischen Gesellschaft. Berlin 1888—1889. Band VI. Heft 10. Band VII. Heft 1. 8°.

Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1889. Neue Folge. Band XXXVI. Heft 2—4. Beiblätter. Band XII. St. 12. Band XIII. St. 1. 8°.

Zeitschrift für physikalische Chemie. Leipzig 1889. Band III. Heft 1—3. 8°.

Journal für Ornithologie. Leipzig 1888. Jahrg. XXXVI. Heft 4. 8°.

Der zoologische Garten. Frankfurt a. M. 1889. Jahrg. 30. N°. 1—2. 8°.

Dingler's polytechnisches Journal. Stuttgart 1889. Band CCLXXI. Heft 4—12. 8°.

Flora oder allgemeine botanische Zeitung. Marburg 1889. Neue Reihe. Jahrg. 47. Heft 1. 8°.

Annalen des Vereins für nassauische Alterthumskunde und Geschichtsforschung. Wiesbaden 1830—1873. Band I—XII. 8°.

Archives des Sciences physiques et naturelles. Genève 1889. 3e Période. Tome XXI. N°. 1—3. 8°.

Bibliothèque universelle et Revue Suisse. Lausanne 1889. 3e Période. Tome XLI. N°. 121—122. 8°.

A. de Gubernatis. Dictionnaire international des écrivains du jour. Florence 1889. Livr. 6. 8°.

Annals of the Lyceum of natural History. New-York 1824—1828. Vol. I, II, III. Part 1. 8°.